ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԱՍ II

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԲՈՒՀԱԿԱՆ ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ԲՈՒՀԵՐԻ ԲՆԱԳԻՏԱԿԱՆ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏՆԵՐԻ
ՈՒՍԱՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2017

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7
Գ 206

ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից հաստատվել է
որպես բուհական դասագիրք

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի խորհուրդը

Խմբագիր՝ ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ա. Մ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ
Գրախոս՝ ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԳԱԼՍՏՅԱՆ Լ.Հ.

Գ 206 Բարձրագույն մաթեմատիկա: Մաս II: Մեկ փոփոխականի դիֆերենցիալ հաշիվ: Բուհական դասագիրք/ Լ.Հ. Գալստյան: -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2017, 118 էջ:

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7

ISBN 978-5-8084-2177-6

© ԵՊՀ հրատարակչություն, 2017
© Գալստյան Լ.Հ., 2017

ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԿՈՂՄԻՑ

«Բարձրագույն մաթեմատիկա» ձեռնարկի այս հատորը ամբողջությամբ նվիրված է մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշվին:

Առաջին հատորը բաղկացած էր հինգ գլխից: Այստեղ, բնականաբար, առաջինը վեցերորդ գլուխն է: Այդ գլխում տրված են ֆունկցիայի ածանցյալի և դիֆերենցիալի սահմանումները՝ իրենց բնագիտական ու երկրաչափական մեկնաբանություններով: Բերված են դիֆերենցման կանոնները և, այնուհետև, հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

Յոթերորդ գլխում շարադրված են դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական բանաձևերը: Ներկայացված են բոլոր հիմնական տարրական ֆունկցիաների թեյլորյան վերլուծությունները, մնացորդային անդամի համապատասխան գնահատմամբ:

Վերջին՝ ութերորդ գլուխը, ամենածավալունն է: Այդտեղ նախորդ երկու գլխում մշակված դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները կիրառվում են անհավասարությունների ապացուցման, ֆունկցիայի մոնոտոնության, էքստրեմումների և ուռուցիկության հետազոտման խնդիրներում:

Յուրաքանչյուր գլխի վերջում, ինչպես դա առաջին հատորում էր, բերված են գործնական և տեսական բնույթի բազմաթիվ վարժություններ:

Գրքի այս հատորի ձեռագիրն էլ, ինչպես և առաջին հատորինը, մանրամասն ընթերցվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան, ՀԱԱ թղթակից-անդամ, պրոֆեսոր Ա. Ա. Սահակյանի կողմից: Կատարվել են բազմաթիվ օգտակար դիտողություններ և շտկումներ, որի համար այս անգամ էլ նրան իմ անկեղծ շնորհակալությունն եմ հայտնում:

Լ.Հ. Գալստյան

ԳԼՈՒԽ VI

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ

§ 1. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

1°. *Ածանցյալի գաղափարին հանգեցնող բնագիտական խնդիրներ:*

I. Մասնիկի ուղղագիծ և հավասարաչափ շարժման օրենքը սահմանվում է $S(t)=\upsilon t$ հավասարումով, որտեղ t-ն ժամանակն է, υ-ն՝ շարժման արագությունը, իսկ $S(t)$-ն՝ անցած ճանապարհը:

Այն դեպքում, երբ շարժումը հավասարաչափ չէ (υ-ն հաստատուն չէ), ժամանակի յուրաքանչյուր t_0 պահին շարժման արագությունը գնահատելու համար վարվում են հետևյալ կերպ. հաշվում են t_0-ին անմիջապես հաջորդող կամ նախորդող Δt ժամանակամիջոցում մասնիկի անցած $\Delta S = S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$ ճանապարհը և բաժանում այն Δt-ի: Ստացվածն անվանում են t_0-ից $t_0+\Delta t$-ն ընկած ժամանակահատվածում շարժման միջին արագություն և նշանակում՝

$$\upsilon_{\text{միջ.}} = \frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}: \tag{1}$$

Որքան փոքր է t_0-ից ժամանակի Δt շեղումը, այնքան (1) բանաձևով սահմանված միջին արագությունը ճշգրիտ է արտահայտում շարժման արագությունը ժամանակի հենց t_0 պահին: Դա հիմք ընդունելով՝ ցանկացած t պահին մասնիկի շարժման (ակնթարթային) արագությունը սահմանում են

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{2}$$

բանաձևով:

Օրինակ 1: Մարմնի ազատ անկման օրենքը տրվում է $S(t)=gt^2/2$ բանաձևով, որտեղ t-ն անկման սկզբնապահից հաշված ժամանակն է, g-ն՝ անկման արագացումը, իսկ $S(t)$-ն՝ մարմնի անցած ճանապարհը:

Հաշվենք ժամանակի t պահին մարմնի ազատ անկման ակնթարթային արագությունը: Ունենք՝

$$\upsilon(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(gt\cdot\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g\Delta t}{2}\right)=gt:$$

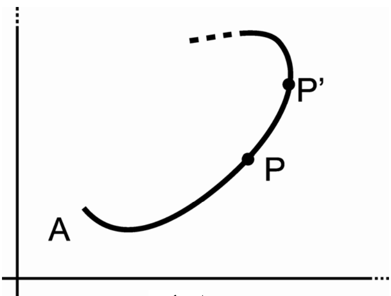
II. Քիմիական ռեակցիայի ընթացքում գոյացող նյութի քանակությունը՝ Q-ն, t ժամանակից կախված ֆունկցիա է. $Q=Q(t)$:

Ցանկացած t-ի համար

$$q(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (3)$$

բանաձևով սահմանվող մեծությունն անվանում են ժամանակի t պահին ռեակցիայի արագություն:

III. Դիցուք հարթության վրա տրված L կորի (գծ. 1) երկայնքով բաշխված է որոշակի զանգված: Կորի A ծայրակետը (կորի սկիզբը) փոփոխական P կետին միացնող աղեղի երկարությունը նշանակենք s-ով, իսկ AP աղեղի զանգվածը՝ m-ով: Պարզ է, որ m-ը ֆունկցիա է s-ից, $m=m(s)$:



գծ. 1

Անցնելով P կետից կորի մեկ այլ՝ P' կետի՝ P-ն P'-ին միացնող աղեղի երկարությունը նշանակենք Δs-ով: Նույն այդ աղեղի զանգվածը, ակնհայտ է, հավասար կլինի $\Delta m=m(s+\Delta s)-m(s)$ տարբերությանը:

Տրված PP' աղեղի Δm զանգվածի և Δs երկարության հարաբերությունն անվանում են PP' աղեղի վրա բաշխված զանգվածի միջին (գծային) խտություն: Իսկ

$$\rho(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{m(s+\Delta s)-m(s)}{\Delta s} \tag{4}$$

բանաձևով սահմանված ֆունկցիան կոչվում է զանգվածի բաշխման խտության ֆունկցիա: Յուրաքանչյուր s-ի համար ֆունկցիայի $\rho(s)$ արժեքն անվանում են s-ին համապատասխանող P կետում զանգվածի (գծային) խտություն:

Ինչպես տեսնում ենք, բերված երեք խնդիրներում էլ (2), (3) և (4) բանաձևերով սահմանված մեծությունները կառուցվում են նույն եղանակով: Անտեսելով հարցի զուտ բնագիտական ասպեկտները և առանձնացնելով այդ սահմանումներում կիրառված ընդհանուր մոտեցումը՝ հանգում ենք ֆունկցիայի ածանցյալի գաղափարին:

2°. ***Ածանցյալի սահմանումը:*** Տրված է $y=f(x)\quad(a<x<b)$ ֆունկցիան: Դիտարկենք $x_0\in(a;b)$ կետը:

Արգումենտի ցանկացած $x\ (x\neq x_0)$ արժեքի համար $\Delta x=x-x_0$ տարբերությունն անվանում են x_0 կետում ***արգումենտի աճ:*** Դրան համապատասխան՝ $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ տարբերությունն անվանում են ***ֆունկցիայի աճ:***

Սահմանում 1: *Ֆունկցիայի աճի և այդ աճն առաջացնող արգումենտի աճի հարաբերության սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում է 0-ի, կոչվում է ֆունկցիայի* ***ածանցյալ*** *և նշանակվում՝*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0): \tag{5}$$

Եթե նշված սահմանը գոյություն ունի և վերջավոր է, ապա f-ն անվանում են x_0 կետում ***դիֆերենցելի:*** Հակառակ դեպքում ասում են, որ f-ն x_0-ում ածանցյալ չունի կամ **դիֆերենցելի չէ:**

Ածանցյալի նշանակման (5)-ում ներկայացված ձևն առաջարկել է Լագրանժը[*]: Իսկ Լայբնիցը, ով, ի դեպ, համարվում է ածանցյալի գաղափարի հեղինակը, իր աշխատանքներում ածանցյալի նշանակման համար օգտագործել է $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ($df(x_0)$ ըստ dx-ի), $\dfrac{df}{dx}$ կամ $\dfrac{dy}{dx}$

[*] **Ժոզեֆ Լուի Լագրանժ** (1736-1813), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

սիմվոլները: Դա, ըստ ամենայնի, պայմանավորված է եղել նրանով, որ ածանցյալը աճերի հարաբերության (կոտորակի) սահման է: Զգուշացնենք, սակայն, որ Լայբնիցի նշանակումները ամբողջական սիմվոլներ են և չի կարելի դրանք ընկալել որպես կոտորակներ: Դա երբեմն կարող է թյուրիմացության հանգեցնել:

Նյուտոնը ֆունկցիայի ածանցյալը նշանակում էր $\dot{f}(x_0)$-ով: Այդ ձևը հիմնականում օգտագործվում է ֆիզիկական խնդիրներում, ժամանակից կախված ֆունկցիաների ածանցյալները նշանակելու համար:

Օգտագործելով սահմանում 1-ին նախորդող նշանակումները և հաշվի առնելով, որ $(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow (x \to x_0)$՝ (5) բանաձևին կարող ենք տալ նաև հետևյալ տեսքը.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : \qquad (5')$$

Անդրադառնալով, վերջապես, նախորդ կետում սահմանված ֆունկցիաներին, տեսնում ենք, որ մասնիկի ուղղագիծ շարժման արագությունը ճանապարհի ածանցյալն է՝ ըստ ժամանակի.

$$\upsilon(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t) :$$

Համանմանորեն, II խնդրում՝ $q(t) = \frac{dQ}{dt} = Q'(t)$, իսկ III-ում՝

$$\rho(s) = \frac{dm}{dt} = m'(s) :$$

3°. ***Ֆունկցիայի դիֆերենցիալը:*** Պահպանելով նախորդ կետում մտցված նշանակումները՝ սահմանենք ևս մի գաղափար, որը սերտորեն առնչվում է ածանցյալի գաղափարին:

Սահմանում 2: *$y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է x_0 կետում* ***դիֆերենցելի****, եթե գոյություն ունի A թիվ, այնպիսին, որ $\Delta f(x_0)$ աճի համար ճշմարիտ է*

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0) \qquad (6)$$

ներկայացումը:

Այս ներկայացման մեջ առաջին գումարելին՝ $A\Delta x$-ը, անվանում են ֆունկցիայի աճի **գլխավոր մաս:** Իսկ երկրորդը, ինչպես և նշանակված է, Δx-ի նկատմամբ, երբ $\Delta x \to 0$, բարձր կարգի անվերջ փոքր է (n° IV. 4.7):

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում սահմանում 2-ի իմաստով դիֆերենցելի է: Բաժանելով (6) հավասարության երկու մասը Δx -ի և անցնելով սահմանի՝ կստանանք.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A:$$

Այստեղից նախ եզրակացնում ենք, որ f -ը x_0 -ում ունի վերջավոր ածանցյալ (սահմանում 1-ի իմաստով դիֆերենցելի է), իսկ այնուհետև, որ (6) ներկայացման մեջ առկա A թիվը հենց $f'(x_0)$ -ն է: Այնպես որ, (6)-ը կարող ենք արտագրել հետևյալ տեսքով.

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x): \tag{6′}$$

Այժմ ենթադրենք, թե f -ը x_0 -ում սահմանում 1-ի իմաստով դիֆերենցելի է:

Ձևափոխելով (5)-ը $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$ տեսքի՝ կարող ենք գրել, որ $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=o(1)$, որտեղից կստացվի ֆունկցիայի աճի $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(1)\cdot\Delta x$ ներկայացումը: Իսկ դա, արդեն, նույն (6′)-ն է, եթե հաշվի առնենք $o(1)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$ ակնհայտ հավասարությունը: Այնպես որ, f -ը, փաստորեն, դիֆերենցելի է նաև սահմանում 2-ի իմաստով:

Այսպիսով, ֆունկցիայի դիֆերենցելիության նախորդ կետում և այս կետում տրված սահմանումները համարժեք են:

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է:

Սահմանում 3: *Ֆունկցիայի աճի (6′) ներկայացման գլխավոր մասը՝ $f'(x_0)\Delta x$ -ը, կոչվում է* ***ֆունկցիայի դիֆերենցիալ*** *և նշանակվում ՝df , Df , $df(x_0)$ կամ $Df(x_0)$:*

Փաստորեն, x_0 կետում f ֆունկցիայի դիֆերենցիալը Δx փոփոխականից կախված, $k=f'(x_0)$ անկյունային գործակցով գծային ֆունկցիա է.

$$df(x_0)(\Delta x)=f'(x_0)\Delta x: \tag{7}$$

Որոշ նկատառումներով օգտակար է գտնել $g(x) = x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը: Ունենք՝

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1:$$

Այդտեղից ստանում ենք՝

$$dg(x_0)(\Delta x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x: \tag{8}$$

Ինչպես տեսնում ենք, ցանկացած x_0 կետում g ֆունկցիայի դիֆերենցիալը $I_{\mathbb{R}}(\Delta x) = \Delta x$ բանաձևով տրվող գծային ֆունկցիան է՝ նույնական արտապատկերումը (n^{o} II. 1.3): Փոխարինելով (8)-ում x_0-ն ցանկացած x-ով և $g(x)$-ի փոխարեն գրելով x՝ կստանանք

$$dx(\Delta x) = \Delta x\ , \qquad \Delta x \in \mathbb{R}\ ,$$

հավասարությունը:

Եթե, այժմ, ստացվածը տեղադրենք (7)-ում և անտեսենք, ինչպես դա հաճախ է արվում, Δx արգումենտը, ապա կհանգենք դիֆերենցիալ հաշվում խիստ կարևոր

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \tag{9}$$

հավասարությանը:

Եթե f-ը $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում դիֆերենցելի է, ապա (9)-ում x_0-ն կարող ենք փոխարինել ցանկացած x-ով.

$$df(x) = f'(x)dx: \tag{10}$$

Այս վերջին բանաձևն օգտակար է նաև գործնական առումով: Հետագայում, ինտեգրալներ հաշվելիս, այն բավական հեշտացնում է այսպես կոչված «մասերով ինտեգրման» և «փոփոխականի փոխարինման» տեխնիկան:

4°. ***Դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայմանը:*** Եթե որևէ կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը գնահատվում է որպես դրական հատկանիշ, որպես ֆունկցիայի լավ որակ, ապա դիֆերենցելիությունը, ինչպես ցույց կտրվի ստորև, որակական առումով ավելին է, քան անընդհատությունը:

Եթե $x_0 \in (a;b)$ կետում $y = f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա այդ կետում f-ը նաև անընդհատ է:

Իսկապես, արտագրելով (6′) հավասարությունը

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \qquad (x\to x_0) \qquad (6'')$$

տեսքով, նկատում ենք, որ երբ $x\to x_0$, հավասարության աջ մասի երկու գումարելին էլ ձգտում են 0-ի: Ուրեմն, ձախ մասն էլ է ձգտում 0-ի: Այդտեղից հետևում է $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ հավասարությունը, որը հենց նշանակում է, որ f -ը x_0 -ում անընդհատ է:

Այսպիսով, տրված կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը այդ կետում դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայման է:

Օրինակով համոզվենք, որ անընդհատությունը դիֆերենցելիության բավարար պայման չէ:

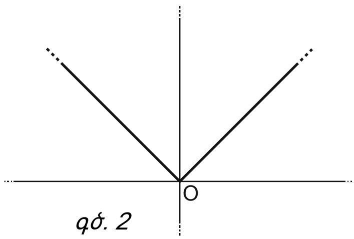
Օրինակ 2: Դիտարկենք $f(x)=|x|$ ֆունկցիան (գծ. 2):

Յանկացած x_0 կետում այս ֆունկցիայի անընդհատությունը բխում է եռանկյան անհավասարությունից ($\text{n}^\text{o}\,\text{I. 2.6}$).

$$|f(x)-f(x_0)|=\big||x|-|x_0|\big|\le|x-x_0|:$$

Ստուգենք, այժմ, որ $x_0=0$ կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ:

Կազմենք աճերի հարաբերությունը.



գծ. 2

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0:\end{cases}$$

Պարզ է, որ 0 կետում աճերի հարաբերության ձախակողմյան սահմանը -1 է, իսկ աջակողմյան սահմանը՝ 1: Իսկ դա նշանակում է ($\text{n}^\text{o}\,\text{IV. 4.5}$), որ աճերի հարաբերությունը 0-ում սահման չունի, ֆունկցիան այդ կետում դիֆերենցելի չէ:

5°. *Գրաֆիկի շոշափող: Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:* *Դիտարկենք $y=f(x)$ $(a<x<b)$ ֆունկցիան:*

Սահմանում 4: *$y=kx+b$ ուղիղը կոչվում է $x_0\in(a;b)$ կետում f ֆունկցիայի գրաֆիկի **շոշափող**, եթե x_0 -ի շրջակայքում f -ը կարելի է ներկայացնել*

$$f(x)=kx+b+o(x-x_0) \qquad (x\to x_0) \qquad (11)$$

տեսքով:

Անցնելով (11)-ի աջ և ձախ մասերում սահմանի, երբ $x\to x_0$՝ կստանանք.

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)=kx_0+b \qquad (12)$$

հավասարությունը: Այս հավասարությունից և (11)-ից հետևում է, որ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{kx+b+o(x-x_0)-(kx_0+b)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{k(x-x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}=k+0=k:$$

Այս վերջինը մի կողմից նշանակում է, որ f -ը x_0 -ում դիֆերենցելի է, իսկ մյուս կողմից՝ որ $f'(x_0)=k$: Տեղադրելով k -ի արժեքը (12)-ում՝ կարող ենք հաշվել նաև b -ն.

$$b=f(x_0)-kx_0=f(x_0)-f'(x_0)x_0:$$

Այնպես որ,

$$kx+b=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0):$$

Այսպիսով, եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի շոշափող, ապա այն x_0 -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ շոշափող ուղիղը տրվում է

$$y=y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (13)$$

հավասարումով:

Դիցուք, այժմ, f -ը x_0 -ում դիֆերենցելի է:

Ձևափոխելով դիֆերենցելի ֆունկցիայի (6′′) ներկայացումը

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \qquad (x\to x_0) \qquad (14)$$

տեսքի և համեմատելով (11)-ի հետ՝ նկատում ենք, որ $y=kx+b=$ $=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ հավասարումով որոշվող ուղիղը, ըստ սահմանում 4-ի, x_0 կետում f ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողն է:

Ամփոփելով՝ հանգում ենք հետևյալին.

որպեսզի x_0 կետում ֆունկցիայի գրաֆիկը ունենա շոշափող, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ֆունկցիան x_0 -ում լինի դիֆերենցելի:

✍ **Դիտողություն:** Տարրական ֆունկցիաների շարքում առավել պարզ կառուցվածք ունեցողը, իհարկե, գծային ֆունկցիան է: Դա հաշվի առնելով, եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա x_0 -ի փոքր շրջակայքում f -ի արժեքները հարմար է մոտարկել շոշափող (գծային) ֆունկցիայի արժեքներով: Այդ դեպքում բացարձակ սխալանքը*, ինչպես ներկայացված է (14) բանաձևում, կլինի $(x-x_0)$-ի նկատմամբ բարձր կարգի անվերջ փոքր:

Օրինակ 3: Գտնենք $\sqrt{4,01}$ -ի մոտավոր արժեքը:

Իհարկե, պարզ մոտարկմամբ՝ $\sqrt{4,01} \approx 2$:

Դժվար չէ ստուգել, որ այս դեպքում բացարձակ սխալանքը՝ $\left|\sqrt{4,01}-2\right|$ -ը, $0,002$ -ից մեծ է.

$$\left|\sqrt{4,01}-2\right| = \frac{0,01}{\sqrt{4,01}+2} > \frac{0,01}{5} = 0,002 :$$

Այժմ համոզվենք, որ շոշափողի միջոցով կարելի է իրականացնել ավելի ճշգրիտ մոտարկում:

Դիտարկենք $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիան: Ընտրելով $x_0=4$՝ կունենանք. $f(x_0)=f(4)=\sqrt{4}=2$: Հաշվենք, այժմ, $f'(x_0)=f'(4)$ -ը.

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}=0,25 :$$

Տեղադրելով (13)-ում $x_0=4$, $x=4,01$, $f(x_0)=2$ և $f'(x_0)=0,25$՝ կստանանք.

$$y(4,01)=2+0,25\cdot(4,01-4)=2,0025 :$$

Արդյունքում՝ $\sqrt{4,01}\approx 2,0025$: Պարզ հաշվարկներով համոզվում ենք, որ $2,0025$ -ը $\sqrt{4,01}$ -ի մոտավոր արժեքն է հավելումով: Ավելին, $2,0024<\sqrt{4,01}<2,0025$ անհավասարությունները ցույց են տալիս նաև, որ մոտարկման բացարձակ սխալանքը 10^{-4} -ը չի գերազանցում.

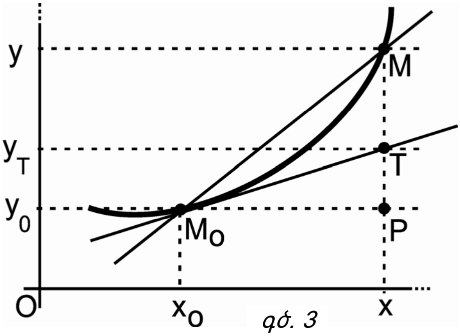
$$\left|\sqrt{4,01}-2,0025\right| < \left|2,0025-2,0024\right| = 0,0001 :$$

Կրկին անդրադառնանք սահմանում 4-ին և փորձենք այն մեկնաբանել երկրաչափորեն:

Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (գծ. 3):

---

* Դիտարկվող մեծության իրական արժեքի և մոտավոր արժեքի տարբերության բացարձակ արժեքը:



գծ. 3

Գրաֆիկին պատկանող $M_0(x_0;\, y_0)$ $\left(y_0 = f(x_0)\right)$ և $M(x;y)$ $(x \neq x_0)$ կետերով անցնող ուղիղն անվանում են գրաֆիկի **հատող**:

Դիցուք P-ն M_0 կետով անցնող հորիզոնական և M կետով անցնող ուղղաձիգ ուղիղների հատման կետն է: Նշանակենք M_0M հատողի անկյունային գործակիցը k_M-ով: Եթե α_M-ը M_0M հատողի Ox-ի նկատմամբ թեքության անկյունն է $\left(\alpha_M = \angle MM_0P\right)$, ապա՝

$$k_M = \operatorname{tg}\alpha_M = \frac{PM}{PM_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}: \tag{15}$$

Այնուհետև, ΔM_0MP-ից գտնում ենք նաև, որ

$$\left|M_0M\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}: \tag{16}$$

Առայժմ ենթադրենք, թե f-ը x_0-ում անընդհատ է. $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta y \to 0$ (n^{o} V. 1.1): Այդ դեպքում, x-ը x_0-ին ձգտելիս M կետը, ինչպես հետևում է (16)-ից, գրաֆիկի երկայնքով անվերջ մոտենում է M_0-ին.

$$\lim_{x\to x_0}\left|MM_0\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0:$$

Եթե դրա արդյունքում M_0M հատողը «ձգտում է» որոշակի սահմանային դիրքի, ապա այդ դիրքում գտնվող ուղիղն անվանում են **գրաֆիկի շոշափող**:

Քանի որ բոլոր դիտարկվող M_0M հատողներն անցնում են միևնույն M_0 կետով (պատկանում են M_0 կենտրոնով ուղիղների փնջին. n^{o} III. 3.8), դրանց սահմանային դիրքը կլինի որոշակի, եթե k_M անկյունային գործակիցն ունի որոշակի վերջավոր կամ անվերջ սահման:

Անվերջ սահմանի դեպքը կքննարկենք հաջորդ կետում: Իսկ վերջավոր սահմանը, ինչպես հետևում է (15) բանաձևից, գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ f -ը x_0 -ում դիֆերենցելի է: Ընդ որում՝ սահմանային ուղղի (շոշափողի) k_T անկյունային գործակցի համար ստացվում է

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} k_M = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

բանաձևը:

Այսպիսով, կարող ենք արձանագրել ածանցյալի երկրաչափական իմաստն արտահայտող հետևյալ փաստը.

տրված x_0 *կետում* f *ֆունկցիայի ածանցյալը գրաֆիկի* $\left(x_0;\, f(x_0)\right)$ *կետով տարված շոշափող ուղղի անկյունային գործակիցն է:*

Այս պայմաններում շոշափողի հավասարումն ընդունում է

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

տեսքը:

Շարունակելով ուսումնասիրել գծ. 3-ը՝ կարող ենք նաև նկատել, որ յուրաքանչյուր x-ի համար, M_0P հատվածին (ավելի ստույգ՝ $x - x_0 = \Delta x$ -ին) PT հատվածը՝ $(y_T - y_0)$ -ն, համապատասխանեցնող արտապատկերումը x_0 կետում f ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է.

$$df(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = k_T(x - x_0) = y_T - y_0 :$$

Ինչ վերաբերում է գծագրի վրա նշված TM հատվածին, ապա այն f ֆունկցիայի աճի (6″) ներկայացման մեջ առկա $o(x - x_0)$ գումարելին է.

$$TM = y - y_T = (y - y_0) - (y_T - y_0) = \Delta f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) =$$
$$= o(x - x_0) :$$

6°. ***Անվերջ ածանցյալներ: Ուղղաձիգ շոշափող:*** Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է:

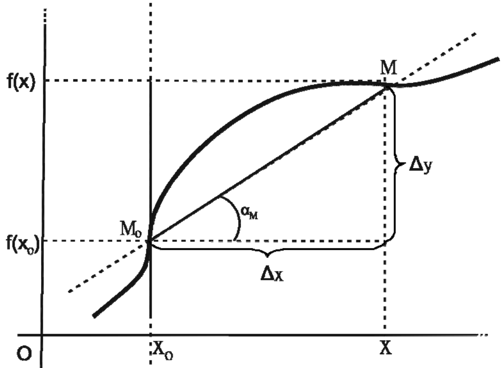
Ասում են, որ f *-ը* x_0 *-ում ունի* ***անվերջ ածանցյալ****, եթե*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty :$$

Այդ դեպքում գրում են. $f'(x_0) = \infty$:

Համանմանորեն սահմանվում են $f'(x_0) = +\infty$ և $f'(x_0) = -\infty$ ածանցյալները:

Մի կողմից պարզ է, որ եթե որևէ կետում ֆունկցիան ունի անվերջ ածանցյալ, ապա այն այդ կետում դիֆերենցելի չէ: Սակայն, անվերջ ածանցյալները հետաքրքրություն են ներկայացնում թեկուզ հենց այնքանով, որ դրանք անմիջականորեն առնչվում են ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղաձիգ շոշափողի գաղափարին:



գծ. 4

Դիցուք՝ $f'(x_0) = +\infty$: Այստեղ էլ, ինչպես և նախորդ կետում, տանենք գրաֆիկի $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$ կետով անցնող M_0M հատող (գծ. 4): Կրկնելով n° 5-ում արված դատողությունները՝ M_0M հատողի k_M անկյունային գործակցի համար կստանանք.

$$\lim_{|M_0M|\to 0} k_M = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = +\infty :$$

Եթե α_M-ը M_0M-ի Ox առանցքի նկատմամբ թեքության անկյունն է, ապա, քանի որ $0 \le \alpha_M < \pi$ (n° III. 3.1), $\operatorname{tg}\alpha_M = k_M \to \infty$ պայմանից հետևում է, որ $\alpha_M \to \pi/2$: Դա նշանակում է, որ երբ M կետը գրաֆիկի երկայնքով անվերջ մոտենում է M_0-ին, M_0M հատողը «ձգտում է» ուղղաձիգ դիրքի: Ուրեմն, համաձայն նախորդ կետում ընդունված սահմանման, ֆունկցիայի գրաֆիկը M_0-ում ունի ուղղաձիգ շոշափող, որը (n° III. 3.3) որոշվում է

$$x - x_0 = 0$$

հավասարումով:

Օրինակ 4: Դիտարկենք $u = \sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան (n° II.3.5, գծ. 19):

Եթե փորձենք հաշվել այս ֆունկցիայի ածանցյալը $x_0 = 0$ կետում, ապա կստանանք.

$$u'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty :$$

Այստեղից հետևում է, որ $x=0$ հավասարումով որոշվող ուղղաձիգ ուղիղը՝ Oy առանցքը, ֆունկցիայի գրաֆիկին $(0;0)$ կետով տարված շոշափողն է:

Նույն գծ. 19-ում պատկերված է նաև դիտարկվող ֆունկցիային հակադարձ՝ $v=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Հաշվենք v-ի ածանցյալը $u(0)=0$ կետում.

$$v'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0^3}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^2=0 :$$

Քանի որ նաև $v(0)=0$, v ֆունկցիայի գրաֆիկին $(0;0)$ կետով տարված շոշափողը որոշվում է

$$y=v(0)+v'(0)(x-0)=0$$

հավասարումով և, հետևաբար, համընկնում է Ox առանցքին:

✍ **Դիտողություն:** Օրինակ 4-ում u և v ֆունկցիաների գրաֆիկներին $(0;0)$ կետով տարված շոշափողները (կոորդինատային առանցքները) $y=x$ ուղղի նկատմամբ միմյանց համաչափ են: Դա պայմանավորված է այն իրողությամբ, որ նույն համաչափությունը առկա է նաև ֆունկցիաների գրաֆիկների միջև: Այդ և նմանատիպ այլ փաստերի ավելի խիստ և ավելի ընդհանուր բնույթի ձևակերպումները տրված են այս գլխի վերջում բերված վարժություն 4-ում[*]:

7°. ***Միակողմանի ածանցյալներ:*** Դիցուք $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ ֆունկցիան $x_0\in(a;b)$ կետում (հատվածի ներքին կետում) անընդհատ է:

*Ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության միակողմանի սահմանները[**] (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում են x_0 կետում **միակողմանի ածանցյալներ** և նշանակվում՝*

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ (ձախակողմյան ածանցյալ),

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ (աջակողմյան ածանցյալ):

---

[*] Տե՛ս n° II. 3.5-ում արված դիտողությունը:

[**] Տե՛ս n° IV. 4.5-ում:

Այստեղ էլ, ինչպես n° IV. 4.5-ում, նկատենք, որ միակողմանի ածանցյալները ինքնուրույն արժեք են ներկայացնում միայն այն դեպքում, երբ դիտարկվող կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ: Ակնհայտ է, որ դիֆերենցելիության պարագայում միակողմանի ածանցյալները երկուսն էլ գոյություն ունեն և հավասար են ֆունկ-ցիայի ածանցյալին. $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$:

Միակողմանի ածանցյալներին համապատասխան սահմանվում են նաև ֆունկցիայի գրաֆիկի **միակողմանի շոշափողներ**: Դրանք որոշվում են

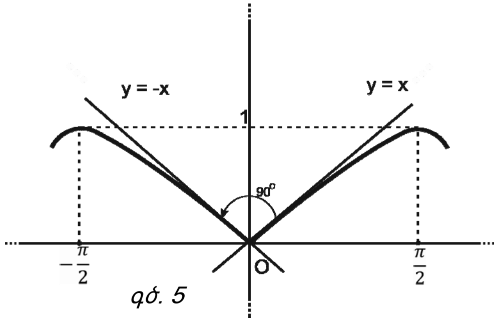
$$y=f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0) \quad \text{(ձախակողմյան շոշափող)}$$

և (17)

$$y=f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0) \quad \text{(աջակողմյան շոշափող)}$$

հավասարումներով:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $y=|\sin x|$ ֆունկցիան (գծ. 5): Հաշվենք այս ֆունկցիայի միակողմանի ածանցյալները $x_0=0$ կետում, ընթացքում համոզվելով, որ այն 0-ում թեև անընդհատ է, բայց դիֆերենցելի չէ:



գծ. 5

Նախ նշենք, որ երբ $-\pi/2<\Delta x<0$, $\sin\Delta x$-ը բացասական է, հետևաբար՝ $|\sin\Delta x|=-\sin\Delta x$: Իսկ երբ $0<\Delta x<\pi/2$՝ $|\sin\Delta x|=\sin\Delta x$: Օգտվելով n° IV. 4.9-ում ստացված I նշանավոր սահմանից՝ կարող ենք գրել՝

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1:$$

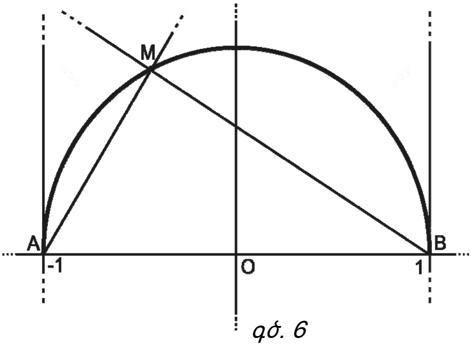
Արդեն իսկ պարզ է, որ $|\sin x|$-ը 0-ում դիֆերենցելի չէ, քանի որ այդ կետում նրա միակողմանի ածանցյալները իրար հավասար չեն:

Միակողմանի շոշափողների (17) հավասարումները այս օրինակում ընդունում են $y=-x$ (ձախակողմյան շոշափող) և $y=x$ (աջակողմյան շո-շափող) տեսքը: Դրանք իրար հետ կազմում են որոշակի, տվյալ դեպքում

90°-ի անկյուն, որի կապակցությամբ ասում են, որ դիտարկվող կետը ֆունկցիայի գրաֆիկի անկյունային կետ է:

☝ **Դիտողություն 1:** Վերադառնալով $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիային, նշենք, որ հատվածի a և b ծայրակետերում կարելի է խոսել միմիայն միակողմանի ածանցյալների մասին. a-ում՝ աջակողմյան, b-ում՝ ձախակողմյան:

Օրինակ 6: $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$ (գծ. 6):



գծ. 6

Բանաձևի երկու կողմը քառակուսի բարձրացնելով, կարող ենք համոզվել, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը միավոր շրջանագծի վերին կիսահարթության մեջ ընկած աղեղն է (կիսաշրջանագիծը):

Հաշվենք ֆունկցիայի ածանցյալը A կետում. $x_0=-1$:

Ունենք.

$$y'(-1)=y'_+(-1)=\lim_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+0}\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}{1+x}=$$

$$=\lim_{x\to-1+0}\sqrt{1-x}\cdot\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}\cdot(+\infty)=+\infty:$$

Ստացվածը նշանակում է, որ կիսաշրջանագծին (նաև շրջանագծին) A կետով տարված շոշափողը ուղղաձիգ է: Դա լիովին համապատասխանում է տարրական երկրաչափությունից հայտնի այն փաստին, որ շրջանագծի որևէ կետով այդ շրջանագծին տարված շոշափողը ուղղահայաց է շոշափման կետը կենտրոնին միացնող շառավղին: Տվյալ դեպքում OA շառավիղն ունի հորիզոնական դիրք, հետևաբար, շոշափողը պետք է լինի ուղղաձիգ:

Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ $y'(1)=-\infty$: Այնպես որ, B կետով տարված շոշափողն էլ է ուղղաձիգ:

☝ **Դիտողություն 2:** Այն փաստը, որ օրինակ 6-ում $y'(-1)=+\infty$, իսկ

$y'(1) = -\infty$, պայմանավորված է հետևյալով. A կետով տարված AM հատողի Ox -ի նկատմամբ թեքության անկյունը սուր է, իսկ BM հատողինը՝ բութ: Դա նշանակում է, որ AM -ի k_{AM} անկյունային գործակիցը դրական է, իսկ BM -ի k_{BM} անկյունային գործակիցը՝ բացասական: Հետևաբար, k_{AM} -ը, որը M -ը A -ին անվերջ մոտենալիս ձգտում է ∞ -ի, կունենա $+\infty$ սահման, իսկ k_{BM} -ը, երբ M -ը անվերջ մոտենում է B -ին՝ $-\infty$ սահման:

§ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑՄԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

1°. ***Թվաբանական գործողություններ:*** Տրված են $y = u(x)$ և $y = v(x)$ $(a < x < b)$ ֆունկցիաները:

Եթե $x_0 \in (a;b)$ կետում u -ն և v -ն դիֆերենցելի են, ապա $u + v$, $u \cdot v$ ֆունկցիաները, իսկ եթե $(a;b)$ -ում $v(x) \neq 0$, ապա նաև u/v ֆունկցիան, x_0 -ում նույնպես դիֆերենցելի են, ընդ որում ՝ ճշմարիտ են ածանցյալի հաշվման (դիֆերենցման) հետևյալ կանոնները.

ա) $(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$;

բ) $(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$;

գ) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0) = \dfrac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - v'(x_0) \cdot u(x_0)}{v^2(x_0)}$:

Ապացուցենք միայն վերջին՝ քանորդի դիֆերենցման կանոնը, մյուս երկուսի ապացուցումը թողնելով ընթերցողին:

➢ Կազմենք աճերի հարաբերությունը և ձևափոխենք այն հետևյալ կերպ.

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{\Delta x} = \frac{u(x_0+\Delta x) \cdot v(x_0) - v(x_0+\Delta x) \cdot u(x_0)}{\Delta x \cdot v(x_0+\Delta x) \cdot v(x_0)} =$$

$$= \frac{(u(x_0+\Delta x) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0)) - (v(x_0+\Delta x) \cdot u(x_0) - v(x_0) \cdot u(x_0))}{\Delta x \cdot v(x_0+\Delta x) \cdot v(x_0)} =$$

$$=\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\times$$

$$\times\frac{u(x_0)}{v(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{u(x_0)}{v(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)}:$$

Քանի որ v-ն, որպես դիֆերենցելի ֆունկցիա, x_0-ում անընդհատ է (n° 1.4), ուստի՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=v(x_0)$:

Այժմ, ձևափոխությունների ներկայացված շղթայի առաջին և վերջին օղակներում անցնելով սահմանի՝ կստանանք.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u/v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\times$$

$$\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}=\frac{u'(x_0)}{v(x_0)}-\frac{u(x_0)\cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-v'(x_0)\cdot u(x_0)}{v^2(x_0)}: \blacktriangleleft$$

2°. ***Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը:*** Մինչ այս կանոնին անցնելը, ներկայացնենք ֆունկցիայի ածանցյալի նշանակման նոր ձևեր, որոնցից հաճախ ենք օգտվելու:

Տրված x_0 կետում f ֆունկցիայի ածանցյալը $f'(x_0)$-ով նշանակելուց բացի, օգտագործում են նաև $\left(f(x)\right)'_{x=x_0}$ նշանակումը: Սա, չնայած համեմատաբար ավելի ծավալուն տեսքին, շատ հարմար է որոշակիորեն տրված $f(x)$ արտահայտության ($y=f(x)$ ֆունկցիայի) ածանցյալը նշանակելիս: Օրինակ. $y=x^3+e^x$ ֆունկցիայի ածանցյալը, ասենք $x_0=2$ կետում, նշանակվում է $\left(x^3+e^x\right)'_{x=2}$-ով:

Այնուհետև, երբ գործ ունենք $y=f(x)$ և $x=\varphi(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ ֆունկցիաների համադրույթի հետ (n° II.1.2), ապա $\dfrac{df}{dx}=f'(x)$ ածանցյալի համար օգտագործվում է նաև y'_x նշանակումը, իսկ համադրույթի $\dfrac{df(\varphi(t))}{dt} = (f(\varphi(t))'$ ածանցյալի համար՝ y'_t նշանակումը:

Բարդ ֆունկցիայի (համադրույթի) դիֆերենցման կանոնը հետևյալն է.

եթե φ-ն դիֆերենցելի է $t_0 \in (\alpha;\beta)$ կետում, իսկ f-ը՝ $x_0 = \varphi(t_0)$ կետում, ապա $y = f\left(\varphi(t)\right)$ բարդ ֆունկցիան t_0-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$\left(f\left(\varphi(t)\right)\right)'_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0): \tag{18}$$

Կանոնի ապացուցումը չենք բերում, քանի որ բարդ է և, բացի այդ, այս դասընթացի շրջանակներում՝ ոչ սկզբունքային:

✍ **Դիտողություն 1:** Օգտագործելով n^{o} 1.2-ում ներկայացված լայբնիցյան նշանակումները, (18) բանաձևին կարող ենք տալ հետևյալ տեսքը.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}: \tag{18$'$}$$

Կատարելով ինդուկցիա՝ (18) կանոնը կարելի է ընդհանրացնել երեք և ավելի ֆունկցիաների համադրույթների համար: Օրինակ, դիցուք $y = f\left(g\left(h(x)\right)\right)$ բարդ ֆունկցիան գոյացել է $y = f(v)$, $v = g(u)$ և $u = h(x)$ ֆունկցիաների համադրումից, ընդ որում՝ h-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում, g-ն՝ $u_0 = h(x_0)$ կետում, իսկ f-ը՝ $v_0 = g(u_0)$ կետում: Ներկայացնելով y-ը որպես $y = f(v)$ և $v = g\left(h(x)\right)$ ֆունկցիաների համադրույթ և երկու անգամ կիրառելով (18) կանոնը, նախ կունենանք, որ

$$\left(g\left(h(x)\right)\right)'_{x=x_0} = g'_u(u_0)\cdot h'(x_0),$$

իսկ այնուհետև, որ

$$\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'_{x=x_0} = f'(v_0)\cdot\left(g\left(h(x)\right)\right)'_{x=x_0} = f'(v_0)\cdot g'(u_0)\cdot h'(x_0)$$

կամ՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}:$$

Վերջին բանաձևին, այս կետի սկզբում մտցված նշանակումնեռով, կարելի է տալ նաև հետևյալ տեսքը.

$$y'_x = y'_v \cdot v'_u \cdot u'_x : \qquad (18'')$$

3°. *Հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցումը:*

Դիցուք $y = f(x)$ $(a < x < b)$ *ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

I. f *-ը փոխմիարժեք է;*

II. $x_0 \in (a;b)$ *կետում* f *-ը դիֆերենցելի է;*

III. $f'(x_0) \neq 0$ *:*

Այդ դեպքում, եթե $x = f^{-1}(y)$ *հակադարձ ֆունկցիան* $y_0 = f(x_0)$ *կետում անընդհատ է, ապա՝*

1) $f^{-1}(y)$ *-ը* y_0 *-ում դիֆերենցելի է;*

2) $$\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} : \qquad (23)$$

➢ Տանք y_0-ին Δy աճ և դիտարկենք դրանով ծնվող $\Delta x = \Delta f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ աճը:

Քանի որ f^{-1}-ը (ինչպես և f -ը) փոխմիարժեք է, ուրեմն՝ $\Delta y \neq 0 \Rightarrow \Delta x \neq 0$: Դա իրավունք է տալիս f^{-1} հակադարձ ֆունկցիայի աճի և նրա արգումենտի աճի հարաբերությունը ներկայացնելու

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x} \qquad (24)$$

տեսքով: Ըստ պայմանի՝ f^{-1}-ը y_0-ում անընդհատ է: Ուրեմն՝ $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$:

Եթե, այժմ, (24)-ում անցնենք սահմանի, երբ $\Delta y \to 0$, ապա, քանի որ դրա արդյունքում Δx -ը նույնպես կձգտի 0-ի, ընդ որում՝ $f'(x_0) \neq 0$, կստանանք թե՛ f^{-1} ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը, թե՛ պահանջվող (23) հավասարությունը: ≺

☝ **Դիտողություն:** Եթե նախապես հայտնի լիներ, որ f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան y_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա կարող էինք գրել n° II. 1.3-ի վերջում բերված $f^{-1}\left(f(x)\right)\equiv x$ նույնությունը, այնուհետև, հաշվի առնելով, որ ցանկացած կետում $y=x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է 1-ի և կիրառելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման նախորդ կետում ապացուցված կանոնը, ստանալ.

$$1=\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'_{x=x_0}=\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0}\cdot f'(x_0):$$

Այդտեղից, ինչպես տեսնում ենք, իսկույն կհետևեր (23) հավասարությունը:

4°. ***Պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի դիֆերենցումը:*** Դիտարկենք $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ պարամետրական հավասարումների զույգը (n° III. 2.3):

Դիցուք $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան $(\alpha;\beta)$ միջակայքում անընդհատ է և խիստ մոնոտոն: Այդ դեպքում, համաձայն n° V. 3.3-ում բերված թեորեմների, φ-ն հակադարձելի է, նրա արժեքների տիրույթը որոշակի $(a;b)$ միջակայք է, որի վրա որոշված $t=\varphi^{-1}(x)$ հակադարձ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է:

Փոխարինելով $y=\psi(t)$ ֆունկցիայի արգումենտը (պարամետրը) $t=\varphi^{-1}(x)$-ով, ստանում են $(\alpha;\beta)$ միջակայքում որոշված $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ համադրույթը, որն անվանում են $x=\varphi(t)$ և $y=\psi(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիա:

Եթե պարամետրի $t_0\in(\alpha;\beta)$ արժեքի դեպքում φ և ψ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են և $\varphi'(t_0)\neq 0$, ապա $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ ֆունկցիան $x_0=\varphi(t_0)$ կետում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$\left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)'_{x=x_0}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)},\quad \text{կամ, ավելի սեղմ,}\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}:$$

➢ Նախ նկատենք, որ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցման համար պահանջվող, նախորդ կետում թվարկված բոլոր պայմաններին բավարարում է: Հետևաբար, $t=\varphi^{-1}(x)$-ն x_0-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում, համաձայն (23) կանոնի,

$$\left(\varphi^{-1}(x)\right)'_{x=x_0}=\frac{1}{\varphi'(t_0)}:$$

Այնուհետև, քանի որ $\psi(t)$-ն $t_0=\varphi^{-1}(x_0)$ կետում նույնպես դիֆերենցելի է, ուրեմն գործում է նաև բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման (18) կանոնը: Այնպես որ, կարող ենք գրել.

$$\left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)'_{x=x_0}=\psi'_t(t_0)\cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)'_{x=x_0}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}:\prec$$

§ 3. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ

1°. ***Հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:*** Այստեղ ցույց կտրվի, որ հիմնական տարրական ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը իր որոշման տիրույթի բոլոր ներքին կետերում դիֆերենցելի է: Դա հաշվի առնելով՝ կետը, որում կատարվելու է դիֆերենցումը, կնշանակենք ցանկացած x-ով (այլ ոչ թե որոշակի x_0-ով): Ընդսմին, որպես սահմանային անցումն իրականացնող փոփոխական հանդես կգա Δx-ը:

I. Սկսենք ամենապարզ՝ հաստատուն ֆունկցիայից.

$y=C=const$:

Քանի որ ցանկացած x-ի և ցանկացած Δx-ի համար $y(x)=y(x+\Delta x)=C$, ուրեմն՝

$$y'=(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0:$$

Այսպիսով, *հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը ցանկացած x կետում գոյություն ունի և հավասար է 0-ի:*

Հետևանք 1: *Հաստատուն գործակիցը կարելի է ածանցյալի նշանի տակից դուրս բերել.*

$$\left(Cg(x)\right)'=C\cdot g'(x):$$

➢ Համաձայն n^o 2.1-ում ձևակերպված բ) կանոնի՝

$$\left(Cg(x)\right)' = (C)' \cdot g(x) + C \cdot g'(x) = 0 \cdot g(x) + C \cdot g'(x) = C \cdot g'(x) : \prec$$

Հետևանք 2: *Ֆունկցիաների տարբերության ածանցյալը հավասար է դրանց ածանցյալների տարբերությանը.*

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x) :$$

➢ Օգտվենք n^{o} 2.1-ի ա) կանոնից և հետևանք 1-ից.

$$(u(x) - v(x))' = (u(x) + (-1)v(x))' = u'(x) + ((-1) \cdot v(x))' =$$

$$= u'(x) + (-1) \cdot v'(x) = u'(x) - v'(x) : \prec$$

II. Այժմ դիտարկենք $y = x^p \quad (0 < x < +\infty)$ աստիճանային ֆունկցիան:

Այս ֆունկցիան դիֆերենցելիս օգտվելու ենք n^{o} IV. 4.9-ում ստացված հետևյալ նշանավոր սահմանից.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^p - 1}{\alpha} = p :$$

Ունենք՝

$$(x^p)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^p - x^p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^p\left(\left(1 + \Delta x/x\right)^p - 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= x^{p-1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \Delta x/x\right)^p - 1}{\Delta x/x} = px^{p-1} :$$

Մասնավորապես, երբ $p = \dfrac{1}{2}$, ստանում ենք.

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} :$$

Այն դեպքում, երբ $p > 0$, աստիճանային ֆունկցիան որոշված է նաև $x = 0$ կետում. $0^p = 0 \ (p > 0)$: Ելնելով ածանցյալի սահմանումից՝ կստանանք.

$$(x^p)'_{x=0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^p - 0^p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} (\Delta x)^{p-1} = \begin{cases} 0, & p > 1, \\ +\infty, & 0 < p < 1 : \end{cases}$$

Փաստորեն, $0 < p < 1$ դեպքում ֆունկցիան $x = 0$ կետում ունի անվերջ (աջակողմյան) ածանցյալ:

III. Ցուցչային ֆունկցիայի դիտարկումը սկսենք $y = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ մասնավոր դեպքից: Օգտվելով n° IV. 4.9-ի

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$$

նշանավոր սահմանից՝ կարող ենք գրել.

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x :$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ գործ ունենք $y = a^x$ ֆունկցիայի հետ, այն ներկայացնում ենք $a^x = e^{x \ln a}$ տեսքով և դիտարկում որպես $y = e^u$ և $u = x \ln a$ ֆունկցիաների համադրույթ: Կիրառելով համադրույթի դիֆերենցման (18) կանոնը և հաշվի առնելով, որ $(e^u)'_u = e^u = e^{x \ln a} = a^x$, $u'_x = (x \ln a)' = (x)' \cdot \ln a = \ln a$, ստանում ենք.

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = (e^u)'_u \cdot u'_x = a^x \ln a : \tag{25}$$

IV. $y = \log_a x \quad (x > 0)$ լոգարիթմական ֆունկցիան դիֆերենցենք երկու եղանակով:

ա) Այն դեպքում երբ լոգարիթմի հիմքը e-ն է՝ $y = \ln x$, կարող ենք օգտվել n° IV. 4.9-ի

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

նշանավոր սահմանից.

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \dfrac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} \right) = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} :$$

Ընդհանուր դեպքում կարելի է օգտվել լոգարիթմի մի հիմքից մեկ այլ հիմքի անցման բանաձևից և գրել.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}:$$

բ) Երկրորդ եղանակը հետևյալն է. $y=\log_a x$ ֆունկցիան դիտարկում ենք որպես $x=a^y$ ֆունկցիայի հակադարձ, կիրառում ենք հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցման (23) կանոնը և օգտվում ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալի համար ստացված (25) բանաձևից.

$$(\log_a x)'_x = \frac{1}{(a^y)'_y} = \frac{1}{a^y\ln a} = \frac{1}{x\ln a}:$$

☝ **Դիտողություն 1:** Ուշագրավ է այն փաստը, որ ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների ածանցյալները համեմատաբար ավելի պարզ տեսք ունեն այն դեպքում, երբ դրանց հիմքը e-ն է: Ավելին, e^x-ը մյուս ֆունկցիաների շարքում առանձնանում է նաև նրանով, որ ածանցյալը ճիշտ և ճիշտ համընկնում է ելակետային (նախնական) ֆունկցիային. $(e^x)'=e^x$: Այդքանն իսկ բավական է, որպեսզի ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները դիտարկելիս նախապատվությունը տրվի հենց e հիմքին: Այս մասին, ի դեպ, n° IV. 3.2-ում արդեն ակնարկել ենք:

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների հաշվումը հիմնվում է n° IV. 4.9-ի

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

նշանավոր սահմանի վրա:

Սկսենք $y=\sin x$ և $y=\cos x$ ֆունկցիաներից.

V. $$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x:$$

VI. $(\cos x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x :$$

Նույն եղանակով կարելի է հաշվել նաև տանգենսի և կոտանգենսի ածանցյալները: Սակայն, էլ ավելի հարմար է ելնել $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ներկայացումներից և կիրառել քանորդի դիֆերենցման n° 2.1-ում ձևակերպված կանոնը: Վերջնական արդյունքին հասնում ենք՝ օգտագործելով սինուսի և կոսինուսի ածանցյալների համար հենց նոր ստացված բանաձևերը:

Եվ այսպես՝

VII. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} :$$

VIII. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} :$

Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվում են հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցման (23) կանոնով:

IX. $y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$:

Այս ֆունկցիան $x = \sin y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ ֆունկցիայի հակադարձն է: Ցանկացած $x \in (-1;1)$ կետում՝

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} :$$

Նկատենք, որ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, այնպես որ՝ $\cos y > 0$ և, հետևաբար, $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$ ։

X. $y = \arccos x$ ֆունկցիան կարելի է դիֆերենցել՝ ելնելով $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ բանաձևից: Բավական է օգտվել հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալի համար I-ում ստացված արդյունքից և դրանից բխող հետևանք 2-ից.

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)' - \left(\arcsin x\right)' =$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ։}$$

☝ Դիտողություն 2: Արկսինուսի և արկկոսինուսի ածանցյալների բանաձևերը $x = \pm 1$ կետերում կորցնում են իրենց իմաստը: Ընթերցողը կարող է ինքնուրույն համոզվել, որ այդ կետերում նշված ֆունկցիաներն ունեն անվերջ ածանցյալ: Հենց դրանով էլ պայմանավորված է այն երևույթը, որ նկատում ենք n° II. 3.7-ում պատկերված գծ. 25-ն ու գծ. 26-ը ուսումնասիրելիս: Ներկայացված երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներն էլ $x = \pm 1$ կետերում ունեն ուղղաձիգ շոշափողներ:

XI. $y = \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$ ֆունկցիան $x = \operatorname{tg} y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ ֆունկցիայի հակադարձն է: Օգտվելով տանգենսի ածանցյալի բանաձևից՝ ստանում ենք.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \text{ ։}$$

XII. $y = \operatorname{arcctg} x$ ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելու համար օգտվում ենք կոտանգենսի ածանցյալի բանաձևից.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ ։}$$

Ամփոփելով ստացված **I-XII** բանաձևերը՝ կարող ենք կազմել հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների հետևյալ աղյուսակը.

I. $(C)' = 0$;

II. $(x^p)' = px^{p-1}$; **II.*** $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

III. $(a^x)' = a^x \ln a$; **III.*** $(e^x)' = e^x$;

IV. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; **IV.*** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

V. $(\sin x)' = \cos x$; **VI.** $(\cos x)' = -\sin x$;

VII. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; **VIII.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

IX. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **X.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; **XII.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$:

Աղյուսակի երկրորդ, երրորդ և չորրորդ հորիզոնականներում գրված **II*, III*** և **IV*** մասնավոր բանաձևերը գործնականում շատ ավելի հաճախ են պետք գալիս, քան դրանց ընդհանրացումները: Դա է պատճառը, որ այդ բանաձևերին աղյուսակում առանձին տեղ է հատկացված:

2°. ***Դիֆերենցման կանոնների կիրառման օրինակներ:*** Անցնենք նախորդ պարագրաֆում մշակված դիֆերենցման տեխնիկայի փորձարկմանը: Դիտարկվող բոլոր օրինակներում օգտվելու ենք ածանցյալների աղյուսակից՝ առանց համապատասխան հղումներ կատարելու:

1) Գտնենք $y = x^3(2^x + 2^5)$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

Ֆունկցիան, ինչպես տեսնում ենք, իրենից ներկայացնում է $u(x) = x^3$ և $v(x) = 2^x + 2^5$ ֆունկցիաների արտադրյալ: Ուրեմն, առաջին հերթին պետք է օգտվել արտադրյալի դիֆերենցման կանոնից (n° 2.1, բ).

$$y' = (x^3)' \cdot (2^x + 2^5) + x^3 \cdot (2^x + 2^5)' :$$

Հաջորդ քայլում, $(2^x+2^5)'$-ը գտնելու համար, կիրառում ենք գումարի դիֆերենցման կանոնը (n^o 2.1, ա).

$(2^x+2^5)'=(2^x)'+(2^5)'=2^x\ln 2+0=2^x\ln 2$:

Արդյունքում՝ $y'=3x^2\cdot(2^x+2^5)+x^3 2^x\ln 2$:

Անցնենք հաջորդ օրինակին:

2) $y=\dfrac{e^{x^2}}{2+\cos 3x}$:

Նախ կիրառենք քանորդի դիֆերենցման կանոնը.

$$y'=\left(\frac{e^{x^2}}{2+\cos 3x}\right)'=\frac{\left(e^{x^2}\right)'\cdot(2+\cos 3x)-e^{x^2}\cdot(2+\cos 3x)'}{(2+\cos 3x)^2}:$$

Այժմ գտնենք $\left(e^{x^2}\right)'$-ը և $(2+\cos 3x)'$-ը:

Ներկայացնելով $v=e^{x^2}$ ֆունկցիան որպես $v=e^u$ և $u=x^2$ ֆունկցիաների համադրույթ՝ գտնում ենք.

$\left(e^{x^2}\right)'=v'_u\cdot u'_x==(e^u)'_u\cdot(x^2)'_x=2xe^{x^2}$:

Քանի որ $(2+\cos 3x)'=(2)'+(\cos 3x)'=(\cos 3x)'$, մնում է գտնել $w=\cos 3x$ բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Այն $w=\cos u$ և $u=3x$ ֆունկցիաների համադրույթն է, այնպես որ՝

$w'_x=(\cos u)'_u\cdot u'_x=-\sin u\cdot(3x)'=-3\sin 3x$:

Արդյունքում՝

$$y'=\frac{2xe^{x^2}\cdot(2+\cos 3x)+3e^{x^2}\cdot\sin 3x}{(2+\cos 3x)^2}:$$

3) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$: Անմիջապես բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման կանոնը կիրառելու փոխարեն կարող ենք, օգտվելով լոգարիթմի հատկություններից (n^o II. 3.6), ֆունկցիան ձևափոխել դիֆերենցման համար ավելի նպաստավոր տեսքի.

$$y=\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{1}{4}\left(\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)\right):$$

Այժմ հեշտությամբ գտնում ենք.

$$y'=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)'-\frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)'\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{1-x^2}\right)=\frac{x}{1-x^4}:$$

4) $y=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}$: Այս օրինակում էլ, ինչպես և նախորդում, եթե անմիջապես անցնենք դիֆերենցման կանոնների կիրառմանը, ապա ստիպված կլինենք գործ ունենալ բարդ և ծավալուն արտահայտությունների հետ: Նկատելով, որ լոգարիթմի առկայությունը այստեղ էլ կարող էր էապես հեշտացնել դիֆերենցումը՝ ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան. $w(x)=\ln y(x)$

Մի կողմից ունենք՝

$$w'(x)=\left(\ln\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\right)'=\left(\ln(x-1)+2\ln(x-2)-3\ln(x-3)\right)'=$$

$$=\frac{(x-1)'}{x-1}+2\frac{(x-2)'}{x-2}-3\frac{(x-3)'}{x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}:$$

Մյուս կողմից՝

$$w'(x)=(\ln y(x))'=\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)^{*},$$

որտեղից վերջնականապես ստանում ենք՝

$$y'(x)=y(x)\cdot w'(x)=\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right):$$

5) Դիտարկենք $g(x)=x^2\ \ (x\le 1)$ և $h(x)=-x^2+4x-2\ \ (x>1)$ ֆունկցիաների միավորումը.

$$y=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty;1],\\ -x^2+4x-2, & x\in(1;+\infty): \end{cases}$$

---

* Գրականության մեջ հաճախ $(\ln y(x))'$-ն անվանում են $y(x)$ ֆունկցիայի **լոգարիթմական ածանցյալ**:

Նախ նկատենք, որ $(-\infty;1)$ բաց միջակայքում $y=x^2$ և, ուրեմն, $y'=(x^2)'=2x$, իսկ $(1;+\infty)$ միջակայքում՝

$$y'=(-x^2+4x-2)'=-2x+4:$$

Մնում է հետազոտել ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $x=1$ կետում: Քանի որ այդ կետի ցանկացած շրջակայքի ձախ և աջ կողմերում ֆունկցիան տրված է տարբեր բանաձևերով, ո՛չ դիֆերենցման կանոնների կիրառմամբ, ո՛չ էլ ածանցյալների աղյուսակից օգտվելով $y'(1)$ -ը չենք կարող գտնել:

Հաշվենք ֆունկցիայի միակողմանի ածանցյալները (n^{o} 1.7).

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}(x+1)=2\,,$$

$$y'_+(1)=\lim_{x\to1+0}\frac{(-x^2+4x-2)-1}{x-1}=-\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=2:$$

Ինչպես տեսնում ենք, $x=1$ կետում միակողմանի ածանցյալները գոյություն ունեն, վերջավոր են և իրար հավասար: Հետևաբար, y -ը այդ կետում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $y'(1)=y'_-(1)=y'_+(1)=2$:

Այսպիսով՝

$$y'=\begin{cases}2x, & x\le1,\\ -2x+4, & x>1:\end{cases}$$

6) $y=x\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$:

Երբ $x>0$՝ $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$, $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$:

Երբ $x<0$՝ $y=x\sqrt{-x}=-(-x)\sqrt{-x}=-(-x)^{\frac{3}{2}}$,

$$y'=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(-x)'=\frac{3\sqrt{-x}}{2}:$$

Վերջապես, երբ $x=0$՝

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\sqrt{|\Delta x|}=0:$$

Միավորելով ստացված արդյունքները մեկ ընդհանուր բանաձևում՝ կարող ենք գրել՝

$$y' = \frac{3\sqrt{|x|}}{2}:$$

Նկատենք, որ ինչպես $|x|$-ը (n^o 1.4, օրինակ 2), այնպես էլ $\sqrt{|x|}$-ը* $x = 0$ կետում դիֆերենցելի չեն, մինչդեռ $x\sqrt{|x|}$ ֆունկցիան նույն այդ կետում դիֆերենցելի է:

Հաջորդ վարժությունը վերաբերում է պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի դիֆերենցմանը:

7) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \pi$:

Այս հավասարումներով որոշվող կորը** $(0;0)$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագծի վերին կիսահարթության մեջ ընկած աղեղն է (կիսաշրջանագիծը):

Քանի որ $x = a\cos t$ ֆունկցիան $[0;\pi]$-ում փոխմիարժեք է, ընդ որում՝ ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը $[-a;a]$ հատվածն է, ուրեմն նշված պարամետրական հավասարումներով տրված է $y = y(x)$ ֆունկցիա (n^o 2.4), որի որոշման տիրույթը $[-a;a]$ հատվածն է, իսկ գրաֆիկը՝ վերը հիշատակված կիսաշրջանագիծը:

Հաշվենք այդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ օգտվելով n^o 2.4-ում ստացված բանաձևից.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t:$$

☝ **Դիտողություն 2:** Ինչպես տեսնում ենք, պարամետրի 0 և π արժեքների դեպքում ֆունկցիայի ածանցյալը՝ $-\operatorname{ctg} t$-ն, դառնում է անվերջ մեծ: Դա լիովին համապատասխանում է այն իրողությանը, որ կիսաշրջանագծի ծայրակետերով տարված շոշափողներն ունեն ուղղաձիգ դիրք (n^o 1.7, գծ. 6):

Ուշագրավ է նաև հետևյալ դիտարկումը. կիսաշրջանագծի կենտրոնը $(a\cos t; a\sin t)$ կետին միացնող շառավիղը Ox առանցքի նկատմամբ

---

* Եթե $\sqrt{|x|}$-ը լիներ դիֆերենցելի, ապա $|x| = \sqrt{|x|}^2$-ն, համաձայն n^o 2.1-ի բ) կանոնի, պետք է նույնպես լիներ դիֆերենցելի, որը, սակայն, այդպես չէ:

** Տե՛ս n^o III. 2.3-ի օրինակ 5-ը:

թեքված է t ռադիան անկյան տակ: Դա նշանակում է, որ այդ շառավիղը պարունակող ուղղի անկյունային գործակիցը $\mathrm{tg}\,t$-ն է: Այժմ, եթե հիշենք n^{o} 1.5-ում ածանցյալին տրված երկրաչափական մեկնաբանությունը, ինչպես նաև ուղիղների ուղղահայացության պայմանը (n^{o} III. 3.6), կարող ենք նկատել, որ $\mathrm{tg}\,t\cdot(-\mathrm{ctg}\,t)\equiv -1$ նույնությունը ուղղակի հաստատումն է դպրոցական երկրաչափությունից հայտնի այն փաստի, որ շրջանագծի ցանկացած կետով տարված շառավիղն ու շոշափողը փոխուղղահայաց են:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ցույց տալ, որ ցանկացած x_0 կետում $g(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիայի դիֆերենցիալը տրվում է $dg(x_0)(\Delta x)=k\Delta x$ բանաձևով:

2. Ստուգել, որ ուղղին նրա ցանկացած կետով տարված շոշափողը նույն այդ ուղիղն է:

3. ա) Ցույց տալ, որ $y=ax^2$ պարաբոլին նրա $(x_0;y_0)$ կետով շոշափող տանելու համար բավական է քանոնի միջոցով այդ կետը միացնել Ox առանցքի $\dfrac{x_0}{2}$ կետին:

բ) Առաջարկել նույնպիսի մի հնարք, $y=ax^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկին շոշափող տանելու համար:

4. Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան հակադարձելի է և $y_0=f(x_0)$:

ա) Ապացուցել, որ եթե f-ը x_0-ում և f^{-1}-ը y_0-ում դիֆերենցելի են, ապա f^{-1} հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկին $(y_0;x_0)$ կետով տարված շոշափողը f ֆունկցիայի գրաֆիկին $(x_0;y_0)$ կետով տարված շոշափողի հայելային պատկերն է $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

բ) Ցույց տալ, որ եթե $f'(x_0)=0$ և f^{-1}-ը y_0-ում անընդհատ է, ապա f^{-1} ֆունկցիայի գրաֆիկը $(y_0;x_0)$ կետում ունի ուղղաձիգ շոշափող:

5. Ստուգել, որ եթե f-ը զույգ ֆունկցիա է և $x=0$ կետում դիֆերենցելի, ապա $f'(0)=0$:

6. Ապացուցել, որ զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ ֆունկցիա է, իսկ կենտ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ զույգ:

Ցուցում: Դիֆերենցել n^{o} II. 2.3-ի սահմանում 5-ում գրված նույնությունները, հաշվի առնելով, որ $f(-x)$-ը $y=f(t)$ և $t=-x$ ֆունկցիաների համադրույթն է:

7. Ստուգել, որ $\left(\ln|x|\right)' = 1/x$, $x \neq 0$:

Ցուցում: Նկատել, որ $\ln|x| = \ln(-x)$, երբ $x < 0$ և օգտվել նախորդ վարժության համար տրված ցուցումից:

8. «Հիպերբոլական» ֆունկցիաները սահմանվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{(հիպերբոլական կոսինուս)},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{(հիպերբոլական սինուս)}:$$

ա) Ապացուցել նույնությունները.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x; \qquad 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x:$$

բ) Ցույց տալ, որ $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$ պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորը n$^{\text{o}}$ III. 4.3-ում պատկերված հիպերբոլի աջ կիսահարթության մեջ ընկած ճյուղն է (այստեղից էլ վերը սահմանված ֆունկցիաների «հիպերբոլական» անվանումը):

գ) Ստուգել, որ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$:

9. Դիցուք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են և $u(x) > 0$:

ա) Ցույց տալ, որ $y = u(x)^{v(x)}$ «աստիճանացուցչային» ֆունկցիայի ածանցյալը տրվում է

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

բանաձևով:

Ցուցում: Ներկայացնել ֆունկցիան $y = e^{v(x)\ln u(x)}$ տեսքով և օգտվել բարդ ֆունկցիայի ու արտադրյալի դիֆերենցման կանոններից:

բ) Գտնել x^x $(x > 0)$, $x^{\sin x}$ $(x > 0)$ և $(\sin x)^x$ $(0 < x < \pi)$ ֆունկցիաների ածանցյալները:

10. Դիցուք f և g ֆունկցիաները X միջակայքում դիֆերենցելի են: Ճշմարիտ է՞ արդյոք, որ եթե X-ում ամենուրեք $f(x) \leq g(x)$, ապա $f'(x) \leq g'(x)$:

Բերել համապատասխան օրինակ:

11. Հաշվել գումարը.

$$S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}:$$

Ցուցում: Նկատել, որ $S_n(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)'$ և օգտվել երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից:

12. Տրված է՝ $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$:

Ապացուցել, որ եթե $\left|f(x)\right| \le \left|\sin x\right|$, $x \in \mathbb{R}$, ապա $\left|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n\right| \le 1$:

Ցուցում: Ստուգել, որ $f(0) = 0$, $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$: Այնուհետև, ելնելով ածանցյալի սահմանումից, գրել, որ $\left|f'(0)\right| = \lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ և օգտվել խնդրի պայմանից:

ԳԼՈՒԽ VII

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

§ 1. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՃԵՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

1°. ***Ֆերմայի[*] լեմման:*** Մինչ լեմման ձևակերպելը սահմանենք դրա համար անհրաժեշտ մի գաղափար:

Դիցուք X-ը թվային բազմություն է:

Սահմանում: *x_0 կետը կոչվում է X բազմության* ***ներքին կետ,*** *եթե գոյություն ունի x_0-ի շրջակայք, որն ամբողջությամբ ընկած է X-ում.* $\exists\delta>0\{(x_0-\delta;\, x_0+\delta)\subset X\}$:

Հեշտ է տեսնել, որ այն դեպքում, երբ X-ը միջակայք է (բաց, փակ, կիսաբաց, վերջավոր կամ անվերջ), նրա բոլոր կետերը, բացառությամբ ծայրակետերի, ներքին կետեր են: Ինչ վերաբերում է a և b ծայրակետերին, որոնք, ի դեպ, անվանում են նաև միջակայքի **եզրային կետեր**, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի ցանկացած շրջակայքը միայն «կիսով չափ» է ընկած $(a;b)$-ում:

Կարևոր է նկատել, որ որոշման տիրույթի ներքին կետում կարելի է խոսել ֆունկցիայի և՛ ձախակողմյան սահմանի մասին, և՛ աջակողմյան:

Այժմ անցնենք լեմմային:

Տրված է $y=f(x)$, $x\in X$, ֆունկցիան:

Լեմմա (Ֆերմա)*: Եթե X բազմության x_0 ներքին կետում f-ը ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք և այդ կետում ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա՝ $f'(x_0)=0$:*

Ապացույց: ➢ Որոշակիության համար ենթադրենք, թե $f(x_0)=\max f$: Նախ, քանի որ x_0-ն ներքին կետ է, գոյություն կունենա $\delta>0$, այնպիսին, որ $(x_0-\delta;\, x_0+\delta)\subset X$:

---

[*] **Պիեռ Ֆերմա** (1601-1665), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Այնուհետև, քանի որ x_0-ում ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն արժեք, ուրեմն նշված շրջակայքում, ինչպես և X-ի բոլոր կետերում,

$f(x) \le f(x_0)$: (1)

Տանք x_0-ին $x - x_0 = \Delta x$ $(|\Delta x| < \delta)$ աճ և կազմենք ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}: \quad (2)$$

Այժմ նկատենք, որ (2)-ում գրված կոտորակի համարիչը, համաձայն (1)-ի, պահպանում է նշանը. $\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0$: Ինչ վերաբերում է հայտարարին, ապա այն x_0-ի ձախ $(x < x_0)$ և աջ $(x > x_0)$ կողմերում ունի տարբեր նշանի արժեքներ. այնպես որ՝

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0:$$

Հաշվի առնելով, որ f-ը x_0-ում դիֆերենցելի է և ելնելով վերջին անհավասարություններից, մի կողմից ստանում ենք՝

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0,$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0:$$

Բայց այս երկուսը համատեղելի են միայն այն դեպքում, երբ $f'(x_0) = 0$:⋖

Լեմման ապացուցվեց:

Բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ լեմմայում ներկայացված պայմանները էական են:

Օրինակ 1: $y = |x|$, $-2 \le x \le 1$: Հեշտ է տեսնել, որ $\max y = |-2| = 2$, $\min y = |0| = 0$: Ընդ որում, -2-ը որոշման տիրույթի եզրային կետ է, իսկ 0-ն՝ ներքին:

Այն փաստը, որ $y'(-2) = (|x|)'_{x=-2} = (-x)'_{x=-2} = -1 \ne 0$, հաստատում է, որ լեմմայում x_0-ի ներքին կետ լինելու պայմանը էական է: Բայց $x=0$ կետում էլ, չնայած այն ներքին կետ է, դարձյալ չենք կարող ասել, թե ածանցյալը հավասար է 0-ի, քանի որ, ինչպես բազմիցս ենք կրկնել, $|x|$-ը այդ կետում ուղղակի դիֆերենցելի չէ: Այնպես որ, ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմանը նույնպես էական է:

2°. *Ռոլի[*] թեորեմը:*

Թեորեմ (Ռոլ): *Եթե* $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ ֆունկցիան

I. $[a;b]$ *հատվածում անընդհատ է;*

II. հատվածի բոլոր ներքին կետերում դիֆերենցելի է;

III. հատվածի ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ՝ $f(a)=f(b)$,

ապա $(a;b)$ *բաց միջակայքում գոյություն ունի* c *կետ, որտեղ՝* $f'(c)=0$:

Ապացույց: ➢ Թեորեմի I պայմանից և Վայերշտրասի թեորեմից (n° V. 2.3, թեորեմ 4) հետևում է, որ $[a;b]$-ում ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ.

$\exists x_1, x_2 \in[a;b]\{f(x_1)=\max f, f(x_2)=\min f\}$:

Եթե, x_1 և x_2 կետերը երկուսն էլ համընկնում են հատվածի ծայրակետերին, ապա, ըստ III պայմանի, $\max f=\min f$: Բայց դա նշանակում է, որ ֆունկցիան $[a;b]$-ի վրա հաստատուն է: Քանի որ հաստատուն ֆունկցիայի ածանցյալը բոլոր կետերում զրո է (n° VI.3.1), ուրեմն, որպես թեորեմում պահանջվող c կարող ենք ընտրել $(a;b)$ միջակայքի ցանկացած կետ:

Իսկ այն դեպքում, երբ x_1 և x_2 կետերից առնվազն մեկը, ասենք x_1-ը, հատվածի ներքին կետ է, ապա, քանի որ x_1-ում ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն արժեք և, ըստ II պայմանի, f-ը այդ կետում դիֆերենցելի է, կարող ենք, ելնելով Ֆերմայի լեմմայից, եզրակացնել, որ $f'(x_1)=0$:≺

Թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտարկենք թեորեմի պայմանների կարևորությունը ցուցադրող երկու օրինակ:

Օրինակ 2: $[0;1]$ հատվածի վրա որոշված:

---

[*] **Միշել Ռոլ** (1652-1719), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$$y=\begin{cases}1, & x=0,\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$$

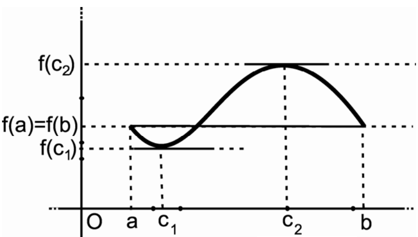
ֆունկցիան թեորեմի II և III պայմաններին բավարարում է, սակայն ֆունկցիայի ածանցյալը ոչ մի կետում հավասար չէ 0-ի: Պատճառը I պայմանի բացակայությունն է՝ ֆունկցիան $x=0$ կետում խզվող է:

Եթե 0-ում խզումը վերացնենք, ընդունելով՝ $y(0)=0$, ապա թեորեմի I և II պայմանները բավարարված կլինեն, բայց, քանի որ հատվածի ներքին կետերում թե՛ ֆունկցիան և թե՛ դրա ածանցյալը կմնան նույնը, դարձյալ թեորեմում պահանջվող c կետը գոյություն չի ունենա: Պատճառն, այս անգամ, կլինի այն, որ խզումը վերացնելիս խախտվել է թեորեմի III պայմանը. $y(0)=0\neq 1=y(1)$:

Օրինակ 3: $y=|x|$, $-1\le x\le 1$: Ֆունկցիան անընդհատ է, հատվածի ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ $(|-1|=|1|)$, բայց ածանցյալը ոչ մի կետում 0-ի հավասար չէ.

$$y'=(|x|)'=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0:\end{cases}$$

Այստեղ, արդեն, պատճառը II պայմանի բացակայությունն է. $|x|$-ը 0-ում դիֆերենցելի չէ:



գծ. 1

Ռոլի թեորեմն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն:

Ֆունկցիայի գրաֆիկի $(a;f(a))$ և $(b;f(b))$ ծայրերով անցնող ուղիղը, շնորհիվ III պայմանի, հորիզոնական է (գծ. 1): Մյուս կողմից, $f'(c)=0$ հավասարությունից հետևում է, որ $(c;f(c))$ կետով գրաֆիկին տարված շոշափողը նույնպես հորիզոնական է: Փաստորեն, ստացվում է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կա կետ*, որով գրաֆիկին տարված շոշափողը զուգահեռ է գրաֆիկի ծայրերը միացնող լարին:

Հետաքրքիր է նաև թեորեմի ֆիզիկական մեկնաբանությունը:

Դիցուք մասնիկի ուղղագիծ շարժման օրենքը տրված է $s=S(t)$

* Գծ. 1-ում այդպիսի երկու կետ կա՝ $(c_1;f(c_1))$-ը և $(c_2;f(c_2))$-ը:

բանաձևով, որտեղ t-ն ժամանակն է, իսկ $S(t)$-ն՝ t ժամանակում մասնիկի անցած ճանապարհը:

Հիշեցնենք, որ n° VI.1.2-ում $S'(t)$-ն սահմանվեց որպես ժամանակի t պահին շարժման ակնթարթային արագություն:

Եթե ժամանակի t_0 պահին մասնիկը գտնվել է որոշակի A կետում և այդ կետից դուրս գալուց ինչ-որ ժամանակ անց, T պահին, դարձյալ հայտնվել է A-ում՝ $S(T)=S(t_0)$, ապա այդ ժամանակահատվածում եղել է մի τ $(t_0<\tau<T)$ պահ* (օրինակ, հետ դառնալու պահը), երբ շարժման ակնթարթային արագությունը հավասարվել է զրոյի. $S'(\tau)=0$:

3°. ***Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:***

Թեորեմ (Լագրանժ): *Եթե $y=f(x)$, $a\le x\le b$, ֆունկցիան*

I. $[a;b]$-ում անընդհատ է և

II. $(a;b)$ բաց միջակայքում ամենուրեք դիֆերենցելի,

ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c): \tag{3}$$

Ապացույց: ➢ Նկատելով, որ f-ը բավարարում է նախորդ կետում բերված Ռոլի թեորեմի I և II պայմաններին՝ ձևափոխենք այն այնպես, որ կատարվի նաև III պայմանը:

Դիտարկենք

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (a\le x\le b)$$

ֆունկցիան: Որպես f ֆունկցիայի և գծային ֆունկցիայի տարբերություն, F-ը կլինի թե՛ $[a;b]$ հատվածում անընդհատ, թե՛ $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի: Անմիջական տեղադրմամբ համոզվում ենք, որ վերջինս բավարարում է նաև Ռոլի թեորեմի III պայմանին.

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$

* Գուցեև մի քանի այդպիսի պահեր:

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a):$$

Համաձայն հիշատակված թեորեմի, $(a;b)$-ում գոյություն կունենա c կետ, որտեղ՝ $F'(c)=0$:

Մնում է հաշվել F ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

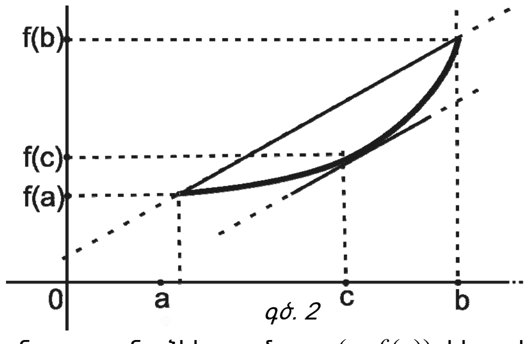
տեղադրել դրանում $x=c$ և նկատել, որ $F'(c)=0$ հավասարությունը համընկնում է (3) բանաձևին:◄

Թեորեմն ապացուցվեց:

Թեորեմում ստացված (3) բանաձևը հաճախ անվանում են **Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձև**: Այն ունի թե՛ բազմաթիվ կիրառություններ, թե՛ բազմապիսի ընդհանրացումներ, որոնցից մեկը կներկայացնենք հենց այս պարագրաֆում: Դա է պատճառը, որ Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևն ընդունված է համարել **դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական բանաձև**:

Նկատենք, որ Լագրանժի թեորեմը Ռոլի թեորեմի անմիջական ընդհանրացումն է. այն դեպքում, երբ $f(b)=f(a)$, (3)-ը վերածվում է Ռոլի թեորեմում ստացված $f'(c)=0$ հավասարության:

Թեորեմի երկրաչափական մեկնաբանությունը, նման է Ռոլի թեորեմի մեկնաբանությանը:



գծ. 2

Նախ պետք է նկատել (գծ. 2), որ f ֆունկցիայի գրաֆիկի $(a;f(a))$ և $(b;f(b))$ ծայրերը միացնող լարը (լարը պարունակող ուղիղը) ունի (3) բանաձևի ձախ մասին հավասար անկյունային գործակից (n° III. 3.9), իսկ նույն այդ բանաձևի աջ մասը $(c;f(c))$ կետով գրաֆիկին տարված շոշափողի անկյունային գործակիցն է (n° VI. 1.5): Այնպես որ, հիշելով ուղիղների զուգահեռության n° III. 3.6-ում բերված հայտանիշը, (3) հավասարությունը կարող ենք մեկնաբանել հետևյալ կերպ.

Ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կա առնվազն մեկ կետ, որով գրաֆիկին տարված շոշափողը զուգահեռ է գրաֆիկի ծայրերը միացնող լարին:

Ինչ վերաբերում է բանաձևի ֆիզիկական մեկնաբանությանը, ապա, օգտագործելով Ռոլի թեորեմի մեկնաբանության համար մտցված նշանակումները, կարող ենք ասել՝

ցանկացած $[t_0;T]$ ժամանակահատվածում լինում է մի պահ, երբ մասնիկի ուղղագիծ շարժման ակնթարթային արագությունը՝ $S'(\tau)$ -ն, հավասարվում է այդ ժամանակահատվածում շարժման միջին արագությանը՝ $\dfrac{S(T)-S(t_0)}{T-t_0}$ -ին:

4°. ***Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը:*** Դիտարկենք $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված երկու ֆունկցիա՝ f և g :

Թեորեմ (Կոշի): Եթե f -ը և g -ն՝

I. $[a;b]$-ում անընդհատ են,

II. $(a;b)$ միջակայքում՝ դիֆերենցելի են,

III. $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$,

ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} : \tag{4}$$

Ապացույց: ➢ Այստեղ էլ, ինչպես և Լագրանժի թեորեմն ապացուցելիս, ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա.

$$\Phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big):$$

Նկատելով, որ $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատությունից և $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելիությունից զատ, Φ -ն բավարարում է Ռոլի թեորեմի նաև III պայմանին՝

$\Phi(a)=\Phi(b)=f(a)$,

եզրակացնում ենք, որ գոյություն ունի $c \in (a;b)$ կետ, որում՝ $\Phi'(c) = 0$ ։ Եթե, այժմ, հաշվենք

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

ածանցյալը և տեղադրենք այդտեղ $x = c$, ապա $\Phi'(c) = 0$ հավասարությունից անմիջապես կստանանք (4) բանաձևը: ◄

Թեորեմն ապացուցվեց:

Ստացված բանաձևն անվանում են **Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձև**:

Նշենք, որ եթե Լագրանժի թեորեմը Ռոլի թեորեմի ընդհանրացումն էր, ապա Կոշիի թեորեմը, իր հերթին, Լագրանժի թեորեմի ընդհանրացումն է: Բավական է (4) բանաձևում որպես g վերցնել $g(x) = x$ ֆունկցիան, որպեսզի այն իսկույն վերածվի Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի:

§ 2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ

1°. ***Բարձր կարգի ածանցյալների սահմանումը:*** Դիցուք f -ը $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում դիֆերենցելի է:

Արգումենտի ցանկացած $x \in (a;b)$ արժեքին համապատասխանեցնելով x կետում f ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը, ստանում ենք մի նոր ֆունկցիա՝ $y = f'(x)$, $x \in (a;b)$, որն անվանում են f ֆունկցիայի **ածանցյալ ֆունկցիա**:

Նախորդ գլխում արծարծված գաղափարների, խնդիրների շրջանակներում ինքնին առաջանում է հետևյալ հարցը. կլինի՞ արդյոք f' -ը, որպես x փոփոխականի թվային ֆունկցիա, միջակայքի այս կամ այն կետում դիֆերենցելի: Եթե այո, ապա այդ պարագայում որակական ինչ նոր գնահատական կարող է ստանալ ֆունկցիան, և որքանով է դա նպաստելու ֆունկցիայի առավել մանրակրկիտ հետազոտմանը:

Այս և հաջորդ պարագրաֆները գրեթե ամբողջությամբ նվիրված են հենց այդ հարցերի ուսումնասիրմանը:

Սահմանում: *Եթե $y=f'(x)$ ֆունկցիան $x_0\in(a;b)$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ (դիֆերենցելի է), ապա այդ վերջինն անվանում են x_0 կետում ելակետային f ֆունկցիայի* ***երկրորդ ածանցյալ*** *և նշանակում՝*

$$f''(x_0),\ y''(x_0),\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$$

և այլն: Ընդսմին, ասում են, որ f -ը x_0 -ում երկու անգամ դիֆերենցելի է:

Համանմանորեն սահմանվում են ֆունկցիայի երրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները: Ընդհանուր սկզբունքը հետևյալն է.

եթե x_0 -ի շրջակայքում $(n-1)$ -րդ ածանցյալը՝ $f^{(n-1)}(x)$ -ը, արդեն սահմանված է, ապա x_0 կետում n-րդ ածանցյալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$f^{(n)}(x_0)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}:$$

Ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների նշանակման ձևերին որոշ միատեսակություն հաղորդելու նպատակով պայմանավորվում են 0-րդ կարգի ածանցյալի տակ հասկանալ հենց ինքը ֆունկցիան.

$f^{(0)}(x)=f(x):$

Եթե տրված n բնական թվի համար $f^{(n)}(x_0)$ -ն գոյություն ունի և վերջավոր է, ապա ասում են, որ f -ը x_0 -ում n անգամ դիֆերենցելի է կամ ունի ընդհուպ մինչև n-րդ կարգի ածանցյալ: Իսկ եթե $(a;b)$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ֆունկցիան ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ, ապա ասում են, որ այն $(a;b)$-ում **անվերջ դիֆերենցելի է**:

2°. ***Հիմնական տարրական ֆունկցիաների բարձր կարգի ածանցյալները:*** Անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիայի օրինակներ են բոլոր հիմնական տարրական ֆունկցիաները: Բավական է ուսումնասիրել n° VI. 3.1-ում ներկայացված ածանցյալների աղյուսակը և տեսնել, որ, օրինակ, x^p, a^x, $\log_a x$, $\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի ածանցյալը (հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ) նույն այդ խմբին պատկանող ֆունկցիա է: Դա նշանակում է, որ ամեն անգամ դիֆերենցման արդյունքում ստացվող ածանցյալ ֆունկցիաները նորից դիֆերենցելի են: Կատարելով պարզ ինդուկ-ցիա, ստանում ենք նշված ֆունկցիաների բարձր կարգի ածանցյալ-ների հետևյալ ցանկը.

I. $(x^p)^{(n)} = p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-(n-1))x^{p-n}$;

I*. $\left((1+x)^p\right)^{(n)} = p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-(n-1))(1+x)^{p-n}$;

II. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; II*. $(e^x)^{(n)} = e^x$;

III. $(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$;

III*. $(\ln(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$;

IV. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

V. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$:

Ստուգենք միայն V բանաձևը՝ մնացածների ստուգումը թողնե-լով ընթերցողին:

➢ 1) $n=1$ դեպքում ունենք $(\cos x)' = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, որը ճշմարիտ է:

2) Ընդունելով, որ n-ի համար գրված բանաձևը ճշմարիտ է, ցույց տանք, որ այն կլինի ճշմարիտ նաև $(n+1)$-ի համար.

$$(\cos x)^{(n+1)} = \left((\cos x)^{(n)}\right)' = \left(\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)' =$$

$$= -\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)' = -\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi(n+1)}{2}\right):$$

✍ **Դիտողություն 1:** Այն դեպքում, երբ p-ն ոչ բացասական ամբողջ թիվ է և $n>p$, I և I* բանաձևերի աջ մասի գործակիցներից մեկը զրո է, որը նշանակում է, որ ձախ մասում գրված n-րդ կարգի ածանցյալը նույնաբար զրոյի է հավասար: Կարելի է նաև ուղղակի նկատել, որ $p\in N$ դեպքում՝

$$(x^p)'=px^{p-1},\ (x^p)''=p(p-1)x^{p-2},\dots,(x^p)^{(p)}=p!x^o=p!$$

և, քանի որ վերջին՝ p-րդ ածանցյալը հաստատուն է, ուստի՝

$$(x^p)^{(p+1)}=(x^p)^{(p+2)}=\cdots=0:$$

✍ **Դիտողություն 2:** I*-ում և III*-ում որպես ֆունկցիայի արգումենտ վերցված է $(1+x)$-ը: Դա արված է այն նպատակով, որպեսզի ֆունկցիան $x=0$ կետի 1-շրջակայքում $(-1<x<1)$ լինի որոշված*: Թե որքանով է դա նպատակահարմար, պարզ կդառնա հաջորդ պարագրաֆում:

3°. ***Պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի բարձր կարգի ածանցյալների հաշվման տեխնիկան:*** Դիտարկենք $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha<t<\beta)$ պարամետրական հավասարումների զույգը:

Եթե φ և ψ ֆունկցիաները $(\alpha;\beta)$ միջակայքում n անգամ դիֆերենցելի են, և ամենուրեք՝ $\varphi'(t)\neq 0$, ապա նշված հավասարումներով որոշվող $y(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է:

Առաջին ածանցյալի համար n° 2.4-ում ստացանք

$$y'(x)=y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

բանաձևը: Հիշենք, որ t-ն այդ բանաձևում $x=\varphi(t)$ ֆունկցիայի հակադարձն էր: Կիրառելով քանորդի, ինչպես նաև բարդ ֆունկցիայի և հակադարձ ֆունկցիայի ածանցման կանոնները՝ ստանում ենք.

---

* Թե՛ x^p-ի, թե՛ $\ln x$-ի որոշման տիրույթը $(0;+\infty)$ միջակայքն է, որը 0-ի ոչ մի շրջակայք չի պարունակում:

$$y''(x) = y''_{x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{y''_{t^2} x'_t - x''_{t^2} y'_t}{\left(x'_t\right)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3} :$$

Նույն եղանակով՝

$$y'''_{x^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy''(x)}{dx} = \left(\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

և այլն:

Օրինակ 2: $x = \varphi(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$, $y = \psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

Գտնենք y''_{x^2} -ն:

Ունենք՝

$$\varphi'(t) = \left(\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)' = \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \cdot \left(t + \sqrt{1+t^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(1+t^2\right)'\right) = \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \cdot \left(1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} :$$

$$\psi'(t) = -\frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{1+t^2}\right)' = -\frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{t}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3} :$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3} \cdot \sqrt{1+t^2} = -\frac{t}{1+t^2},$$

$$y''_{x^2} = \left(-\frac{t}{1+t^2}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = -\frac{1+t^2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot \sqrt{1+t^2} = \frac{t^2-1}{\sqrt{1+t^2}^3} :$$

§ 3. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

1°. ***Թեյլորի բազմանդամ:*** Դիտարկենք ստանդարտ տեսքի

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

հանրահաշվական բազմանդամը:

Հաշվենք բազմանդամի բարձր կարգի ածանցյալները.

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!c_n,$$

$$P_n^{(n+1)}(x) = P_n^{(n+2)}(x) = \cdots = 0:$$

Եթե այս բանաձևերում տեղադրենք $x = x_0$, ապա, հաշվի առնելով նաև, որ $P_n(x_0) = c_0$, կստանանք բազմանդամի գործակիցների հետևյալ ներկայացումը.

$$c_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n:$$

Վերադառնալով բազմանդամի ստանդարտ տեսքին՝ կարող ենք գրել՝

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n: \qquad (1)$$

Դիցուք, այժմ, f-ը x_0 կետի շրջակայքում առնվազն n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Կազմենք

$$P_n^f(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

հանրահաշվական բազմանդամը:

Նախ նշենք, որ եթե f-ը չի հանդիսանում ոչ ավելի, քան n-րդ կարգի բազմանդամ կամ, առավել ևս, եթե այն ընդհանրապես բազմանդամ չէ, ապա պնդել, (1) բանաձևի նմանությամբ, թե $P_n^f(x_0; x)$-ը x_0-ի շրջակայքում համընկնում է $f(x)$-ին, չենք կարող:

Դիցուք $r_n^f(x_0; x)$-ը ֆունկցիայի շեղումն է P_n^f բազմանդամից.

$$r_n^f(x_0; x) = r_n(x) = f(x) - P_n^f(x_0; x): \qquad (2)$$

Այդ դեպքում ունենք՝

$f(x) = P_n^f(x_0;x) + r_n^f(x_0;x)$ կամ, ավելի մանրամասն,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x): \quad (3)$$

Այս վերջինն էլ հենց անվանում են **Թեյլորի[*] բանաձև**: Ընդսմին, P_n^f -ը կոչվում է f ֆունկցիայի n-րդ կարգի **Թեյլորի բազմանդամ**, բազմանդամի $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k = 0;1;\cdots)$ գործակիցները՝ **Թեյլորի գործակիցներ,** իսկ r_n^f -ը՝ Թեյլորի բանաձևի n-**րդ մնացորդային անդամ** կամ, ուղղակի, n-**րդ մնացորդ:**

Մասնավորապես, երբ $x_0 = 0$, (3)-ն ընդունում է

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (4)$$

$\left(r_n(x) = r_n^f(0;x)\right)$ տեսքը: Այս տեսքով գրված Թեյլորի բանաձևն անվանում են նաև Մակլորենի[**] բանաձև: Նշենք որ, այս պարագրաֆի վերջում, հիմնական տարրական ֆունկցիաները Թեյլորի բանաձևով ներկայացնելիս, նախապատվությունը տրվում է հենց այդ մասնավոր դեպքին:

Ինքնին, իհարկե, (4) բանաձևը որևէ լուրջ արժեք չի կարող ներկայացնել, քանի դեռ r_n մնացորդային անդամի կառուցվածքը կամ փոփոխման վարքը, կախված n-ից և x-ից, չի բացահայտված: Այնպես որ, առաջիկայում պետք է զբաղվենք հենց այդ հարցի պարզաբանմամբ:

2°. *Մնացորդային անդամի Լագրանժի և Կոշիի բանաձևերը:*

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում ունի ընդհուպ մինչև $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալ, ընդ որում՝ $f^{(n+1)}(x)$-ը, որպես x-ից կախված ֆունկցիա, այդ շրջակայքում անընդհատ է[***]:

Թեյլորի (3) բանաձևի մնացորդային անդամի հետևյալ ներկայացումը պատկանում է Լագրանժին.

---

[*] **Բրուկ Թեյլոր** (1685-1731), անգլիացի մաթեմատիկոս:

[**] **Կոլին Մակլորեն** (1698-1746), շոտլանդացի մաթեմատիկոս:

[***] Ասում են նաև, որ f -ը նշված միջակայքում $n+1$ **անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է:**

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{5}$$

որտեղ c-ն x_0-ի և x-ի միջև ընկած կետ է:

Թեյլորի բանաձևը, մնացորդային անդամի (5) ներկայացմամբ, ընդունում է

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{6}$$

տեսքը: Այն դեպքում, երբ $x_0 = 0$, (10)-ը բերվում է Մակլորենի բանաձևին.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}: \tag{6'}$$

Ոչ պակաս կարևոր է նաև մնացորդային անդամի Կոշիի հետևյալ բանաձևը.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1: \tag{7}$$

✍ **Դիտողություն 1:** Միանգամից երևում է, որ Լագրանժի բանաձևով տրված մնացորդային անդամը Թեյլորի բազմանդամի հետ շատ ավելի լավ է ներդաշնակված, քան Կոշիի բանաձևով ներկայացվածը: Թվում է, թե այն Թեյլորի $(n+1)$-րդ կարգի բազմանդամի վերջին՝ ավագ անդամն է: Բայց նկատենք, որ դա ընդհանուր առմամբ այդպես չէ, քանի որ (5)-ում $(x - x_0)^{n+1}$-ի գործակիցը հաստատուն չէ, այլ կախված է c-ից, որն իր հերթին կախված է x-ից:

✍ **Դիտողություն 2:** Եթե (6)-ում վերցնենք $n = 0$, ապա կստանանք՝

$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$:

Սա, ինչպես տեսնում ենք, n° 1.3-ում բերված Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևն է, որտեղ $a = x_0$, $b = x$: Փաստորեն, Թեյլորի բանաձևը, մնացորդային անդամի (5) տեսքով, վերջավոր աճերի բանաձևի ընդհանրացումն է:

Ի դեպ, նույն այդ եզրակացությանն ենք հանգում նաև այն դեպքում, երբ (6)-ում մնացորդային անդամը փոխարինված է (7) ձևով:

3°. ***Մնացորդային անդամի Պեանոյի գնահատականը: Թեյլորի լոկալ բանաձևը:*** Դիցուք f-ը x_0 կետի շրջակայքում n անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f^{(n)}(x)$-ը x_0-ում անընդհատ է:

Գրենք Թեյլորի (6) բանաձևը, $(n-1)$-րդ մնացորդային անդամով.

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n : \qquad (8)$$

Ըստ պայմանի՝ $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)$:

Քանի որ c-ն գտնվում է x-ի և x_0-ի միջև, ուրեմն $c\to x_0$, երբ $x\to x_0$: Հետևաբար՝ $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$: Իսկ դա նշանակում է, որ

$$f^{(n)}(c)=f^{(n)}(x_0)+\alpha(x),$$

որտեղ $\alpha(x)$-ը, երբ $x\to x_0$, անվերջ փոքր է: Ստացված հավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\Big((x-x_0)^n\Big):$$

Ինչպես տեսնում ենք, վերջին արտահայտության մեջ առաջին գումարելին Թեյլորի n-րդ կարգի բազմանդամի ավագ անդամն է: Դրանից կարող ենք եզրակացնել, որ երկրորդ գումարելին՝ $o\Big((x-x_0)^n\Big)$-ը, ոչ այլ ինչ է, քան Թեյլորի բանաձևի n-րդ մնացորդային անդամը.

$$r_n(x)=o\Big((x-x_0)^n\Big), \qquad x\to x_0 : \qquad (9)$$

Մնացորդային անդամի (9) ձևը պատկանում է Պեանոյին*: Թեյլորի բանաձևը, մնացորդային անդամի այդ տեսքով, հաճախ անվանում են **Թեյլորի լոկալ բանաձև.**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$

* **Ջուզեպե Պեանո** (1858-1932), իտալացի մաթեմատիկոս:

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\Big((x-x_0)^n\Big), \qquad x\to 0: \tag{10}$$

Գրենք նաև բանաձևի «մակլորենյան» տարբերակը $(x_0=0)$, քանի որ առաջիկայում հենց դա և (6′)-ն ենք օգտագործելու.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\Big(x^n\Big),\ \ x\to 0: \tag{10′}$$

✍ **Դիտողություն 1:** Բանաձևը կարևոր դեր է կատարում այն խնդիրներում, որոնցում անհրաժեշտ է պարզել որոշակի x_0 կետում ֆունկցիայի իր իսկ Թեյլորի բազմանդամից շեղման զրոյի ձգտելու արագության կարգը, երբ $x\to x_0$: Նկատենք, որ (10) բանաձևը, ըստ էության, բացահայտում է ֆունկցիայի վարքը միայն x_0-ում: Դրանով էլ պայմանավորված է բանաձևի «լոկալ» անվանումը:

✍ **Դիտողություն 2:** Տեղադրելով (10)-ում $n=1$, ստանում ենք

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

հավասարությունը, որը համընկնում է n^{o} VI.1.3-ում ֆունկցիայի դիֆերենցելիությանը վերաբերող (6′) բանաձևին: Փաստորեն, Թեյլորի լոկալ բանաձևը հիշյալ հավասարության ընդհանրացումն է:

Այժմ անցնենք նախորդ և այս կետերում արտածված բանաձևերի կիրառություններին:

4°. ***Տարրական ֆունկցիաների ներկայացումները Թեյլորի բանաձևով:*** Սկսենք հիմնական տարրական ֆունկցիաներից, որոնց բարձր կարգի ածանցյալների ցանկը բերված է n^{o} 2.2-ում:

1) $f(x)=e^x$: Ունենք՝

$$f^{(k)}(x)=(e^x)^{(k)}=e^x,\ f^{(k)}(0)=e^0=1,\ x\in\mathbb{R},\ k=0,1,\cdots:$$

Այնուհետև՝

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

որտեղ $\theta x=c$, ընդ որում՝ $0<\theta<1$, քանի որ c-ն գտնվում է 0-ի և x-ի միջև:

Տեղադրելով այս ամենը (6′)-ում՝ ստանում ենք e^x-ի հետևյալ ներկայացումը.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} : \tag{11}$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ $f(x) = a^x$, պետք է օգտվել վերոհիշյալ ցանկի II բանաձևից: Կարելի է նաև, ելնելով $a^x = e^{x \ln a}$ հավասարությունից, (11)-ում x-ը փոխարինել $x \ln a$-ով, նկատել, որ $e^{\theta x \ln a} = a^{\theta x}$ և միանգամից ստանալ

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{\ln^2 a}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!} x^n + \frac{a^{\theta x} \ln^{n+1} a}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ներկայացումը:

2) $f(x) = \sin x$: Այս անգամ ունենք՝

$$f^{(k)}(x) = (\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \ k = 0, 1, \cdots;$$

$$f^{(k)}(0) = f^{(2m)}(0) = \sin \pi m = 0 \qquad (k \text{ -ն զույգ է}),$$

$$f^{(k)}(0) = f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(\pi m - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (k \text{ -ն կենտ է}),$$

$$r_{2n}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{\pi(2n+1)}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} :$$

Այսպիսով՝

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} : \tag{12}$$

3) $y = \cos x$: Կրկնելով նախորդ օրինակում արված քայլերը՝ հանգում ենք հետևյալ բանաձևին.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2} : \tag{13}$$

☝ **Դիտողություն 1:** (12) և (13) բանաձևերում Թեյլորի բազմանդամի կարգի և մնացորդային անդամի համարի անհամապատասխանությունը բացատրվում է նրանով, որ (12)-ում բազմանդամի $2n$-րդ, իսկ (13)-ում $(2n+1)$-րդ անդամները հավասար են 0-ի:

Ի դեպ, այն երևույթը, որ (12) բանաձևում առկա են x-ի միայն կենտ, իսկ (13)-ում՝ միայն զույգ աստիճաններ պարունակող անդամները, պայմանավորված է նրանով, որ $\sin x$-ը կենտ ֆունկցիա է, իսկ $\cos x$-ը՝ զույգ*:

4) $y=\ln x$: Այստեղ, արդեն, ֆունկցիան Մակլորենի բանաձևով ներկայացնել չենք կարող, քանի որ այն $x_0=0$ կետի որևէ շրջակայքում որոշված չէ: Դա հաշվի առնելով՝ կարելի է, օրինակ, վերցնել $x_0=1$ և այդ կետի 1-շրջակայքում՝ $(0;2)$ միջակայքում, ֆունկցիան վերլուծել ըստ $(x-1)$-ի աստիճանների: Սակայն, ավելի նպատակահարմար է $\ln x$-ի փոխարեն դիտարկել $\ln(1+x)$ ֆունկցիան և ներկայացնել այն, ինչպես նախորդ օրինակներում, Մակլորենի բանաձևով: Նկատենք որ, Մակլորենի բանաձևում Թեյլորի բազմանդամն ունի համեմատաբար պարզ տեսք և, ըստ այդմ, առավել հարմար է դրա օգտագործումը գործնական խնդիրներում:

Եվ այսպես՝

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(k)}_{x=0}=(-1)^{k-1}(k-1)!,\qquad x>-1,\ k=0,1,\cdots:$$

Ինչ վերաբերում է մնացորդային անդամին, ապա որոշ նկատառումներով նախընտրելի է այն ներկայացնել Կոշիի (7) բանաձևով.

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}n!}(1-\theta)^n x^{n+1}=(-1)^n\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n x:$$

Արդյունքում ստացվում է հետևյալ վերլուծությունը.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+(-1)^n\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n x: \tag{14}$$

5) $y=(1+x)^p,\qquad x>-1:$

---

* Տե՛ս գլուխ VI-ի վերջում բերված վարժություն 5-ը և 6-ը:

$$\left((1+x)^p\right)^{(k)} = p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-k+1)(1+x)^{p-k},$$

$$\left((1+x)^p\right)^{(k)}_{x=0} = p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-k+1):$$

Այս անգամ էլ, օգտագործելով մնացորդային անդամի Կոշիի բանաձևը, գտնում ենք՝

$$r_n(x) = \frac{p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-n)}{n!}(1+\theta x)^{p-n}(x-\theta x)^n x,$$

այնպես որ՝

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-n+1)}{n!}x^n +$$

$$+\frac{p(p-1)\cdot\dots\cdot(p-n)}{n!}\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^p x: \qquad (15)$$

✍ **Դիտողություն 2:** Այստեղ էլ, ինչպես նախորդ օրինակում, x^p-ի փոխարեն դիտարկեցինք $(1+x)^p$ ֆունկցիան, քանի որ առաջինը, երբ $p \notin \mathbb{N}$, 0-ի ոչ մի շրջակայքում որոշված չէ:

Այժմ անցնենք (11)-(15) բանաձևերում մնացորդային անդամի գնահատմանը: Նպատակը, այստեղ, պարզելն է, թե x-ի ինչ արժեքների դեպքում է $r_n(x)$-ը ձգտում 0-ի, երբ $n \to \infty$: Դա, օրինակ, հնարավորություն կտա ֆունկցիան մոտարկելու իր n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամով, ապահովելով, ի հաշիվ n-ի մեծացման, ցանկացած ճշգրտություն:

Սկսենք (11) բանաձևից: Ունենք՝

$$|r_n(x)| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:$$

Քանի որ որոշակիորեն տրված յուրաքանչյուր $x \in \mathbb{R}$ արժեքի համար $e^{|x|}$-ը հաստատուն է (կախված չէ n-ից), իսկ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ *,

---

* Դրանում հեշտ է համոզվել՝ կրկնելով n° IV. 3.1-ի օրինակ 22-ում արված դատողությունները:

ուրեմն, ցանկացած x-ի համար՝

$$\lim_{x\to\infty} r_n(x)=0:$$

Օրինակ 3: Տեղադրելով (11)-ում $x=1$, կստանանք e թվի հետևյալ ներկայացումը.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}: \tag{16}$$

Քանի որ $0<\theta<1$ և $e\le 3$ ($\mathrm{n^o\,IV.\,3.2}$), ուրեմն՝

$$r_n(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}: \tag{17}$$

Արդյունքում ստացվում է

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \tag{18}$$

մոտավոր հավասարությունը, որում բացարձակ սխալանքը չի գերազանցում $3/(n+1)!$-ը: Մասնավորապես, վերցնելով (18)-ում $n=11$ և հաշվի առնելով (17) գնահատականը, պարզ հաշվարկներից հետո կստանանք e թվի $\mathrm{n^o\,IV.\,3.2}$-ում բերված մոտավոր ռացիոնալ արժեքը՝ 10^{-8}-ի ճշտությամբ.

$$e=2,71828183\pm 10^{-8}:$$

Հետաքրքիր է նաև, որ (16) բանաձևը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ ապացուցելու, որ e-ն իռացիոնալ թիվ է*:

Իսկապես, կատարենք հակասող ենթադրություն. $e=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$:

Գրենք (21) բանաձևը $n=q+1$ դեպքում.

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(q+1)!}+\frac{e^{\theta}}{(q+2)!}:$$

Եթե բազմապատկենք վերջին հավասարության երկու մասը $(q+1)!$-ով և նկատենք, որ արդյունքում թե՛ ձախ մասը, թե՛ աջ մասի բոլոր գումարելիները, բացառությամբ վերջինի, կդառնան ամբողջ թվեր, ապա կարող ենք եզրակացնել, որ $e^{\theta}/(q+2)$-ը նույնպես ամբողջ է, բայց դա հնարավոր չէ, քանի որ

---

* Հենց դա է պատճառը, որ գործնական խնդիրներում, որտեղ օգտագործվում են բացառապես ռացիոնալ թվերը, ստիպված են լինում բավարարվել e թվի միայն այս կամ այն ճշգրտությամբ տրված ռացիոնալ մոտավորություններով:

$$0<\frac{e^{\theta}}{q+2}<\frac{3}{q+2}\leq 1:$$

Գնահատենք, այժմ, (12) և (13) բանաձևերում առկա մնացորդային անդամները:

Առաջինում ունենք.

$$|r_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\leq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

իսկ երկրորդում՝

$$|r_n(x)|\leq\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, երկու դեպքում էլ, ցանկացած x-ի համար՝

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0:$$

Անդրադառնալով (14) բանաձևին, նկատենք, որ երբ $|x|<1$,

$$\left|\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right|=\frac{|x|(1-\theta)}{|1+\theta x|}\leq\frac{|x|(1-\theta)}{1-|\theta x|}\leq\frac{|x|(1-\theta)}{1-\theta}=|x|: \qquad (19)$$

Այդտեղից հետևում է, որ

$$|r_n(x)|=\left|\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n x\right|\leq|x|^{n+1}:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ $\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}=0$, երբ $|x|<1$: Ելնելով դրանից՝ կարող ենք գրել.

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad (|x|<1):$$

Ինչ վերաբերում է այս շարքի վերջին՝ (15) բանաձևի մնացորդային անդամին, ապա գրեթե նույն ձևով, ինչպես նախորդում, կարելի է համոզվել, որ

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0:$$

Ներկայացնենք, վերջապես, հիմնական տարրական ֆունկցիաների թեյլորյան վերլուծությունների ամփոփ ցանկը, այս անգամ օգտագործելով մնացորդային անդամի Պեանոյի բանաձևը.

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$, $\qquad x\to 0$;

II. $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$, $\quad x \to 0$;

III. $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$, $\quad x \to 0$;

IV. $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dots + \dfrac{(-1)^n}{n}x^n + o(x^n)$, $\quad x \to 0$;

V. $(1+x)^p = 1 + px + \dots + \dfrac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$, $\quad x \to 0$:

Այս բանաձևերը հաճախ անվանում են **ասիմպտոտիկ բանաձևեր** կամ **ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ վերլուծություններ**:

Բերենք դրանց օգտակարությունը ցուցադրող պարզագույն մի օրինակ:

Օրինակ 4: Հաշվենք $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$-ը:

Հետաքրքիր է, որ մեր դասընթացում սահմանների հաշվման մինչ այժմ մշակված ձևերը, այդ թվում նաև նշանավոր սահմանները, այստեղ ցանկալի արդյունքի չեն հասցնում: Իսկ, ահա, $\sin x$-ի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը, $n = 2$ դեպքում, անմիջապես բերում է հարցի լուծմանը.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{o(x^4)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}:$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Հավոզվել, որ $[-1;1]$ հատվածի վրա տրված $y = \sqrt[4]{x^2}$ ֆունկցիայի նկատմամբ Ռոլի թեորեմի կիրառումը անթույլատրելի է:

Պարզել, թե թեորեմի որ պայմանն է այստեղ բացակայում:

2. Հայտնի է, որ n-րդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամն ունի ոչ ավելի, քան n իրական արմատ: Տրված է

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$$

բազմանդամը, որտեղ x_1-ը, x_2-ը, …, x_n-ը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր իրական թվեր են:

Ապացուցել, որ $P'(x)=0$ հավասարումն ունի ճիշտ $n-1$ իրական լուծում:

3. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան:

Ապացուցել, որ ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար Լագրանժի թեորեմում հիշատակվող c կետը միակն է:

Կարելի՞ է արդյոք նույնը պնդել $y=x^3$ ֆունկցիայի դեպքում:

4. Ստուգել, որ $[-1;1]$ միջակայքում $f(x)=x^2$ և $g(x)=x^3$ ֆունկցիաների նկատմամբ Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևի կիրառումը բերում է սխալ արդյունքի: Ո՞րն է պատճառը:

5. Ցույց տալ, որ $x_0=0$ կետի շրջակայքում հիպերբոլական ֆունկցիաները (գլ. VI, վարժություն 8) ունեն Թեյլորի հետևյալ վերլուծությունները.

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \qquad x\to 0;$$

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right), \qquad x\to 0:$$

Գրել նույն այդ վերլուծությունները՝ մնացորդային անդամները ներկայացնելով Լագրանժի բանաձևով:

6. Գտնել $x_0=1$ կետի շրջակայքում $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի 3-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը:

Ցուցում: Ֆունկցիան ներկայացնել $\sqrt{x}=\left(1+(x-1)\right)^{1/2}$ տեսքով և օգտվել $\text{n}^{\text{o}}\,3.4$-ում բերված ցանկի V բանաձևից:

7. ա) Հաշվել Թեյլորի մի քանի գործակից և, ելնելով $\text{n}^{\text{o}}\,3.3$-ի (10′) բանաձևից, ցույց տալ, որ

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3), \qquad x\to 0:$$

բ) Գտնել սահմանը. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\sin x}{\arcsin x-\operatorname{tg} x}$:

8. Պարզել, թե ինչպիսին պետք է լինի Թեյլորի բազմանդամի կարգը, որպեսզի հետևյալ մոտավոր բանաձևերում բացարձակ սխալանքը չգերազանցի 10^{-3}-ը:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad |x| \le 1;$$

$$e^x \approx 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| \le 1:$$

Ցուցում: Թեյլորի վերլուծության մնացորդային անդամը ներկայացնել Լագրանժի բանաձևով և ընտրել n-ն այնպես, որ բոլոր նշված x-երի համար ճշմարիտ լինի $\left|r_n(x)\right| \le 10^{-3}$ անհավասարությունը:

9. Նշված x_0 կետի շրջակայքում գրել ֆունկցիայի n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը:

ա) $f(x) = e^{2x}$, $\quad x_0 = 0$;

բ) $f(x) = x^3 e^{-x}$, $\quad x_0 = 0$;

գ) $f(x) = \ln\sqrt{x}$, $\quad x_0 = 1$;

դ) $f(x) = \ln(1-x)$, $\quad x_0 = 0$:

Ցուցում: գ)-ում ֆունկցիան ներկայացնել $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln\big(1 + (x-1)\big)$ տեսքով: Այնուհետև, օգտվել հիմնական տարրական ֆունկցիաների վերլուծություններից ($\text{n}^{\text{o}}\,3.4$)՝ դրանցում կատարելով արգումենտի համապատասխան փոխարինում:

ԳԼՈՒԽ VIII

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄՈՆՈՏՈՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

1°. ***Հաստատունության հետազոտումը:*** Տրված է $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, ֆունկցիան:

Ինչպես ցույց տրվեց n^{o} VI. 3.1-ում, եթե f-ը հաստատուն է, ապա այն $(a;b)$-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f'(x) \equiv 0$:

Այժմ ցույց տանք հակառակը.

Եթե f-ը $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է և միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x) = 0$, ապա f-ը հաստատուն է:

➢ Պետք է, փաստորեն, համոզվել, որ ցանկացած $x_1, x_2 \in (a;b)$ կետերի համար՝ $f(x_1) = f(x_2)$:

Օգտվելով Լագրանժի թեորեմից (n^{o} VII. 4.3), կարող ենք պնդել, որ գոյություն ունի x_1-ի և x_2-ի միջև ընկած, հետևաբար $(a;b)$-ին պատկանող, ξ կետ, այնպիսին, որ

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2):$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $f'(\xi) = 0$, գրված բանաձևից անմիջապես բխում է պահանջվող հավասարությունը: ≺

Հետևանք: Եթե g և f ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են և ամենուրեք $g'(x) = f'(x)$, ապա g-ն և f-ը տարբերվում են հաստատուն գումարելիով. $g(x) = f(x) + C$:

➢ Դիտարկենք $h(x) = g(x) - f(x)$ տարբերությունը: Ունենք՝

$$h'(x) = \left(g(x) - f(x)\right)' = g'(x) - f'(x) = 0:$$

Այստեղից, ըստ վերը ապացուցվածի, հետևում է, որ

$h(x) = const = C$ կամ, որ նույնն է, $g(x) = f(x) + C$: ≺

Օրինակ 1: Ստուգենք, որ

$$y = 2\,\mathrm{arctgx} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \qquad x \in (1;+\infty),$$

ֆունկցիան հաստատուն է և գտնենք այդ հաստատունը:

Ունենք՝

$$y' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}\left(1+\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right):$$

Քանի որ $(1;+\infty)$ միջակայքում $1-x^2<0$ և, հետևաբար,

$|1-x^2| = -(1-x^2)$,

ստանում ենք $y' \equiv 0$ նույնությունը, որը նշանակում է, որ հետազոտվող ֆունկցիան հաստատուն է. $y = const = C$:

Նշված հաստատունը գտնելու համար հաշվենք ֆունկցիայի աջակողմյան սահմանը $x_0 = 1$ կետում.

$$C = \lim_{x\to 1+0} C = \lim_{x\to 1+0}\left(2\,\mathrm{arctgx} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,1 + \arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi:$$

Նույն դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ $(-\infty;-1)$ միջակայքում ֆունկցիան նույնպես հաստատուն է, միայն թե, այս անգամ՝

$$2\,\mathrm{arctgx} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -\pi, \qquad x \in (-\infty;-1):$$

✍ Դիտողություն: Եթե $(a;b)$ բաց միջակայքում հաստատուն ֆունկցիան որոշված է նաև միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում և այդ կետում անընդհատ է, ապա դա նույնպես կարելի է ներառել ֆունկցիայի հաստատունության միջակայքում:

Փաստորեն, օրինակ 1-ում դիտարկված ֆունկցիայի հաստատունության միջակայքերն են $(-\infty;-1]$ և $[1;+\infty)$ փակ ճառագայթները:

2°. *Մոնոտոնության միջակայքեր:* Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;b)$ միջակայքում և դիֆերենցելի է:

Որպեսզի f -ը լինի չնվազող, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $(a;b)$ -ում ամենուրեք տեղի ունենա $f'(x) \geq 0$ անհավասարությունը:

➢ **Անհրաժեշտությունը:** Ենթադրենք f -ը չնվազող է: Այդ դեպքում ցանկացած $x \in (a;b)$ կետի և արգումենտի ցանկացած Δx աճի համար կարող ենք գրել.

$$\Delta x < 0 \Rightarrow x + \Delta x < x \Rightarrow f(x + \Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \Delta f(x) =$$
$$= f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0 \text{ ,}$$

$$\Delta x > 0 \Rightarrow x + \Delta x > x \Rightarrow f(x + \Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \Delta f(x) \geq 0 :$$

Այստեղից հետևում է, որ ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը ոչ բացասական է: Ելնելով անհավասարության մեջ սահմանային անցման վերաբերյալ n° IV. 4.4-ի դ) պնդումից, եզրակացնում ենք, որ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0 :$$

Բավարարությունը: Դիցուք, այժմ, $(a;b)$-ում ամենուրեք $f'(x) \geq 0$:

Կետերի ցանկացած $x_1, x_2 \in (a;b)$ զույգի համար գրենք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \text{ ,}$$

որտեղ ξ -ն x_1-ի և x_2 -ի միջև ընկած կետ է:

Քանի որ, ըստ պայմանի, $f'(\xi) \geq 0$, ուրեմն՝ $x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0$: Իսկ սա հենց նշանակում է, որ f -ը $(a;b)$-ում չնվազող է: ≺

Վերջավոր աճերի բանաձևից հետևում է նաև, որ եթե $(a;b)$-ում $f'(x) > 0$, ապա f -ը աճող է:

Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ հակառակը ճիշտ չէ: Ֆունկցիան կարող է լինել աճող նույնիսկ այն դեպքում, երբ ածանցյալը, որը, իհարկե, ոչ բացասական է, ինչ-ինչ կետերում հավասար է 0-ի:

Օրինակ 2: $y = x^3$ ֆունկցիան, ինչպես գիտենք, աճող է: Բայց ածանցյալը՝ $y = 3x^2$, $x = 0$ կետում հավասար է 0-ի:

Այս երևույթի կապակցությամբ կատարենք հետևյալ ճշգրտումը.

եթե գոյություն չունի $(a;b)$-ում պարունակվող միջակայք, որի բոլոր կետերում $f'(x) = 0$, ապա $f'(x) \geq 0$ պայմանից հետևում է, որ f-ը $(a;b)$-ում աճող է:

➢ Իրոք, եթե f-ը չլիներ աճող, ապա, քանի որ այն, այնուամենայնիվ, չնվազող է, գոյություն կունենար կետերի $x_1 < x_2$ զույգ, որի համար՝ $f(x_1) = f(x_2)$: Բայց, մոնոտոնության պարագայում, այդտեղից կբխեր, որ $(x_1;x_2)$ միջակայքում ֆունկցիան հաստատուն է և, հետևաբար, այդ միջակայքում ամենուրեք $f'(x) = 0$: Իսկ դա կհակասեր նշված պայմանին: ⋞

Օրինակ 3: $y = x - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$: Ունենք՝ $y' = 1 - \cos x \geq 0$, ընդ որում՝ $y' = 0$ միայն $2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ կետերում: Այդ կետերը թեպետև անվերջ շատ են, սակայն, ակնհայտ է, ոչ մի միջակայք չեն լցնում: Այնպես որ, ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա աճող է:

Անցնենք, այժմ, չաճող (նվազող) ֆունկցիաներին:

Պարզ է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում չաճող է, ապա $-f(x)$ ֆունկցիան նույն այդ միջակայքում չնվազող է: Հաշվի առնելով նաև, որ $\left(-f(x)\right)' = -f'(x)$, կարող ենք ձևակերպել ֆունկցիայի չաճող լինելու հետևյալ հայտանիշը.

տրված միջակայքում դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան չաճող է այն և միայն այն դեպքում, երբ միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x) \leq 0$:

Այս հայտանիշի հետագա ճշգրտումները, ինչպես դա արվեց չնվազող ֆունկցիաների համար, թողնում ենք ընթերցողին:

Ընդհանուր դեպքում, երբ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում մոնոտոն չէ, հաճախ հնարավոր է լինում $(a;b)$-ն տրոհել զույգ առ զույգ չհատվող միջակայքերի, որոնցից ամեն մեկում ֆունկցիան օժտված է որոշակի այս կամ այն բնույթի մոնոտոնության հատկությամբ: Համաձայն բերված հայտանիշների, տրոհման միջակայքերից յուրաքանչյուրում ածանցյալը պետք է պահպանի իր նշանը: Ընդ որում, կից միջակայքերում $f'(x)$-ը պետք է ունենա տարբեր նշանի արժեքներ*:

Այն դեպքում, երբ $f'(x)$ ֆունկցիան $(a;b)$-ում անընդհատ է, ելնելով n° V. 2.2-ում ապացուցված թեորեմ 1-ից, եզրակացնում ենք, որ տրոհման կետերը նախևառաջ պետք է փնտրել $f'(x)=0$ հավասարման լուծումների կազմում: Բացի այդ, տրոհման կետերի բազմության մեջ կարող են ընդգրկվել նաև այն կետերը կամ դրանցից մի քանիսը, որոնցում ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ:

✍ **Դիտողություն:** Նախորդ կետում արված դիտողության նմանությամբ, այստեղ էլ կարելի է պնդել, որ եթե ֆունկցիան տրված բաց միջակայքում մոնոտոն է և միջակայքի ծայրակետերում անընդհատ, ապա մոնոտոնությունը պահպանվում է նաև փակ միջակայքում:

Իսկապես, եթե, օրինակ, f-ը $(\alpha;\beta)$ միջակայքում չնվազող է և α-ում անընդհատ, ապա ցանկացած $x_0\in(\alpha;\beta)$ կետի և արգումենտի ցանկացած $\alpha<x<x_0$ արժեքի համար կունենանք.

$$f(x)\le f(x_0),$$

$$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha+0} f(x)\le f(x_0):$$

Նկատենք, որ երկրորդ տողում գրված անհավասարությունը ստացվում է որպես առաջին տողում սահմանային անցման արդյունք:

Օրինակ 4: Գտնենք $y=2x^3-15x^2-36x+17$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը:

Ունենք. $y'=6x^2-30x-36=6(x^2-5x-6)$:

Լուծելով $y'\gtrless 0$ անհավասարությունները, ստանում ենք.

$y'>0$, երբ $x\in(-\infty;-1)$ կամ $x\in(6;+\infty)$;

$y'<0$, երբ $x\in(-1;6)$:

Ելնելով մոնոտոնության հայտանիշներից, հաշվի առնելով նաև վերևում արված դիտողությունը, կարող ենք ասել, որ $(-\infty;-1]$ միջակայքում ֆունկցիան աճող է, $[-1;6]$ հատվածի վրա՝ նվազող, իսկ $[6;+\infty)$-ում՝ դարձյալ աճող:

---

* Ասում են նաև, որ տրոհման կետով անցնելիս ածանցյալը պետք է փոխի իր նշանը:

Նկատենք, որ տրոհման -1 և 6 կետերը հենց $y'=0$ հավասարման լուծումներն են:

Օրինակ 5: $y=4x^3-3x^4$: Հաշվենք ածանցյալը.

$y'=12x^2-12x^3=12x^2(1-x)$:

Պարզ է, որ $(-\infty;1)$ միջակայքում $y'\geq 0$, ընդ որում՝ $y'=0$ միայն միջակայքի $x=0$ կետում, իսկ $(1;+\infty)$ միջակայքում $y'<0$: Այնպես որ, $(-\infty;1]$-ում ֆունկցիան աճող է, $[1;+\infty)$-ում՝ նվազող:

Ուշադրություն դարձնենք, որ $y'=0$ հավասարման լուծումներից՝ 0 և 1, միայն 1-ը ծառայեց որպես տրոհման կետ: Բանն այն է, որ $x=0$ կետով անցնելիս ածանցյալը չի փոխում իր նշանը, հետևաբար, այդ կետով տրոհում կատարելը տեղին չէ:

Օրինակ 6: Հետազոտենք $y=|x^2-4x-5|$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունը:

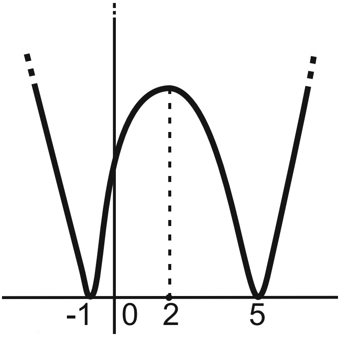
Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և անընդհատ է: Ածանցյալը գտնելու համար նախ պետք է ազատվել մոդուլի նշանից: Լուծելով $x^2-4x-5\gtrless 0$ անհավասարումները՝ ստանում ենք.

$x^2-4x-5\geq 0$, երբ $x\in(-\infty;-1]\bigcup[5;+\infty)$,

$x^2-4x-5<0$, երբ $x\in(-1;5)$:

Ֆունկցիան, այսպիսով, ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$y=\begin{cases}x^2-4x-5, & x\in(-\infty;-1]\bigcup[5;+\infty),\\ -(x^2-4x-5), & x\in(-1;5):\end{cases}$$



գծ. 1

Տրոհելով թվային ուղիղը -1 և 5 կետերով և միջակայք առ միջակայք հաշվելով ֆունկցիայի ածանցյալը՝ գտնում ենք.

$$y'=\begin{cases}2x-4, & x\in(-\infty;-1),\\ -2x+4, & x\in(-1;5),\\ 2x-4, & x\in(5;+\infty):\end{cases}$$

Հեշտ է ստուգել, որ -1 և 5 կետերում ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ: Դրանք, ինչպես սահմանվեց n° VI. 1.7-ում, գրաֆիկի անկյունային կետեր են (գծ. 1):

Այժմ նկատենք, որ $(-\infty;-1)$ միջակայքում $y'(x)<0$, $(5;+\infty)$-ում $y'(x)>0$, իսկ $(-1;5)$ միջակայքում ածանցյալը չի պահպանում իր նշանը: Լուծելով $y'=-2x+4=0$ հավասարումը՝ ստանում ենք՝ $x=2$: Եթե ստացված կետը ավելացնենք տրոհման մյուս կետերին և հաշվի առնենք, որ $(-1;2)$-ում $y'>0$, իսկ $(2;5)$-ում $y'<0$, ապա կհանգենք հետևյալ վերջնական արդյունքին.

$(-\infty;-1]\searrow$, $[-1;2]\nearrow$, $[2;5]\searrow$, $[5;+\infty)\nearrow$*:

3°. *Ածանցյալի օգտագործումը անհավասարություններում:*

Դիցուք f ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է, և $x_0\in(a;b)$:

Եթե $(a;x_0)$ *միջակայքում* $f'(x)\le 0$*, իսկ* $(x_0;b)$*-ում* $f'(x)\ge 0$*, ապա* $(a;b)$*-ում ամենուրեք* $f(x)\ge f(x_0)$*:*

➢ Իսկապես, քանի որ $(a;x_0]$-ում f-ը չաճող է, իսկ $[x_0;b)$-ում՝ չնվազող, ուրեմն՝

$$x<x_0\Rightarrow f(x)\ge f(x_0),$$

$$x>x_0\Rightarrow f(x)\ge f(x_0):$$

Երկու դեպքում էլ, ինչպես տեսնում ենք, ստացվում է պահանջվող անհավասարությունը: ≺

Եթե ածանցյալին առնչվող անհավասարությունները խիստ են, ապա $f(x)\ge f(x_0)$ անհավասարությունը վերածվում է հավասարության միայն այն դեպքում, երբ $x=x_0$:

Նկատենք, որ բերված պայմաններում $f(x_0)$-ն, փաստորեն, $(a;b)$ միջակայքում f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքն է: Պարզ է նաև, որ եթե ածանցյալի համար վերևում առկա են հակառակ անհավասարությունները, ապա ստացվում է $f(x)\le f(x_0)$ անհավասարությունը: Դա նշանակում է, որ $f(x_0)$-ն, այս անգամ, ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է:

---

* Սրանք աճման և նվազման միջակայքերի դպրոցական դասընթացից հայտնի նշանակումներ են:

Օրինակ 7: Ապացուցենք

$e^x > 1 + x$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $\quad x \neq 0$

անհավասարությունը:

Վերցնենք՝

$f(x) = e^x - 1 - x$:

Պետք է ցույց տանք, որ նշված տիրույթում $f(x) > 0$:

Ունենք՝

$f(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$,

$f'(x) = e^x - 1$:

Հաշվի առնելով, որ e^x ֆունկցիան աճող է, կարող ենք գրել.

$f'(x) = e^x - 1 < e^0 - 1 = 0$, երբ $x < 0$,

$f'(x) > 0$, երբ $x > 0$:

Ինչպես տեսնում ենք, վերը ձևակերպված պայմանները բավարարված են, այնպես որ՝ $f(x) > f(0) = 0$, $(x \neq 0)$:

Օրինակ 8: Ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad x \in (0; +\infty):$$

Հաջորդաբար ածանցելով $f(x) = \sin x - x + x^3/6$ ֆունկցիան՝ ստանում ենք.

$f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2$,

$f''(x) = -\sin x + x$,

$f'''(x) = -\cos x + 1$:

Քանի որ ցանկացած x-ի համար $\left(f''(x)\right)' = f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $f''(x)$ ֆունկցիան աճող է: Հաշվի առնելով, որ $f''(0) = -\sin 0 + 0 = 0$, եզրակացնում ենք, որ $(-\infty; 0)$-ում $f''(x) < 0$, $(0; +\infty)$-ում՝ $f''(x) > 0$:

Այդտեղից, իր հերթին, հետևում է, որ

$f'(x) > f'(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$:

Դա նշանակում է, որ f-ը ամբողջ առանցքի վրա աճող է: Բացի այդ, $f(0) = \sin 0 - 0 + 0 = 0$, այնպես որ՝ $(-\infty; 0)$-ում $f(x) < 0$, $(0; +\infty)$-ում $f(x) > 0$:

✍ Դիտողություն: Որ $(-\infty;0)$-ում $\sin x < x - \dfrac{x^3}{6}$, հետևում է նաև այն փաստից, որ ելակետային անհավասարության ձախ և աջ մասերում գրված ֆունկցիաները կենտ են:

Նկատենք, որ ընթացքում ապացուցվեց նաև հետևյալ, ոչ պակաս հետաքրքիր, անհավասարությունը.

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:$$

Բերենք անհավասարության ևս մի օրինակ, որի ապացուցման մեջ որպես արդյունավետ միջոց հանդես է գալիս Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:

Օրինակ 9: Ապացուցենք, որ z-ի ցանկացած դրական արժեքի համար՝

$$\frac{1}{z+1} < \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{z}:$$

Նախ նկատենք, որ

$$\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = \ln\frac{z+1}{z} = \ln(z+1) - \ln z:$$

Այժմ, $[z;\, z+1]$ հատվածի վրա տրված $y = \ln x$ ֆունկցիայի համար գրենք վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$\ln(z+1) - \ln z = (\ln x)'_{x=\xi} \cdot (z+1-z) = \frac{1}{\xi},$$

որտեղ, ինչպես Լագրանժի թեորեմում է նշված $(\mathrm{n}^{\circ}\ \mathrm{VII}.\ 4.3)$,

$$z < \xi < z+1:$$

Քանի որ $z > 0$, վերջին անհավասարությունները համարժեք են պահանջվող

$$\frac{1}{z+1} < \frac{1}{\xi} = \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{z}$$

անհավասարությունների զույգին:

§ 2. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

1°. ***Լոկալ էքստրեմումներ:*** Տրված է $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ ֆունկցիան:

Սահմանում: $x_0\in[a;b]$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի **լոկալ մաքսիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի x_0-ի շրջակայք, որտեղ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից մեծագույնը $f(x_0)$-ն է.

$$\exists\delta>0\ \ \forall x\in(x_0-\delta;\,x_0+\delta)\ \ \{f(x)\le f(x_0)\},$$

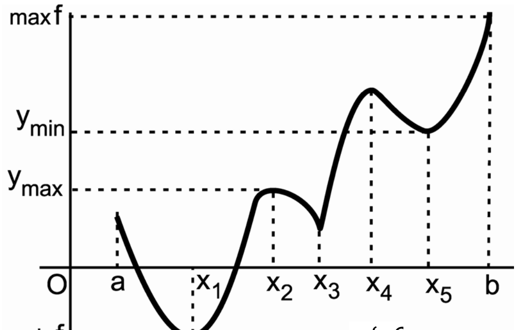
ընդ որում, հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x=x_0$:

Համանմանորեն, x_0-ն անվանում են **լոկալ մինիմումի կետ**, եթե

$$\exists\delta>0\ \ \forall x\in(x_0-\delta;\,x_0+\delta)\ \ \{f(x)\ge f(x_0)\}:$$

Երբ $x_0=a$ կամ $x_0=b$, սահմանման մեջ նշված շրջակայքը պետք է փոխարինել համապատասխանաբար $[a;\,a+\delta)$ կամ $(b-\delta;\,b]$ միջակայքով:

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են **լոկալ էքստրեմումի կետեր** և, համապատասխանաբար, նշանակվում $x_{\max}$-ով և $x_{\min}$-ով: Այդ կետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքները անվանում են **էքստրեմալ արժեքներ** կամ ուղղակի **էքստրեմումներ** (մաքսիմումներ կամ մինիմումներ): Էքստրեմումների համար ընդունված են



գծ. 2

$$y_{\max}=f(x_{\max})$$

և $$y_{\min}=f(x_{\min})$$

նշանակումները:

Էքստրեմումների երկրաչափական նկարագիրը տրված է գծ. 2-ում: Ox առանցքի վրա նշված կետերից՝ a-ն, x_2-ը, x_4-ը և b-ն լոկալ մաքսիմումի կետեր են, իսկ x_1-ը, x_3-ը և x_5-ը՝ լոկալ մինիմումի:

Էքստրեմումների «լոկալ» (տեղային) անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ դրանք ֆունկցիայի թեև ծայրագույն (մեծագույն կամ փոքրագույն) արժեքներ են, բայց՝ միայն տվյալ կետի որոշ, գուցե բավական փոքր, շրջակայքում: Լոկալ մաքսիմումը, օրինակ, միշտ չէ, որ համընկնում է որոշման տիրույթում ֆունկցիայի ընդունած մեծագույն արժեքին: Ավելին, որևէ կետում (գծագրի վրա a-ում կամ x_2-ում) ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումը կարող է նույնիսկ փոքր լինել մեկ այլ կետում (x_5-ում) լոկալ մինիմումից: Ամեն դեպքում, իհարկե, ֆունկցիայի բոլոր էքստրեմալ արժեքները, ինչպես և բոլոր արժեքներն ընդհանրապես, ընկած են նրա փոքրագույն $(\min f)$ և մեծագույն $(\max f)$ արժեքների միջև: Դա նկատի ունենալով և հետևելով այստեղ ընդունված տերմինաբանությանը՝ $\min f$-ը և $\max f$-ը կարող ենք անվանել ֆունկցիայի **«գլոբալ»*** **էքստրեմումներ**:

Գծ. 2-ում, ինչպես տեսնում ենք, գլոբալ էքստրեմումի կետեր են x_1-ը և b-ն. $f(x_1) = \min f$, $f(b) = \max f$:

Եթե էքստրեմումի կետը [a;b] հատվածի ներքին կետ է, ապա այն անվանում են ներքին լոկալ էքստրեմումի կետ:

Ինչ վերաբերում է a-ին և b-ին, որոնք, ըստ գծագրի, նույնպես լոկալ էքստրեմումի (մաքսիմումի) կետեր են, ապա դրանք անվանում են **եզրային էքստրեմումի կետեր**:

2°. ***Էքստրեմումի առկայության անհրաժեշտ պայմանը:*** Էքստրեմումների որոնման խնդրում կարևոր դեր է կատարում Ֆերմայի լեմման (n° VII. 1.1): Համաձայն այդ լեմմայի,

եթե x_0-ն f ֆունկցիայի ներքին լոկալ էքստրեմումի կետ է, և այդ կետում f-ը դիֆերենցելի է, ապա, անհրաժեշտաբար, $f'(x_0) = 0$:

Հաշվի առնելով n° VII. 1.1-ի օրինակ 1-ում անցկացված հետազոտման արդյունքները, եզրակացնում ենք, որ որոշման տիրույթի (միջակայքի) ծայրակետերը, ինչպես նաև այն կետերը, որոնցում ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ, նույնպես կարող են լինել էքստրեմումի կետեր:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի բոլոր այն ներքին կետերը, որ-

---

* Լատիներեն “globus” բառից է, նշանակում է համատարած, աշխարհով մեկ, իսկ այստեղ՝ որոշման տիրույթով մեկ, ֆունկցիայի բոլոր արժեքներին առնչվող:

*տեղ $f'(x_0)=0$ կամ որոնցում f -ը դիֆերենցելի չէ, կոչվում են **կրիտիկական կետեր**:*

Փաստորեն, կրիտիկական կետ լինելը այդ կետում ներքին լոկալ էքստրեմումի առկայության անհրաժեշտ պայման է:

Ստորև ներկայացվող օրինակները ցույց են տալիս, որ նշված պայմանը բավարար չէ:

Օրինակ 10: $y=x^3$, $\quad x\in(-\infty;+\infty)$: Ունենք`

$y'(x)=3x^2=0, \quad x=0$:

Ֆունկցիայի միակ կրիտիկական կետը 0-ն է: Որ այն էքստրեմումի կետ չէ, բխում է հետևյալ պարզ անհավասարություններից.

$y(x)=x^3<0=y(0)$, երբ $x<0$;

$x^3>0$, երբ $x>0$:

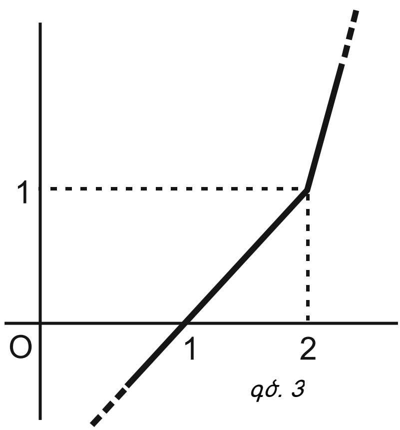
Առաջին տողում գրվածից հետևում է, որ $x=0$ կետը մինիմումի կետ չէ, իսկ երկրորդում գրվածից հետևում է, որ այն մաքսիմումի կետ էլ չէ:

☝ **Դիտողություն:** էքստրեմումներ հետազոտելիս հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ ակնհայտ պնդումը.

եթե ֆունկցիան տրված միջակայքում մոնոտոն է, ապա այն այդ միջակայքում ներքին էքստրեմումի կետեր չունի:

Այնպես որ, օրինակ 10-ում էքստրեմումների բացակայությունը նաև հետևանք է այն փաստի, որ $y=x^3$ ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա աճող է:

Օրինակ 11: Դիտարկենք



գծ. 3

$$y=\begin{cases} x-1, & x\le 2,\\ 2x-3, & x>2 \end{cases}$$

ֆունկցիան (գծ. 3):

Ընթերցողը հեշտությամբ կարող է համոզվել, որ ֆունկցիան ամենուրեք դիֆերենցելի է, բացառությամբ $x=2$ կետի: Այնպես որ, 2-ը կրիտիկական կետ է: Այդուհանդերձ, համաձայն նախորդ օրինակում արված դիտողության, ո՛չ այդ կետը, ո՛չ էլ որևէ այլ կետ չի կարող լինել էքստրեմումի կետ, քանի որ ֆունկցիան աճող է:

3°. ***Էքստրեմումի առկայության բավարար պայմանները:***

Ձևակերպենք երկու հայտանիշ, որոնցից յուրաքանչյուրը տալիս է բավարար պայման, որպեսզի տրված կետում ֆունկցիան ունենա էքստրեմում:

I հայտանիշ: *Դիցուք f -ը x_0 կետում անընդհատ է, իսկ x_0 -ի միջանցուկ* δ -շրջակայքում՝ դիֆերենցելի: Եթե՝*

ա) $(x_0-\delta; x_0)$ միջակայքում $f'(x)>0$, $(x_0; x_0+\delta)$ -ում $f'(x)<0$, ապա x_0 -ն f ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է;

բ) $(x_0-\delta; x_0)$ -ում $f'(x)<0$, $(x_0; x_0+\delta)$ -ում $f'(x)>0$, ապա x_0 -ն լոկալ մինիմումի կետ է:

Այս փաստերի ապացույցը, ոչ էական փոփոխությամբ, բերված է n° 1.3-ում: Ավելացնենք, որ եթե $(x_0-\delta; x_0)$ և $(x_0; x_0+\delta)$ միջակայքերում $f'(x)$-ը պահպանում է միևնույն նշանը, ապա x_0 -ն էքստրեմումի կետ չէ: Սա հետևանք է այն բանի, որ նշված միջակայքերում f -ը միևնույն բնույթի մոնոտոն է: Քանի որ այն x_0 -ում անընդհատ է, ուրեմն մոնոտոն է նաև $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ միջակայքում**: Իսկ մոնոտոն ֆունկցիան, ինչպես նշվեց n° 2-ում, էքստրեմումի կետեր չունի:

II հայտանիշ: *Դիցուք f -ը x_0 կետի շրջակայքում դիֆերենցելի է, իսկ բուն x_0 -ում ունի նաև երկրորդ ածանցյալ:*

Եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)\neq 0$, ապա x_0 -ն լոկալ էքստրեմումի կետ է: Ընդ որում՝

ա) $f''(x_0)<0$ դեպքում x_0 -ն մաքսիմումի կետ է,

բ) $f''(x_0)>0$ դեպքում՝ մինիմումի:

➢ Ներկայացնենք f -ը Թեյլորի լոկալ բանաձևով (n° VII. 2.3), վերցնելով $n=2$.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right):$$

Քանի որ, ըստ պայմանի, $f'(x_0)=0$, բանաձևին կարող ենք

---

* Միջանցուկ շրջակայքի սահմանումը տես n° IV. 4.2-ում:

** Տես n° 1.2-ում արված դիտողությունը:

տալ հետևյալ տեսքը.

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\cdot\left[\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{o\left((x-x_0)^2\right)}{(x-x_0)^2}\right],\quad x\neq x_0:$$

Նախ, հաշվի առնելով, որ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o\left((x-x_0)^2\right)}{(x-x_0)^2}=0$ և $f''(x_0)\neq 0$, կարող ենք պնդել, որ բանաձևի աջ մասի երկրորդ արտադրիչը x_0-ի բավականաչափ փոքր միջանցուկ շրջակայքում ընդունում է նույն նշանի արժեքներ, ինչպիսին $f''(x_0)$-ինն է: Քանի որ, նաև, ցանկացած $x\neq x_0$ արժեքի համար $(x-x_0)^2>0$, ուրեմն աջ մասի, հետևաբար նաև ձախ մասի, նշանը հիշյալ շրջակայքում համընկնում է $f''(x_0)$-ի նշանին: Այդտեղից հետևում է, որ այն դեպքում, երբ $f''(x_0)<0$, $f(x)-f(x_0)<0$ կամ $f(x)<f(x_0)$ $(x\neq x_0)$, այնպես որ, x_0-ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Իսկ այն դեպքում, երբ $f''(x_0)>0$, $f(x)>f(x_0)$, այսինքն x_0-ն լոկալ մինիմումի կետ է: ◄

✍ **Դիտողություն:** Երբ $f''(x_0)=0$, հարցի պատասխանը տրվում է ավելի բարձր կարգի ածանցյալների ներգրավմամբ: Դրան է նվիրված այս գլխի վերջում բերված վարժություն 8-ը:

Անցնենք օրինակների դիտարկմանը:

Օրինակ 12: Գտնենք

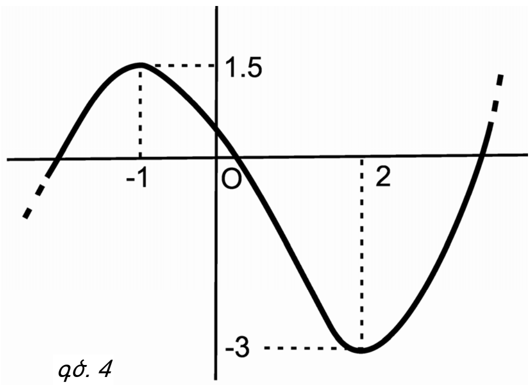
$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերն ու էքստրեմալ արժեքները (գծ. 4):

Նախ, լուծելով

$$y'(x)=x^2-x-2=0$$

հավասարումը, գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը.



գծ. 4

$x_1=-1$, $x_2=2$:

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $(-\infty;\,-1)$ միջակայքում $y'(x)>0$,

$(-1;\ 2)$-ում $y'(x)<0$, $(2;\ +\infty)$-ում $y'(x)>0$ և օգտվելով I հայտանի-շից, եզրակացնում ենք, որ -1-ը ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է, իսկ 2-ը՝ մինիմումի.

$x_{\max}=-1$, $x_{\min}=2$:

Համապատասխան էքստրեմալ արժեքները ստացվում են անմիջական տեղադրմամբ.

$$y_{\max}=y(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)+\frac{1}{3}=1,5;$$

$$y_{\min}=y(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-2\cdot 2+\frac{1}{3}=-3:$$

Նույն հաջողությամբ կարող ենք կիրառել նաև II հայտանիշը: Այդ դեպ-քում կունենանք.

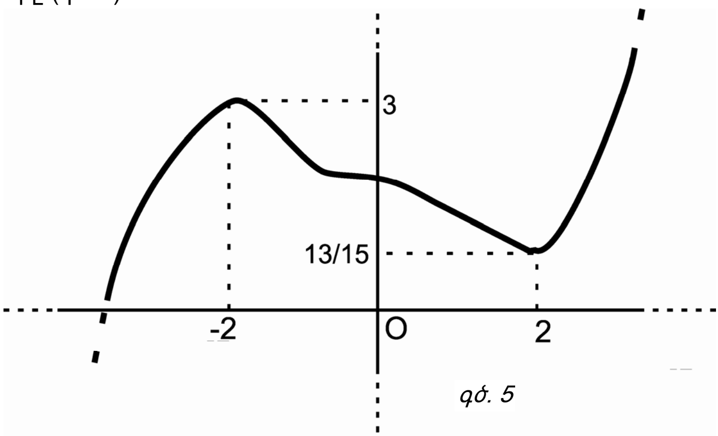
$y''(x)=(x^2-x-2)'=2x-1$,

$y''(-1)=2\cdot(-1)-1=-3<0$,

$y''(2)=2\cdot 2-1=3>0$:

Այնպես որ, մեկ անգամ ևս համոզվում ենք, որ -1-ը մաքսիմումի կետ է, 2-ը՝ մինիմումի:

Օրինակ 13: Հետազոտենք $y=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{29}{15}$ ֆունկցիայի էքստրե-մումները (գծ. 5):



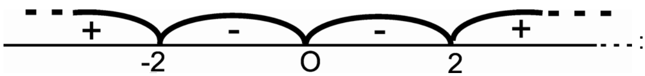
գծ. 5

Ունենք. $y' = \frac{x^4}{4} - x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2 - 4)$:

Կրիտիկական կետերն են՝ $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$:

Եթե այս կետերով ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (թվային ուղիղը) տրոհենք զույգ առ զույգ չհատվող միջակայքերի և դրանցից յուրաքանչյուրում պարզենք ածանցյալի նշանը, ապա կհանգենք նշանների դասավորության հետևյալ պատկերին.

y' :



Օգտվելով I հայտանիշից՝ անմիջապես տեսնում ենք, որ

$x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$:

Դրան համապատասխան՝

$$y_{\max} = \frac{(-2)^5}{20} - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{29}{15} = 3,$$

$$y_{\min} = \frac{2^5}{20} - \frac{2^3}{3} + \frac{29}{15} = \frac{13}{15}:$$

Ինչ վերաբերում է $x = 0$ կետին, ապա, թեպետև այն կրիտիկական կետ է, այդուհանդերձ էքստրեմումի կետ չէ: Այդ կետով անցնելիս ածանցյալը չի փոխում իր (բացասական) նշանը:

Հետաքրքիր է, որ II հայտանիշը, այն ձևով, ինչպես ներկայացված է այստեղ, $x = 0$ կետի վերաբերյալ ոչինչ չի ասում, քանի որ

$$y''(0) = (x^3 - 2x)\Big|_{x=0} = 0:$$

Սակայն, եթե հենվենք վերը հիշատակված վարժություն 8-ում այդ հայտանիշի ընդհանրացման վրա և հաշվի առնենք, որ

$$y'''(0) = (3x^2 - 2)\Big|_{x=0} = -2 \neq 0,$$

կարող ենք վերստին համոզվել, որ 0-ն ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

4°. ***Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնումը:*** Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a;b]$ հատվածում, անընդհատ է, իսկ $(a;b)$ բաց միջակայքում ամենուրեք, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, դիֆերենցելի է:

Համաձայն Վայերշտրասի II թեորեմի (n^o V. 2.3), գոյություն ունեն $[a;b]$-ին պատկանող կետեր, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է համապատասխանաբար մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Հիմա մեր խնդիրը հենց այդ կետերի և այդ արժեքների որոնումն է:

Հաշվի առնելով, որ մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (գլոբալ էքստրեմումները) նաև լոկալ էքստրեմումներ են, վարվում ենք հետևյալ կերպ.

1) գտնում ենք ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը;
2) ավելացնում ենք դրանց որոշման տիրույթի a և b ծայրակետերը;
3) այնուհետև, հաշվում բոլոր այդ կետերում ֆունկցիայի արժեքները:

Պարզ է, որ ստացված արժեքներից ամենամեծը կլինի ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը, իսկ ամենափոքրը՝ փոքրագույնը:

✍ **Դիտողություն:** Եթե $f(x)$ արտահայտության ԹԱԲ-ը ավելի ընդարձակ է, քան $[a;b]$ հատվածը, ապա ԹԱԲ-ի վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերի մի մասը կարող է $[a;b]$-ից դուրս գտնվել: Դրանք, բնականաբար, մեր խնդրի շրջանակներում պետք է անտեսվեն:

Օրինակ 14: Գտնենք $y = x^3 - 12x + 5 \qquad (-1 \le x \le 3)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Ունենք. $y'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$:

Լուծելով $3(x^2 - 4) = 0$ հավասարումը, ստանում ենք.

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$:

Քանի որ ստացված լուծումներից -2-ը չի պատկանում $(-1;3)$ միջակայքին, ուրեմն պետք է հաշվել ֆունկցիայի արժեքները միայն $x = 2$ կրիտիկական կետում և հատվածի ծայրակետերում.

$y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 5 = -11$,

$y(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 5 = 16$,

$y(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 5 = -4$:

Հիմա, արդեն, պարզ է, որ

$\max y = 16$, $\min y = -11$:

Օրինակ 15: Գտնենք $[0;1]$ հատվածի վրա $y=\sin x+\cos x$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Նախ նկատենք, որ $y'=\cos x-\sin x=0$ հավասարման անվերջ թվով լուծումներից $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right)$ միայն $\pi/4$-ն է պատկանում $[0;1]$ հատվածին: Ուստի, դա դիտարկվող ֆունկցիայի միակ կրիտիկական կետն է:

Ունենք՝

$$y(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

$$y(1)=\sin 1+\cos 1:$$

Անմիջապես չի երևում, թե ստացված երեք թվերից ո՞րն է ամենամեծը, ո՞րը՝ ամենափոքրը:

Նախ նկատենք, որ 1 ռադիան պտույտը I քառորդից է, հետևաբար՝

$$0<\sin 1<1, \qquad 0<\cos 1<1:$$

Այդտեղից բխում է, որ

$$\sin 1>\sin^2 1, \qquad \cos 1>\cos^2 1,$$

այնպես որ՝

$$\sin 1+\cos 1>\sin^2 1+\cos^2 1=1:$$

Մնում է բաղդատել $\sin 1+\cos 1$ և $\sqrt{2}$ թվերը.

$$\sin 1+\cos 1=\sqrt{2}\left(\sin 1\cos\frac{\pi}{4}+\cos 1\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}:$$

Այսպիսով՝

$$\max y=\sqrt{2}, \qquad \min y=1:$$

Օրինակ 16: x և y փոփոխականները բավարարում են $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y=a$ պայմաններին, որտեղ a-ն դրական հաստատուն է:

Գտնենք x^2+y^2 արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

➢ Ըստ պայմանի՝ $y=a-x$, ընդ որում՝ x-ը փոփոխվում է $[0;a]$ միջակայքում:

Դիտարկենք $f(x)=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2$ ֆունկցիան:

Պետք է, փաստորեն, գտնել $[0;a]$ հատվածի վրա f ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:

Ունենք՝

$$f'(x)=4x-2a=0, \qquad x=a/2:$$

Այնուհետև՝

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2};$$

$$f(0)=0^2+a^2=a^2; \qquad f(a)=a^2+0^2=a^2:$$

Այսպիսով՝

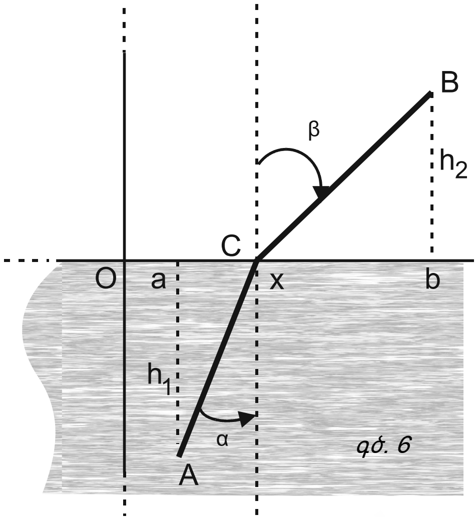
$$\min(x^2+y^2)=a^2/2; \quad \max(x^2+y^2)=a^2: \blacktriangleleft$$

Ընթերցողը կարող է ինքնուրույն պարզաբանել ստացված արդյունքի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը.

տրված $2a$ պարագծով բոլոր ուղղանկյունների շարքում ամենափոքր անկյունագիծ ունեցողը քառակուսին է:

Օրինակ 17: **Լույսի բեկման օրենքը:** Օպտիկայում հայտնի է լույսի տարածման Ֆերմայի հետևյալ սկզբունքը.

տրված միջավայրի որևէ A կետից B կետ լույսը տարածվում է այն հետագծով, որի վրա ծախսած ժամանակը, համեմատած A-ն B-ին միացնող այլ ճանապարհների հետ, փոքրագույնն է:



գծ. 6

Այն դեպքում, երբ միջավայրը համասեռ է և իզոտրոպ, լույսի հետագիծը A-ն B-ին միացնող ուղղի հատվածն է:

Հարթության վրա դիտարկենք այդպիսի երկու, իրարից տարբեր, միջավայր, որոնք բաժանված են գծ. 6-ում պատկերված հորիզոնական ուղղով (Ox առանցքով):

Լույսը A կետից B կետ տարածվելիս անցնում է Ox առանցքի C կետով:

Դիցուք ստորին կիսահարթության վրա լույսի արագությունը c_1 է, իսկ վերին կիսահարթության վրա՝ c_2: Այդ դեպքում, A-ից C ճանապարհի վրա ծախսած ժամանակը կլինի

$$t_{AC}=\frac{|AC|}{c_1}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}{c_1},$$

իսկ C-ից B տարածվելիս՝

$$t_{CB}=\frac{|CB|}{c_2}=\frac{\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}}{c_2}:$$

Պարզենք, հետևելով Ֆերմայի սկզբունքին, թե ինչպիսին պետք է լինի C կետի դիրքը, որպեսզի

$$t(x)=t_{AC}+t_{CB}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}{c_1}+\frac{\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}}{c_2}$$

ֆունկցիան ընդունի փոքրագույն արժեք:

Ունենք՝

$$t'(x)=\frac{1}{c_1}\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}}:$$

Ակնհայտ է, որ $t'(a)<0$, $t'(b)>0$: Քանի որ $t'(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, համաձայն Բոլցանո-Կոշիի թեորեմի (n° V. 2.2) a-ի և b-ի միջև գոյություն կունենա x_0 կետ, այնպիսին, որ

$$t'(x_0)=\frac{1}{c_1}\frac{x_0-a}{\sqrt{(x_0-a)^2+h_1^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{b-x_0}{\sqrt{(b-x_0)^2+h_2^2}}=0:$$

Մյուս կողմից՝

$$t''(x)=\frac{1}{c_1}\frac{h_1^2}{\left((x-a)^2+h_1^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{c_2}\frac{h_2^2}{\left((b-x)^2+h_2^2\right)^{3/2}}>0,$$

որը նշանակում է, որ $t'(x)$ ֆունկցիան ամբողջ թվային ուղղի վրա աճող է: Այստեղից, քանի որ $t'(x_0)=0$, հետևում է, որ $(-\infty;\, x_0)$-ում $t'(x_0)<0$, $(x_0;\, +\infty)$-ում $t'(x_0)>0$: Այնպես որ, x_0-ն $t(x)$ ֆունկցիայի գլոբալ մինիմումի կետ է:

Մեկ անգամ ևս օգտվենք գծ. 6-ի նշանակումներից և նկատենք, որ

$$\frac{x_0 - a}{\sqrt{(x_0 - a)^2 + h_1^2}} = \sin\alpha, \qquad \frac{b - x_0}{\sqrt{(b - x_0)^2 + h_2^2}} = \sin\beta,$$

որտեղ α -ն ու β -ն ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ լույսի հետագծի համապատասխանաբար AC և CB հատվածների թեքության անկյուններն են: Դա հաշվի առնելով՝ $t'(x_0) = 0$ հավասարությունը կարող ենք արտագրել $\frac{1}{c_1}\sin\alpha - \frac{1}{c_2}\sin\beta = 0$ կամ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

տեսքով: Սա էլ հենց երկրաչափական օպտիկայում հայտնի **լույսի բեկման օրենքն** է:

§ 3. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1°. ***Ֆունկցիայի ուռուցիկությունն ու գոգավորությունը:***

Տրված է $y = f(x)$ $(a < x < b)$ ֆունկցիան:

Սահմանում 1: *Եթե $(a;b)$ միջակայքի ցանկացած x_1, x_2 կետերի և ցանկացած α_1, α_2 ոչ բացասական թվերի համար, որոնք բավարարում են $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ պայմանին, ճշմարիտ է*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \tag{1}$$

անհավասարությունը, ապա f -ն անվանում են **ուռուցիկ** կամ **ուռուցիկությամբ վար ուղղված ֆունկցիա:**

Եթե տեղի ունի հակառակ անհավասարությունը՝

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \ge \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \tag{2}$$

ապա f -ը կոչվում է **գոգավոր** կամ **ուռուցիկությամբ վեր ուղղված ֆունկցիա**:

Պարզ է, որ և՛ $\alpha_1\alpha_2 = 0$ դեպքում, և՛ $x_1 = x_2$ դեպքում, թե՛ (1) անհավասարությունը, թե՛ (2)-ը վերածվում են հավասարության: Դա նկատի ունենալով, եթե $\alpha_1\alpha_2 \ne 0$ և $x_1 \ne x_2$ պայմաններում (1) անհավասարությունը խիստ է, ապա f -ն անվանում են **խիստ ուռուցիկ**:

Նույնը վերաբերում է գոգավորությանը:

Օգտակար է նշել նաև հետևյալ ակնհայտ փաստը, եթե f ֆունկցիան որևէ միջակայքում ուռուցիկ է, ապա $-f$ ֆունկցիան նույն այդ միջակայքում գոգավոր է:

Ձևափոխենք (1) անհավասարությունը ֆունկցիայի ուռուցիկության երկրաչափական ընկալման համար ավելի նպաստավոր տեսքի:

Նշանակենք՝

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 : \tag{3}$$

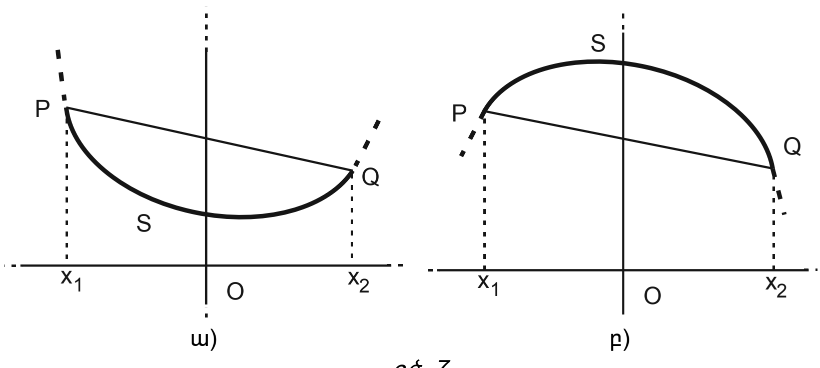
Պարզ է, որ երբ, օրինակ, $x_1 < x_2$, ապա $x_1 \le x \le x_2$: Բացի այդ, (3)-ում տեղադրելով $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, հաջորդաբար կստանանք.

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad \alpha_2 = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} : \tag{4}$$

Արդյունքում՝ (1) անհավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) : \tag{5}$$

Այժմ նկատենք, որ (5)-ի աջ մասում առկա $Y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + $ $+ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $P(x_1; f(x_1))$ և $Q(x_2; f(x_2))$ կետերով անցնող ուղիղն է: Այնպես որ, (5) անհավասարությանը՝ $y \le Y$, կարելի է տալ հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը.



գծ. 7

ուռուցիկ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած երկու՝ P և Q կետերը միացնող լարը ընկած է այդ լարը ձգող PsQ աղեղից վերև (գծ. 7ա):

Համանմանորեն, քանի որ գոգավորության դեպքում $y \ge Y$, կարող ենք ասել, որ

գոգավոր ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած P և Q կետերը միացնող լարը ընկած է իրեն ձգող PsQ աղեղից ներքև (գծ. 7բ):

2°. ***Ուռուցիկության հայտանիշներ:*** Հիմա տեսնենք, թե ուռուցիկության հետազոտման խնդրում ինչ դեր է կատարում ֆունկցիայի ածանցյալը:

Դիցուք f-ը $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է: Նախ ենթադրենք, թե f-ը ուռուցիկ է:

Դիտարկենք միջակայքի կետերի ցանկացած $x_1 < x < x_2$ եռյակ: Այդ եռյակի համար (5) անհավասարության մեջ ազատվելով հայտարարից և օգտագործելով $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$ ակնհայտ հավասարությունը՝ պարզ ձևափոխություններից հետո կհանգենք

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (6)$$

անհավասարությանը:

Կատարելով (6)-ում սահմանային անցում՝ մի դեպքում, երբ $x \to x_1$, մյուս դեպքում, երբ $x \to x_2$՝ կստանանք անհավասարությունների հետևյալ զույգը.

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2):$$

Այստեղից անմիջապես բխում է $f'(x_1) \le f'(x_2)$ անհավասարությունը: Քանի որ $x_1 < x_2$ զույգը ընտրված է կամայականորեն, նշանակում է ուռուցիկ ֆունկցիայի ածանցյալը չնվազող է:

Ցույց տանք նաև հակառակը. եթե $f'(x)$-ը $(a;b)$-ում չնվազող է, ապա f-ը ուռուցիկ է: Պետք է, փաստորեն, համոզվել, որ ցանկացած $x_1 < x < x_2$ կետերի համար ճշմարիտ է (6) անհավասարությունը:

Համաձայն Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի, գոյություն կունենան $x_1 < \xi_1 < x$ և $x < \xi_2 < x_2$ կետեր, այնպիսիք, որ

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2):$$

Քանի որ $\xi_1 < x < \xi_2$ և $f'(x)$-ը չնվազող է, ուրեմն $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$: Իսկ դա նշանակում է, որ (6) անհավասարությունը ճշմարիտ է և, հետևաբար, f -ը ուռուցիկ է:

Այսպիսով՝

տրված միջակայքում դիֆերենցելի f ֆունկցիան ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(x)$ -ը այդ միջակայքում չնվազող է:

Գոգավորության դեպքում, գրելով (6)-ին հակառակ անհավասարությունը և կրկնելով վերն արված դատողությունները, կհանգենք հետևյալին.

որպեսզի f -ը լինի գոգավոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x)$ -ը լինի չաճող:

☝ **Դիտողություն 1:** Հետևելով բերված հայտանիշների ապացուցման ընթացքին՝ կարելի է նկատել, որ f -ը խիստ ուռուցիկ է (գոգավոր է) այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(x)$ -ը աճող է (նվազող է):

Որպես հետևանք, կարող ենք ձևակերպել նաև հետևյալ հայտանիշը.

տրված միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան ուռուցիկ է (գոգավոր է) այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ միջակայքում ամենուրեք $f''(x) \ge 0$ $\quad (f''(x) \le 0)$:

➢ Իրոք, $f''(x) = \left(f'(x)\right)' \ge 0$ պայմանը համարժեք է $f'(x)$ ֆունկցիայի մոնոտոնությանը (n^{o} 1.2): Իսկ դա, իր հերթին, համարժեք է ելակետային f ֆունկցիայի ուռուցիկությանը: ≺

☝ **Դիտողություն 2:** Եթե $f''(x) > 0$, ապա $f'(x)$ ֆունկցիան աճող է և, հետևաբար, f -ը խիստ ուռուցիկ է: Հակառակը, սակայն, ինչպես ցույց է տալիս ստորև ներկայացվող օրինակը, ընդհանուր առմամբ ճշմարիտ չէ:

Օրինակ 1: $y = x^4$: Քանի որ $y' = 4x^3$ ֆունկցիան աճող է, x^4 -ը ամբողջ թվային ուղղի վրա խիստ ուռուցիկ է: Սակայն պնդել, որ $y'' = 12x^2$

ֆունկցիան դրական է, չենք կարող, քանի որ $y''(0)=0$:

Բերենք ստացված հայտանիշների մի կիրառություն:

Օրինակ 2: Ապացուցենք անհավասարությունը.

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x \;, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \;:$$

Քանի որ $(\sin x)' = \cos x$ ֆունկցիան $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$-ում նվազող է, ուստի $\sin x$-ը այդ միջակայքում խիստ գոգավոր է:

Վերցնելով (5)-ին հակառակ անհավասարության մեջ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ և հաշվի առնելով, որ $\sin 0 = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, ստանում ենք պահանջվող

$$\sin x > \frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}x$$

անհավասարությունը:

3°. ***Ուռուցիկության միջակայքեր: Շրջման կետեր:*** Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետի δ-շրջակայքում անընդհատ է:

Սահմանում 2: *Եթե $(x_0-\delta; x_0)$ միջակայքում ֆունկցիան ունի ուռուցիկության մի ուղղվածություն, իսկ $(x_0; x_0+\delta)$-ում՝ հակառակ ուղղվածությունը, ապա x_0-ն անվանում են ֆունկցիայի (գրաֆիկի) **շրջման կետ:***

Այդ դեպքում ասում են, որ x_0 կետով անցնելիս ֆունկցիան փոխում է ուռուցիկության ուղղությունը:

Շրջման կետերով, փաստորեն, ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհվում է զույգ առ զույգ չհատվող միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա ֆունկցիան որոշակիորեն կա՛մ ուռուցիկ է, կա՛մ գոգավոր: Ընդ որում, կից միջակայքերում այն ունի ուռուցիկության տարբեր ուղղվածություն:

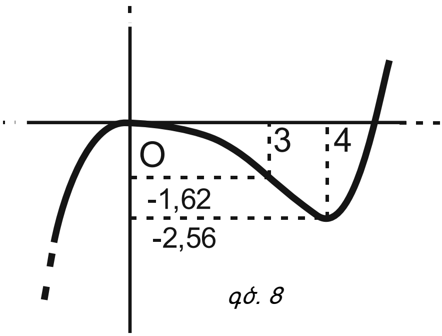
Եթե f-ը դիֆերենցելի է և, ասենք, $(x_0-\delta; x_0)$ միջակայքում ուռուցիկ է, իսկ $(x_0; x_0+\delta)$-ում՝ գոգավոր, ապա $f'(x)$-ը $(x_0-\delta; x_0)$

միջակայքում չնվազող է, $(x_0; x_0+\delta)$-ում՝ չաճող: Դա նշանակում է, որ x_0-ն $f'(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է: Հետևաբար, եթե x_0-ում f-ն ունի նաև երկրորդ ածանցյալ, ապա, համաձայն Ֆերմայի լեմմայի (n° VIII. 1.1), $f''(x_0)=\left(f'(x)\right)'_{x=x_0}=0$: Այնպես որ, $(a;b)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիայի շրջման կետերը գտնվում են $f''(x)=0$ հավասարման լուծումների կազմում: Նշենք, սակայն, որ այդ լուծումներից ոչ բոլորն են շրջման կետեր:

Օրինակ 3: Գտնենք $y=\dfrac{x^5}{100}-\dfrac{x^4}{20}$ ֆունկցիայի շրջման կետերը (գծ. 8): Ունենք՝

$$y'=\frac{5x^4}{100}-\frac{4x^3}{20}=\frac{x^3}{20}(x-4);$$

$$y''=\frac{4x^3}{20}-\frac{12x^2}{20}=\frac{x^2}{5}(x-3):$$



գծ. 8

Լուծելով $y''=0$ հավասարումը՝ գտնում ենք. $x_1=0$, $x_2=3$:

Նկատելով, որ $(-\infty;3)$ միջակայքում $y''\le 0$ և, հետևաբար, ֆունկցիան գոգավոր է, եզրակացնում ենք, որ $x_1=0\in(-\infty;3)$ կետը շրջման կետ չէ: Իսկ, ահա, $x_2=3$ կետը շրջման կետ է, քանի որ $(3;+\infty)$-ում $y''\ge 0$, ուստի այդ միջակայքում ֆունկցիան ուռուցիկ է: Փաստորեն, $x_2=3$ կետով անցնելիս ֆունկցիան գոգավորից վերածվում է ուռուցիկի:

4°. ***Իենսենի[*] անհավասարությունը:*** Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում ուռուցիկ է և երկու անգամ դիֆերենցելի: Այդ դեպքում՝

կամայականորեն ընտրված $n\ge 2$ բնական թվի, $(a;b)$ միջակայքի ցանկացած $x_1,\cdots,x_n$ կետերի և ցանկացած $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ ոչ բացասական թվերի համար, որոնք բավարարում են $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$

---

[*] **Իոհանն Լյուդվիգ Իենսեն** (1859-1923), դանիացի մաթեմատիկոս:

պայմանին, ճշմարիտ է Իենսենի հետևյալ անհավասարությունը.

$$f(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n)\le \alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n): \qquad (7)$$

➢ Նշանակենք՝

$x=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n$:

Օգտվելով Թեյլորի (10) բանաձևից (n^{o} VII. 2.2)՝ կարող ենք գրել.

$$f(x_i)=f(x)+f'(x)(x_i-x)+\frac{f''(c_i)}{2!}(x_i-x)^2, \qquad i=1,\cdots,n: \qquad (8)$$

Եթե (8)-ը բազմապատկենք α_i-ով և կատարենք ըստ i-ի գումարում, ապա կստանանք.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=f(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+f'(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f''(c_i)}{2!}(x_i-x)^2:$$

Քանի որ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i-x\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=x-x=0$,

ուստի վերջին հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{f''(c_i)}{2!}(x_i-x)^2: \qquad (9)$$

Շնորհիվ f-ի ուռուցիկության, $(a;b)$-ում ամենուրեք $f''(x)\ge 0$: Դա նշանակում է, որ (9)-ի աջ մասում գրված գումարը ($\sum$-ն) ոչ բացասական է: Հետևաբար՝

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\ge f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right):$$

Իսկ սա, ինչպես տեսնում ենք, նույն (7) անհավասարությունն է: ≺

Այն դեպքում, երբ f-ը գոգավոր է, (7)-ը փոխարինվում է հակառակ անհավասարությամբ:

☝ Դիտողություն: Եթե $(a;b)$-ում $f''(x)>0$ (f-ը խիստ ուռուցիկ է *)

---

* Տես n^{o} 2-ում արված դիտողություն 2-ը:

և, բացի այդ, α_i թվերից ոչ մեկը զրո չէ, ապա (7)-ում հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $x_1 = \cdots = x_n$:

Օրինակ 4: Ապացուցենք n թվերի միջին երկրաչափականի և միջին թվաբանականի միջև հետևյալ դասական անհավասարությունը.

ցանկացած $a_1, \cdots, a_n$ ոչ բացասական թվերի համար՝

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} :$$

➢ Դիտարկենք $y = \ln x \quad (x > 0)$ ֆունկցիան: Քանի որ

$$y'' = (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0 ,$$

ֆունկցիան $(0; +\infty)$ -ում խիստ գոգավոր է:

Գրելով (7)-ին հակառակ անհավասարությունը՝ կստանանք.

$$\alpha_1 \ln a_1 + \cdots + \alpha_n \ln a_n \le \ln(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n) \quad (a_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n)$$

կամ՝

$$a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n : \tag{10}$$

Տեղադրելով (10)-ում $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$, կհանգենք պահանջվող անհավասարությանը: Մնում է նկատել, որ անհավասարությունը կմնա ուժի մեջ նաև այն դեպքում, երբ a_i թվերից որևէ մեկը կամ մի քանիսը զրո են: ≺

§ 4. ԼՈՊԻՏԱԼԻ ԿԱՆՈՆԸ

1°. *Լոպիտալի[*] կանոնը $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության համար:*

Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $(a;b)$ միջակայքում և դիֆերենցելի են, ընդ որում՝ $g'(x) \ne 0$:

Այն դեպքում, երբ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 , \tag{1}$$

[*] **Գիյոմ Ֆրանսուա Լը Հոպիտալ** (1661-1704), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մարքիզ:

f/g քանորդի սահմանը n^{o} IV. 4.4-ում բերված կանոնով հաշվելիս հանգում ենք $0/0$ տեսքի անորոշության:

Այդպիսի անորոշության պարզեցման Լոպիտալի կանոնը հետևյալն է.

եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա* f/g *-ը նույնպես ունի սահման, ընդ որում՝*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}: \qquad (2)$$

➢ Լրացնենք ֆունկցիաների որոշման տիրույթը $x=a$ կետով, ընդունելով՝ $f(a)=0$, $g(a)=0$: Այդ դեպքում (1) պայմանից կհետևի, որ թե՛ f -ը, թե՛ g -ն ցանկացած $a<x<b$ արժեքի համար $[a;x]$ հատվածում անընդհատ են:

Օգտվելով Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևից (n^{o} VII. 1.4)՝ կարող ենք գրել.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \qquad (a<\xi<x):$$

Մնում է նկատել, որ $x\to a \Rightarrow \xi\to a$, ուստի

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}: \prec$$

Օրինակ 1: Հաշվենք $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}$ սահմանը: Ունենք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{3}:$$

Դիտարկենք, այժմ, այն դեպքը, երբ f և g ֆունկցիաները որոշված են $(a;+\infty)$ միջակայքում և պահանջվում է հաշվել $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ սահմանը:

Դիցուք, ինչպես և վերևում, f-ը և g-ն $(a;+\infty)$-ում դիֆերենցելի են, $g'(x)\neq 0$ և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$:

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ սահմանը, ապա գոյություն ունի նաև f/g-ի սահմանը, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}: \qquad (2')$$

➢ Կատարենք անկախ փոփոխականի $x=1/u$ փոխարինում:

Նկատելով, որ $(x\to+\infty)\Leftrightarrow(u\to+0)$, կարող ենք գրել.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to+0}\frac{f(1/u)}{g(1/u)}:$$

Եթե, այժմ, օգտվենք Լոպիտալի (2) կանոնից, ապա կստանանք.

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(1/u)}{g(1/u)}=\lim_{u\to+0}\frac{\left(f(1/u)\right)'_u}{\left(g(1/u)\right)'_u}=\lim_{u\to+0}\frac{f'(1/u)\cdot(-1/u^2)}{g'(1/u)\cdot(-1/u^2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}: \prec$$

✌ **Դիտողություն 1:** Եթե Լոպիտալի կանոնի միանվագ կիրառման արդյունքում վերստին հանգում ենք անորոշության, ապա կարող ենք կանոնից օգտվել ևս մեկ, իսկ հարկ եղած դեպքում՝ նաև մի քանի անգամ:

Օրինակ 2: Հաշվենք $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+6x+3x^2+x^3-6e^x}{(x^2-5x^3)(1-\cos 4x)}$ սահմանը:

Մինչ Լոպիտալի կանոնը կիրառելը, ձևափոխենք կոտորակը, աճանցման հետևանքով հայտարարում առաջացող ծավալուն արտահայտություններից խուսափելու համար:

Ունենք՝

$$(x^2-5x^3)(1-\cos 4x)=x^2(1-5x)\cdot 2\sin^2 2x=$$

$$=2x^2(1-5x)\frac{\sin^2 2x}{4x^2}\cdot 4x^2=8x^4(1-5x)\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2:$$

Քանի որ $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=1$, մնում է հաշվել միայն հետևյալ սահմանը.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+6x+3x^2+x^3-6e^x}{8x^4}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{(6+6x+3x^2+x^3-6e^x)'}{(x^4)'}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{6+6x+3x^2-6e^x}{4x^3}=\frac{1}{32}\lim_{x\to 0}\frac{6+6x-6e^x}{3x^2}=\frac{1}{32}\lim_{x\to 0}\frac{6-6e^x}{6x}=$$

$$=-\frac{1}{32}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=-\frac{1}{32}:$$

☝ **Դիտողություն 2:** Ինչպես տեսնում ենք, օրինակ 2-ում Լոպիտալի կանոնը կիրառվեց երեք անգամ: Նշենք, որ յուրաքանչյուր անգամ, նախքան (2) բանաձևից օգտվելը, պետք է համոզվել, որ կատարվում են կանոնին առնչվող բոլոր պայմանները: Այլապես, ինչպես ցույց կտրվի հաջորդ օրինակում, կուրորեն կիրառելով այն, կարող ենք հանգել սխալ արդյունքի:

Օրինակ 3: Ակնհայտ է, որ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3-\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3-\cos x)}=\frac{1}{2}:$$

Միևնույն ժամանակ՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)'}{(3-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=2:$$

Այստեղ, ինչպես տեսնում ենք, խախտված է (2) հավասարությունը: Դա հետևանք է այն բանի, որ դիտարկվող կոտորակի համարիչն ու հայտարարը (1) պայմանին չեն բավարարում:

2°. *Լոպիտալի կանոնը $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշության համար:*

Ներկայացնենք (առանց ապացուցման) Լոպիտալի կանոնի ևս մի օգտակար տարբերակ:

Դիցուք, ինչպես և նախորդ կետում, f և g ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են, և $g'(x) \neq 0$:

Այն դեպքում, երբ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty, \tag{3}$$

գործում է Լոպիտալի հետևյալ կանոնը.

եթե գոյություն ունի

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{4}$$

վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա f/g կոտորակը նույնպես ունի սահման, համապատասխանաբար վերջավոր կամ անվերջ, ընդ որում`

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A:$$

Նշենք, որ կանոնը ուժի մեջ է նաև այն դեպքում, երբ $A = -\infty$, կամ $a = \pm\infty$:

Օրինակ 4: Հաշվենք $\lim\limits_{x\to +0} x\ln^2 x$ սահմանը: Սա, ինչպես տեսնում ենք, հանգեցնում է $0\cdot\infty$ տեսքի անորոշության: Պարզ ձևափոխությամբ բերելով այն ∞/∞ տեսքի և երկու անգամ կիրառելով Լոպիտալի կանոնը` կստանանք.

$$\lim_{x\to +0} x\ln^2 x = \lim_{x\to +0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} = \lim_{x\to +0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -2\lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} =$$

$$= -2\lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-x^{-2}} = 2\lim_{x\to +0} x = 0:$$

Օրինակ 5: Գտնենք $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ սահմանը: Այստեղ ունենք $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն: Բերելով արտահայտությունը ընդհանուր հայտարարի` հանգում ենք $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության` ըստ այդմ հնարավորություն ստանալով կիրառելու Լոպիտալի կանոնը: Եվ այսպես`

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}:$$

§ 5. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

1°. ***Գրաֆիկի կառուցման պլանը:*** Տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան: Հաշվի առնելով ֆունկցիայի հետազոտման նպատակով այս գլխում մշակված դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները՝ կազմում ենք գրաֆիկի կառուցման հետևյալ պլանը.

1) այն դեպքում, երբ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը առանձնահատուկ նշված չէ, որպես այդպիսին վերցնում ենք $f(x)$ արտահայտության ԹԱԲ-ը (n^{o} II. 2.1);

2) եթե որոշման տիրույթը բաղկացած է զույգ առ զույգ չհատվող վերջավոր կամ անվերջ միջակայքերից, ապա ուսումնասիրում ենք ֆունկցիայի վարքը միջակայքերի եզրային կետերում, այդ թվում՝ $-\infty$-ում և $+\infty$-ում;

3) հետազոտում ենք ֆունկցիան զույգության, կենտության և պարբերականության առումով;

4) հնարավորության դեպքում գտնում ենք կոորդինատային առանցքների հետ գրաֆիկի հատման կետերը;

5) հաշվում ենք ֆունկցիայի ածանցյալը և գտնում կրիտիկական կետերը;

6) որոշում ենք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, գտնում էքստրեմումի կետերը և էքստրեմալ արժեքները;

7) հաշվում ենք ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը, գտնում գրաֆիկի շրջման կետերը և նշում ուռուցիկության միջակայքերը;

8) անհրաժեշտության դեպքում անցկացնում ենք ֆունկցիայի լրացուցիչ հետազոտություն և բացահայտում գրաֆիկի այլ առանձնահատկություններ:

Եթե անդրադառնանք n^{o} II. 2.3-ում բերված հիմնական տարրական ֆունկցիաներին և անցկացնենք հետազոտություն ըստ առաջադրված պլանի, ապա կհամոզվենք, որ դրանց գրաֆիկները պիտի լինեին հենց այնպիսին, ինչպես պատկերված են այդտեղ:

Մասնավորապես, օրինակ, սինուսոիդի համար (n^{o} II. 2.7, գծ. 23), ինչպես տեսնում ենք, $x=\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})$ կետերը շրջման կետեր են: Այդ տպավորությունն այստեղ հաստատվում է այն փաստով, որ, նախ, հենց այդ կետերն են $y''=-\sin x=0$ հավասարման լուծումները: Բացի այդ, $[\pi k;\ \pi(k+1)]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում y''-ն ունի որոշակի նշան, կախված k-ի զույգություն-կենտությունից, իսկ πk կետերով անցնելիս այն ամեն անգամ փոխում է իր նշանը:

Անցնենք մի քանի այլ ֆունկցիաների դիտարկմանը:

Օրինակ 1: $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ (Անիեզիի խոպոպ):

Ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային ուղղի վրա:

Որպես որոշման տիրույթի «եզրային կետեր» հանդես են գալիս միայն $-\infty$-ը և $+\infty$-ը: Ընդ որում՝

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^3}{x^2+a^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^3}{x^2+a^2}=0:$$

Քանի որ ամենուրեք $y>0$*, կարող ենք ասել, որ կոորդինատների սկզբնակետից անվերջ հեռանալիս գրաֆիկի ճյուղերը անվերջ մոտենում են Ox առանցքին՝ շարունակ մնալով վերին կիսահարթությունում:

Ֆունկցիան զույգ է և ոչ պարբերական: Զույգությունից հետևում է, որ գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ:

Ակնհայտ է, որ $y=0$ հավասարումը լուծում չունի, այնպես որ, գրաֆիկը Ox առանցքի հետ չի հատվում: Իսկ, ահա, Oy-ի հետ այն հատվում է $(0;a)$ կետում:

Այժմ դիմենք դիֆերենցիալ հաշվի միջոցներին:

Ունենք՝

$$y'=-\frac{2a^3x}{(x^2+a^2)^2}:$$

Նկատելով, որ $(-\infty;0)$-ում $y'>0$, իսկ $(0;+\infty)$-ում $y'<0$, եզրակացնում ենք, որ $(-\infty;0)$-ում ֆունկցիան աճում է, իսկ $(0;+\infty)$-ում՝ նվազում: Այդտեղից իսկույն հետևում է, որ 0-ն՝ ֆունկցիայի միակ կրիտիկական կետը, գլոբալ մաքսիմումի կետ է: Ընդ որում՝

---

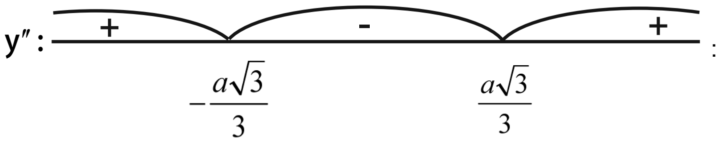
* Ենթադրվում է, որ $a>0$:

$\max y = y(0) = a$ ։

Հաշվելով երկրորդ ածանցյալը՝ ստանում ենք.

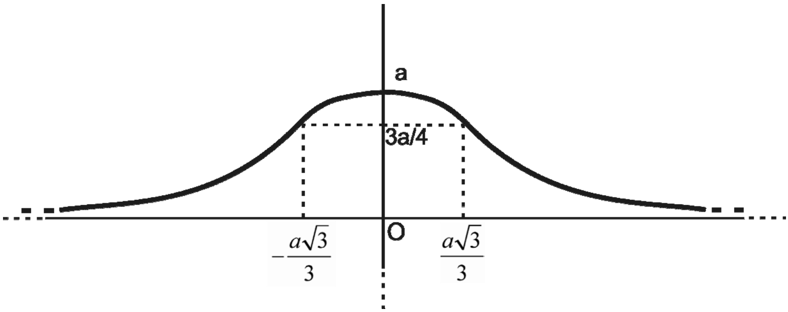
$$y'' = \frac{2a^3}{(x^2+a^2)^3}(3x^2-a^2)\text{ ։}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ y''-ի նշանը համընկնում է $3x^2-a^2$ արտահայտության նշանին։ Այնպես որ, ունենք y''-ի նշանների դասավորության հետևյալ պատկերը.

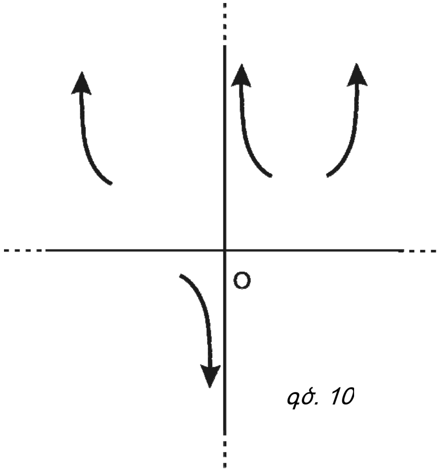


Այսպիսով, ֆունկցիան $\left(-\infty; -a\sqrt{3}/3\right)$ և $\left(a\sqrt{3}/3; +\infty\right)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ուռուցիկ է, իսկ $\left(-a\sqrt{3}/3; a\sqrt{3}/3\right)$-ում՝ գոգավոր։ Դա նաև նշանակում է, որ $\pm a\sqrt{3}/3$ կետերը գրաֆիկի շրջման կետեր են։

Հիմա, արդեն, հնարավոր ամեն ինչ արված է ֆունկցիայի բավականաչափ ճշգրիտ գրաֆիկն ուրվագծելու համար (գծ. 9)։



գծ. 9



գծ. 10

Օրինակ 2: $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

(Նյուտոնի եռաժանի):

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(-\infty; 0)\bigcup(0; +\infty)$ բազմությունն է:

Հաշվենք ֆունկցիայի սահմանները $-\infty$, 0 և $+\infty$ եզրային կետերում.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} y = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-0} y = -\infty, \qquad \lim_{x\to+0} y = +\infty:$$

Ուշագրավ է այն երևույթը, որ x-ը ∞-ի ձգտելիս գրաֆիկի ճյուղերը, որքանով որ $1/x \to 0$, անվերջ մոտենում են $y = x^2$ պարաբոլի ճյուղերին: Իսկ երբ $x \to 0$ (0-ի բավականաչափ փոքր շրջակայքում), գրաֆիկը սկսում է նմանվել $y = 1/x$ հիպերբոլին (գծ. 10):

Ինչպես տեսնում ենք (գծ. 10), արդեն իսկ նշմարվում են եռաժանու վեր ուղղված «ժանիքները» և Oy առանցքին մոտեցող ու վար ուղղված «ձողը»:

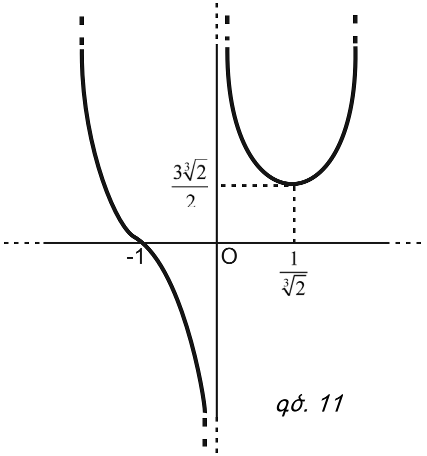
Քանի որ 0-ն չի պատկանում որոշման տիրույթին, ուստի գրաֆիկը Oy-ի հետ հատում չունի: Լուծելով $x^2 + \dfrac{1}{x} = 0$ հավասարումը՝ գտնում ենք Ox-ի հետ հատման միակ՝ $(-1; 0)$ կետը:

Այնուհետև.

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}:$$

Պարզ է, որ $(-\infty; 0)$ և $\left(0;\, 1/\sqrt[3]{2}\right)$ միջակայքերում $y' < 0$, իսկ $\left(1/\sqrt[3]{2};\, +\infty\right)$-ում $y' > 0$: Դա նշանակում է, որ $(-\infty; 0)$ և $\left(0;\, 1/\sqrt[3]{2}\right)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան նվազող է, իսկ $\left(1/\sqrt[3]{2};\, +\infty\right)$-ում՝ աճող: Հետևաբար, $x = 1/\sqrt[3]{2}$ կետը ներքին լոկալ մինիմումի կետ է.

$x_{\min} = 1/\sqrt[3]{2}$, $\quad y_{\min} = 3\sqrt[3]{2}/2$:



գծ. 11

Հաշվենք ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը.

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = 2 \cdot \frac{x^3+1}{x^3}:$$

Ունենք՝

$y''(-1) = 0$,

$y'' > 0$,

երբ $x \in (-\infty; -1) \bigcup (0; +\infty)$,

$y'' < 0$, երբ $x \in (-1; 0)$:

Փաստորեն, $(-\infty; -1)$ և $(0; +\infty)$ միջակայքերում ֆունկցիան ուռուցիկ է, իսկ $(-1; 0)$-ում՝ գոգավոր: Այնպես որ, $x = -1$ կետը գրաֆիկի շրջման կետ է (գծ. 11):

2°. ***Ասիմպտոտներ:*** Որոշման տիրույթի եզրային կետի շրջակայքում ֆունկցիան հետազոտելիս շատ կարևոր է այսպես կոչված «ասիմպտոտի» բացահայտումը: Դա էապես հստակեցնում է ֆունկցիայի վարքը այդպիսի կետում և, ըստ այդմ, հնարավորություն է տալիս առավել ճշգրիտ ուրվագծելու գրաֆիկի դեպի անվերջություն հեռացող ճյուղերը:

Սահմանում 1: *$y = kx + \beta$ ուղիղը կոչվում է $y = f(x)$, $x \in (a; +\infty)$, ֆունկցիայի գրաֆիկի* ***ասիմպտոտ (թեք ասիմպտոտ)*** *$+\infty$-ում, եթե*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (kx + \beta) \right) = 0: \qquad (1)$$

Եթե ֆունկցիան որոշված է $(-\infty; b)$ միջակայքում, ապա նույն ձևով սահմանվում է ասիմպտոտ $-\infty$-ում:

Սահմանում 2: *$x - c = 0$ ուղիղն անվանում են f ֆունկցիայի գրաֆիկի* ***ասիմպտոտ (ուղղաձիգ ասիմպտոտ)*** *$x = c$ կետում, եթե*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty : \tag{2}$$

Քանի որ (1)-ում $x \to +\infty$, կարող ենք գրել.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(kx+\beta)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{\beta}{x}\right) = 0 :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով, որ $\beta/x \to 0$, k-ի համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} : \tag{3}$$

Տեղադրելով k-ի արժեքը (1)-ում՝ կստանանք՝

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) : \tag{4}$$

Նկատենք, որ եթե (3) և (4) սահմաններից որևէ մեկը գոյություն չունի կամ անվերջ է, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը $+\infty$-ում ասիմպտոտ չունի:

Նույնը վերաբերում է $-\infty$-ում ասիմպտոտի գոյությանը:

Հիշենք, որ «ասիմպտոտ» տերմինը այս դասընթացում մեզ հանդիպել է երկու անգամ և երկու դեպքում էլ այն կապված է եղել հիպերբոլի հետ: Առաջին անգամ դա n° II. 3.3-ում էր (գծ. 13), երբ կոորդինատային առանցքները ներկայացվեցին որպես $y = c/x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի՝ հիպերբոլի ասիմպտոտներ: Իսկ երկրորդ անգամ, n° II. 4.3-ում (գծ. 18), որպես կանոնական դիրքում գտնվող հիպերբոլի ասիմպտոտներ ներկայացվեցին $y = \pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները:

Հիմա, արդեն, դա կարող ենք հիմնավորել՝ ելնելով այստեղ տրված սահմանումներից:

Նախ, առաջին դեպքում, քանի որ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x} = 0$, ուստի, ըստ սահմանում 1-ի, $y = 0$ ուղիղը՝ Ox առանցքը, $y = c/x$ հիպերբոլի թեք, իսկ ավելի որոշակի՝ հորիզոնական* ասիմպտոտ է թե՛ $-\infty$-ում, թե՛ $+\infty$-ում:

---

* Հիշենք, որ հորիզոնական ուղիղները դասվում են թեք (Oy առանցքի նկատմամբ թեքված) ուղիղների շարքին:

Իսկ այն, որ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=\infty$, նշանակում է, ըստ սահմանում 2-ի, որ $x=0$ ուղիղը՝ Oy առանցքը, ուղղաձիգ ասիմպտոտ է:

Ինչ վերաբերում է երկրորդ դեպքին, ապա հիշենք, որ կանոնական դիրքում տրված հիպերբոլը ստացվեց որպես

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

հավասարումով որոշվող կոր: Քանի որ այն, ամբողջությամբ վերցված, որոշակի ֆունկցիայի գրաֆիկ չէ*, այդ պատճառով հիպերբոլի կոորդինատային յուրաքանչյուր քառորդում պարփակված ճյուղն առանձին են դիտարկում:

Դժվար չէ տեսնել, օրինակ, որ հիպերբոլի I քառորդում ընկած ճյուղն իրենից ներկայացնում է (5) հավասարումից «որոշվող»

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,,\quad x\in[a;+\infty)\,,$$

ֆունկցիայի գրաֆիկ: Ելնելով (3) և (4) բանաձևերից՝ հաջորդաբար գտնում ենք.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a};$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0:$$

Այսպիսով, $y=\dfrac{b}{a}x$ ուղիղը, իսկապես, (5) հավասարումով որոշվող հիպերբոլի ասիմպտոտ է:

Ընթերցողը ինքնուրույն կարող է համոզվել, որ նույն այդ ուղիղը հիպերբոլի III քառորդում ընկած ճյուղի՝ (5) հավասարումից որոշվող

---

* Տես n° II. 2.2-ում ասվածը:

$$y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,,\qquad x\in(-\infty;-a]\,,$$

ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտն է $-\infty$-ում: Կարելի է նաև օգտվել կոորդինատային առանցքների նկատմամբ հիպերբոլի համաչափությունից և անմիջապես ստանալ, որ $y=-\frac{b}{a}x$ ուղիղը II և IV քառորդներում պարփակված ճյուղերի ընդհանուր ասիմպտոտն է:

Օրինակ 3: $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ պարաբոլը, ասիմպտոտ չունի: Ուղղաձիգ ասիմպտոտի բացակայությունը պայմանավորված է նրանով, որ ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է և, հետևաբար, թվային ուղղի ոչ մի կետում ∞-ի չի ձգտում: Քանի որ, նաև,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty\,,$$

ուրեմն $\pm\infty$-ում էլ պարաբոլը ասիմպտոտներ չունի:

Որպեսզի տպավորություն չստեղծվի, թե ասիմպտոտի առկայությունը հատուկ է միայն հիպերբոլներին, բերենք ֆունկցիայի օրինակ, որի գրաֆիկը հիպերբոլ չէ, բայց որը, այդուհանդերձ, ունի և́ թեք, և́ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ:

Օրինակ 4: $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը

$(-\infty;0]\bigcup(1;+\infty)$ բազմությունն է:

Քանի որ $\lim\limits_{x\to1+0}y=+\infty$, ուստի $x=1$ ուղիղը գրաֆիկի ուղղաձիգ ասիմպտոտ է:

Պարզենք թեք ասիմպտոտների գոյության հարցը:

Ելնելով (3) և (4) բանաձևերից՝ ստանում ենք.

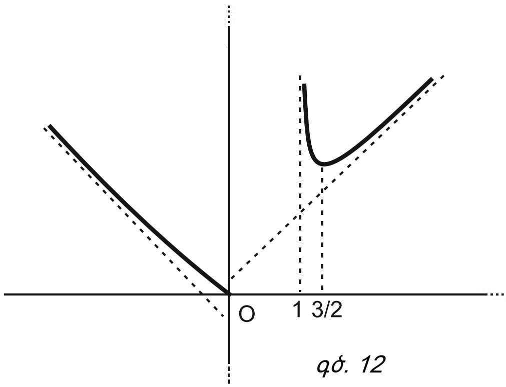
$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=-1\,,$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-(-x)\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\frac{1-\dfrac{x}{x-1}}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}} = -\frac{1}{2}:$$

(օգտագործվեց այն փաստը, որ $x<0$ դեպքում $\sqrt{x^2}=|x|=-x$):

Այսպիսով, $y=-x-1/2$ ուղիղը ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտ է $-\infty$-ում:



գծ. 12

Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ $+\infty$-ում $y=x+1/2$ ուղիղն է գրաֆիկի ասիմպտոտ:

Շարունակելով հետազոտել ֆունկցիան՝ գտնում ենք.

$$y'=\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}},$$

$$y''=\frac{3x}{4(x-1)^3}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}:$$

Նկատելով, որ $(-\infty;0)$ և $(1;3/2)$ միջակայքերում $y'<0$, իսկ $(3/2;+\infty)$-ում $y'>0$, եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիան առաջին երկու միջակայքերից յուրաքանչյուրում նվազող է, իսկ երրորդում՝ աճող: Այստեղից հետևում է, որ $x=3/2$ կետը ներքին լոկալ մինիմումի կետ է, ընդ որում՝ $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{27}}{2}\approx 2,6$:

Դժվար չէ տեսնել, որ y''-ը թե՛ $(-\infty;0)$ միջակայքում, թե՛ $(1;+\infty)$-ում դրական է: Դա նշանակում է, որ այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան ուռուցիկ է (ուռուցիկությամբ ուղղված է դեպի վար) (գծ. 12):

3°. ***Պարամետրական հավասարումներով տրված կորի հետազոտումը:*** Դիտարկենք

$x=x(t)$,

$y=y(t)$, $\alpha<t<\beta$,

պարամետրական հավասարումների զույգը, որտեղ $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են:

Եթե $(t_0; T) \subset (\alpha; \beta)$ միջակայքում $x'(t)$ ածանցյալը պահպանում է նշանը, ապա այդտեղ $x(t)$-ն խիստ մոնոտոն է և, հետևաբար, հակադարձելի: Համադրելով $t = t(x)$ հակադարձ ֆունկցիան $y(t)$-ի հետ՝ ստանում ենք y կոորդինատի անմիջական կախումը x-ից. $y = y(t(x))$ (n$^{\text{o}}$ VI. 2.4):

Տրոհելով $(\alpha; \beta)$-ն առանձին միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա $x'(t)$-ն պահպանում է որոշակի նշան՝ ստանում ենք կորի տրոհում առանձին աղեղների, որոնցից ամեն մեկը ինչ-որ մի ֆունկցիայի գրաֆիկ է: Այդ կերպ հնարավորություն ենք ձեռք բերում կորի հետազոտման գործում ներգրավելու նաև դիֆերենցիալ հաշվի միջոցները:

Հիշեցնենք, որ $y = y(t(x))$ ֆունկցիայի ածանցյալների համար n$^{\text{o}}$ VII. 2.4-ում ստացել ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad y''_{x^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)\right)^3}:$$

Անցնենք օրինակներին:

Օրինակ 5: $x = \operatorname{sh} t - t$, $y = \operatorname{ch} t - 1$, $-\infty < t < +\infty$:

Հիպերբոլական $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$ և $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$ ֆունկցիաներին ծանոթացել ենք գլ. VI-ի վերջում բերված վարժություն 8-ում: Ի հավելումն այդտեղ թվարկված հատկությունների, նշենք նաև, որ $\operatorname{ch} t$-ն, հետևաբար և $(\operatorname{ch} t - 1)$-ը, զույգ ֆունկցիա է, իսկ $\operatorname{sh} t$-ն, ուրեմն և $(\operatorname{sh} t - t)$-ն, կենտ: Դա նշանակում է, որ պարամետրի t և $-t$ արժեքներին համապատասխանող կորի $(x(t);\, y(t))$ և $(x(-t);\, y(-t)) = (-x(t);\, y(t))$ կետերը Oy առանցքի նկատմամբ միմյանց համաչափ են: Այնպես որ, կորն ինքը նույնպես համաչափ է:

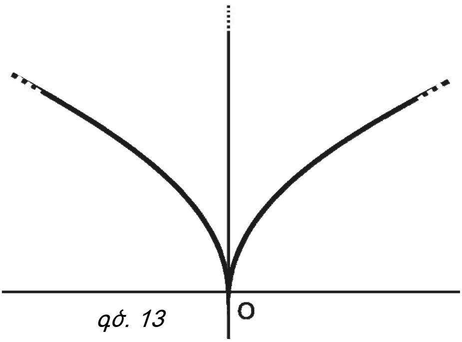
Այնուհետև, քանի որ $x(0) = y(0) = 0$, կորն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Իսկ $\operatorname{ch} t - 1 > 0$ $(t \neq 0)$ անհավասարությունից (ստուգե՛լ) հետևում է, որ կորն ընկած է վերին կիսահարթությունում:

Նկատենք, վերջապես, որ $(t\to\pm\infty)\Leftrightarrow(x\to\pm\infty)$:

Դիմենք, այժմ, ածանցյալներին: Ունենք՝

$x'(t)=\operatorname{ch}t-1$, $\qquad y'(t)=\operatorname{sh}t$:

Քանի որ $x'(t)\geq 0$, ընդ որում $x'(t)=0$ միայն $t=0$ դեպքում, ուստի $x(t)$-ն t-ի փոփոխման ողջ տիրույթում աճող է և, հետևաբար, հակադարձելի: Այդտեղից եզրակացնում ենք, որ կորը ամբողջությամբ իրենից ներկայացնում է որոշակի $y=y(t(x))$ $(x\in\mathbb{R})$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:



գծ. 13

Օգտվելով վերը բերված բանաձևերից՝ գտնում ենք.

$$y'_x=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t-1},$$

$$y''_{x^2}=-\frac{1}{(\operatorname{ch}t-1)^2},\quad t\neq 0:$$

Հիմա նկատենք, որ $t<0$ կամ, որ նույնն է, $x<0$ դեպքում $y'_x<0$, իսկ $x>0$ $(t>0)$ դեպքում $y'_x>0$: Սա նշանակում է, որ $y(x)=y(t(x))$ ֆունկցիան $(-\infty;\,0)$-ում նվազող է, իսկ $(0;+\infty)$-ում՝ աճող (գծ. 13):

Ինչ վերաբերում է երկրորդ ածանցյալին, ապա այն թե՛ $(-\infty;\,0)$-ում, թե՛ $(0;+\infty)$-ում բացասական է, այնպես որ, ֆունկցիան այդ միջակայքերից երկուսում էլ, առանձին վերցված, գոգավոր է:

Լրացուցիչ հաշվելով $y'(0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{y(t(x))-y(t(0))}{x}=\lim\limits_{t\to-0}\dfrac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{sh}t-t}=$ $=\lim\limits_{t\to-0}\dfrac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t-1}=\lim\limits_{t\to-0}\dfrac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}t}=-\infty$ սահմանը* և հաշվի առնելով կորի համաչափությունը՝ համոզվում ենք, որ Oy առանցքը I և II քառորդներում ընկած ճյուղերի ընդհանուր ուղղաձիգ շոշափողն է (n° VI. 1.6):

Օրինակ 6: $x=t\ln t$, $\qquad y=\dfrac{\ln t}{t}$, $\quad t\in(0;\,+\infty)$:

---

* Սահմանը հաշվելիս երկու անգամ օգտվեցինք Լոպիտալի կանոնից:

Նախ ուսումնասիրենք կորի վարքը պարամետրի փոփոխման տիրույթի եզրային կետերում.

$$\lim_{t\to+0} x(t) = \lim_{t\to+0} t\ln t = 0,$$

$$\lim_{t\to+0} y(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\ln t}{t} = -\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0^{*}:$$

Այսքանից, արդեն, կարող ենք եզրակացնել, որ կոորդինատային Ox և Oy առանցքները կորի համապատասխանաբար հորիզոնական և ուղղաձիգ ասիմպտոտներ են.

Այնուհետև, կորն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով $(t=1)$, ընդ որում՝ դա առանցքների հետ հատման միակ կետն է:

Այն փաստից, որ $x(t)y(t) = \ln^2 t > 0 \quad (t \neq 1)$, հետևում է, որ կորն ամբողջությամբ ընկած է կոորդինատային I և III քառորդներում:

Ուշադրություն դարձնենք ևս մի հետաքրքիր առանձնահատկության վրա: Քանի որ

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} = -y(t),$$

$$y\left(\frac{1}{t}\right) = t\ln\frac{1}{t} = -t\ln t = -x(t),$$

նշանակում է պարամետրի t և $1/t$ արժեքներին համապատասխանող կետերը $y=-x$ ուղղի նկատմամբ համաչափ են դասավորված: Հետևաբար, $t\in(0;1)$ և $t\in(1;+\infty)$ արժեքներին համապատասխանող կորի ճյուղերը այդ ուղղի նկատմամբ մեկմեկու համաչափ են:

Ածանցյալների համար ունենք.

$$x'(t) = 1+\ln t, \qquad y'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2};$$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)},$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)} = 2\frac{(\ln t-\sqrt{2})(\ln t+\sqrt{2})}{t^3(\ln t+1)^3}:$$

---

[*] Այս սահմանների կապակցությամբ տես գլուխ IV-ի վերջում վարժություններ 8-ը և 9-ը: Կարելի է նաև օգտվել Լոպիտալի կանոնից:

Հաշվի առնելով կորի համաչափությունը՝ սահմանափակվենք պարամետրի միայն $1 \le t < +\infty$ արժեքներով: Այդ արժեքների դեպքում $x'(t) > 0$, հետևաբար, կորի առանձնացված ճյուղը որոշակի $y = y(t(x))$ $(0 \le x < +\infty)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ է*:

Լուծելով $y'_x = 0$ հավասարումը՝ գտնում ենք.

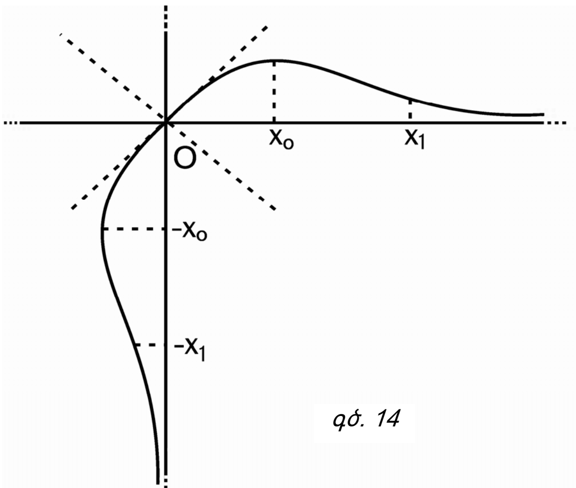
$t_0 = e$, $x_0 = x(t_0) = x(e) = e$:

Նկատելով, նաև, որ $y'_x > 0$, երբ $x \in (0;e)$ $(1 \le t < e)$ և $y'_x < 0$, երբ $x \in (e;+\infty)$, եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիան $[0;e]$ միջակայքում աճող է, իսկ $[e;+\infty)$-ում՝ նվազող: Այնպես որ, $x_0 = e$ կետը մաքսիմումի կետ է.

$x_0 = x_{\max} = e$, $y_0 = y_{\max} = \dfrac{1}{e}$:

Այնուհետև, $t \in (1;e^{\sqrt{2}})$ արժեքների դեպքում $y''_{x^2} < 0$, իսկ $t \in (e^{\sqrt{2}};+\infty)$ արժեքների դեպքում $y''_{x^2} > 0$: Դա նշանակում է, որ $0 < x < \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ միջակայքում ֆունկցիան գոգավոր է, իսկ $\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} < x < +\infty$ միջակայքում՝ ուռուցիկ: Ընդ որում՝ $x_1 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ կետը շրջման կետ է:

Մնում է ստացված տվյալների հիման վրա ուրվագծել առանձնացված ճյուղը և $y = -x$ ուղղի նկատմամբ կատարել հայելային անդրադարձում (գծ. 14):



գծ. 14

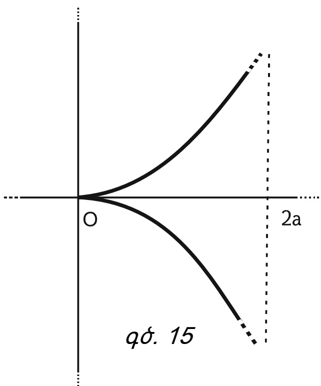
Կոորդինատների սկզբնակետը կորի համաչափ ճյուղերի միացման կետն է: Դրա համար արժե առանձնահատուկ նշել. քանի որ $y'_x\big|_{x=o} = 1$, ուստի $y = x$ ուղիղը կորին սկզբնակետով տարված շոշափողն է:

* Իհարկե, կարելի է t-ի փոփոխման տիրույթը ընդլայնել՝ վերցնելով $1/e < t < +\infty$: Բայց, նախընտրելի է կորի համաչափ ճյուղերն առանձին-առանձին դիտարկել:

4°. ***Մի քանի նշանավոր կորեր:*** Այստեղ կներկայացնենք երկու անհայտով հավասարումով որոշվող կամ բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված դասական կորեր, որոնք հետաքրքրություն են ներկայացնում թե՛ ճանաչողական առումով, թե՛ իրենց երկրաչափական կամ մեխանիկական կառուցվածքով: Այդ կորերի մանրակրկիտ հետազոտումը մեր դասընթացի ծրագրից դուրս է: Այնպես որ, կբավարարվենք միայն դրանց թռուցիկ մեկնաբանություններով:

Օրինակ 7: $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ (Դիոկլեսի* ցիսոիդ կամ պատատուկի տերև):

Դիոկլեսի կողմից այս կորի ուսումնասիրման անհրաժեշտությունը ծագել է անտիկ դարաշրջանում մեծ հետաքրքրություն առաջացրած, այսպես կոչված, «խորանարդի ծավալի կրկնապատկման» խնդրի կապակցությամբ: Խոսքը, ըստ էության, կարկինի ու քանոնի միջոցով տրված միավոր հատվածից $\sqrt[3]{2}$ երկարության հատված ստանալու մասին է:



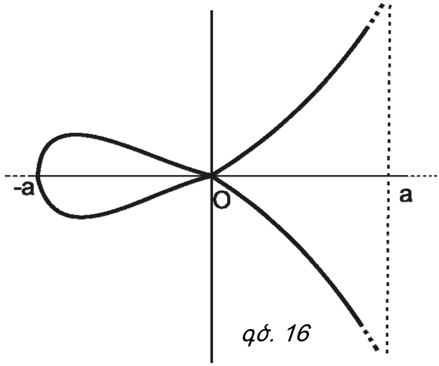
գծ. 15

Կորը, ինչպես տեսնում ենք (գծ. 15), Ox առանցքի նկատմամբ համաչափ է: Քանի որ $\lim\limits_{x\to 2a} y = \infty$, $x = 2a$ ուղիղը ցիսոիդի ուղղաձիգ ասիմպտոտ է: Առանձնացնելով կորի I և IV քառորդներում ընկած ճյուղերը՝ կարելի է կատարել թե՛ մոնոտոնության, թե՛ ուռուցիկության հետազոտություն: Կարելի է տեսնել նաև, որ $(0;0)$ կետում Ox առանցքը կորի երկու ճյուղերի ընդհանուր շոշափողն է:

Օրինակ 8: $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$ (Ստրոֆոիդ կամ ոլորված ժապավեն):

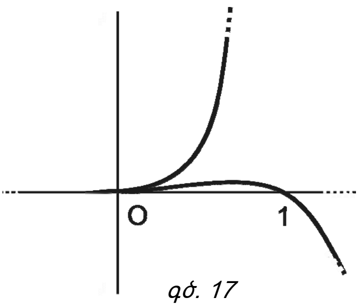
---

* **Դիոկլես**, մ.թ.ա. 2-րդ դարի հույն մաթեմատիկոս:



գծ. 16

Այս կորն էլ է Ox առանցքի նկատմամբ համաչափ: Կոորդինատների սկզբնակետը կորի «հանգուցային» կետ է: Ձախ կիսահարթությունում կորը ոլորվում և ընդունում է օղակի ձև, որի գագաթը գտնվում է $(-a;0)$ կետում: Աջ կիսահարթությունում կորի ճյուղերը ասիմպտոտորեն մոտենում են $x=a$ ուղղին (գծ. 16):



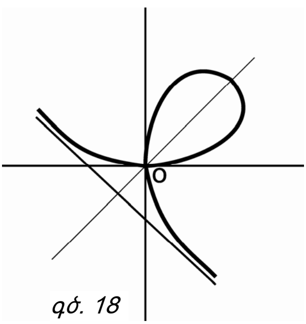
գծ. 17

Օրինակ 9: $(y-x^2)^2=x^5$ (Կտցավոր կոր):

Կորը ամբողջությամբ ընկած է աջ կիսահարությունում $(x\geq 0)$: Կորի սկզբնակետից դուրս եկող առանձին ճյուղերը (գծ. 17) համապատասխանաբար $y=x^2(1+\sqrt{x})$ և $y=x^2(1-\sqrt{x})$ ֆունկցիաների գրաֆիկներն են: Սկզբնակետում Ox առանցքը թե՛ մի ճյուղի, թե՛ մյուսի շոշափողն է:

Օրինակ 10: $x^3+y^3=3axy$ (Դեկարտի տերև):

Նախ նկատենք, որ x և y անհայտները փոխատեղելիս հավասարումը չի փոխվում: Սա խոսում է այն մասին, որ կորը համաչափ է $y=x$ ուղղի նկատմամբ (գծ. 18):



գծ. 18

Նշանակելով $y/x=t$՝ երկու անհայտով հավասարումից կարող ենք անցնել կորի պարամետրական հավասարումներին.

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=tx=\frac{3at^2}{1+t^3}\quad (t\neq -1):$$

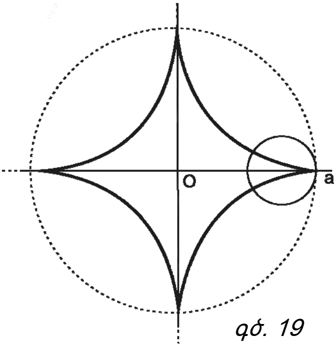
Ելնելով այն փաստից, որ $(x;y)$ կետը կորի երկայնքով անվերջ հեռանում է սկզբնակետից միայն այն դեպքում, երբ $t\to -1$ և օգտվելով n^{o}2-ի (3) և (4) բանաձևերից՝ գտնում ենք.

$$k = \lim_{t\to -1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t = -1:$$

$$\beta = \lim_{t\to -1}(y+x) = \lim_{t\to -1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right) = \lim_{t\to -1} 3at\frac{1+t}{(1+t)(1-t+t^2)} =$$

$$= 3a\lim_{t\to -1}\frac{t}{1-t+t^2} = -a:$$

Այնպես որ, $y=-x-a$ ուղիղը կորի II և IV քառորդներում ընկած ճյուղերի ընդհանուր ասիմպտոտն է:



գծ. 19

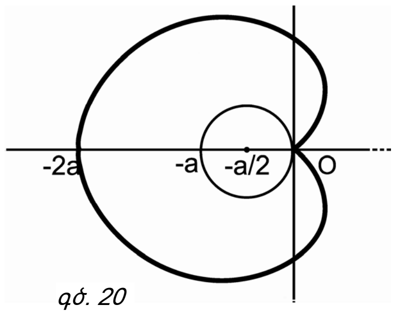
Օրինակ 11: $\sqrt[3]{x}^{2}+\sqrt[3]{y}^{2}=\sqrt[3]{a}^{2}$ (Աստրոիդ կամ քառաթև հիպոցիկլոիդ):

Եթե n^{o} III. 2.3-ում «սովորական» ցիկլոիդը սահմանվեց որպես անշարժ ուղղի վրա գլորվող շրջանագծի (անիվի) որոշակիորեն նշված կետի հետագիծ, ապա այստեղ կորի ստացման մեխանիկան փոքր ինչ այլ է: Անշարժ դիրքում տրված է a շառավղով շրջանագիծ, իսկ շրջանագծի ներսում՝ b շառավղով անիվ:

Անիվի վրա նշված կետի հետագիծը, երբ անիվը գլորվում է (առանց սահելու) շրջանագծի երկայնքով, կոչվում է **հիպոցիկլոիդ**: Գծ. 19-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ $b = a/4$: Ընդ որում, անիվի վրա նշված կետը, անիվի ելակետային դիրքում, Ox առանցքի $(a;0)$ կետն է:

Օրինակ 12: $x^2+y^2+ax = a\sqrt{x^2+y^2}$ (Կարդիոիդ կամ սրտաձև գիծ):

Այս կորն էլ է պատկանում ցիկլոիդների խմբին, միայն թե, այս անգամ, անիվը գտնվում է անշարժ շրջանագծից դուրս՝ գլորվելիս շարունակ արտաքնապես շոշափելով շրջանագիծը: Այս կերպ սահմանված կորն անվանում են **էպիցիկլոիդ**:



գծ. 20

Այստեղ ներկայացված սրտաձև գիծն առաջանում է այն դեպքում, երբ շրջանագծի և անիվի շառավիղները երկուսն էլ $a/2$ են, շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է $\left(-\dfrac{a}{2};\,0\right)$ կետում, իսկ անիվի վրա նշված կետը, ելակետային դիրքում, կոորդինատների սկզբնակետն է (գծ. 20):

Ավելացնենք, որ կարդիոդի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով (n° III. 1.5) ունի հետևյալ տեսքը. $\rho = a(1-\cos\varphi)$:

Օրինակ 13: $\rho = a\cos 3\varphi$ (եռաթերթ վարդ):

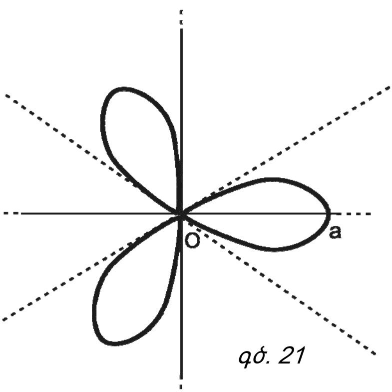
Նախ նկատենք, որ ρ-ն, որպես բևեռային շառավիղ, չի կարող բացասական լինել: Հետևաբար, φ-ն պետք է փոփոխել այնպիսի տիրույթում, որտեղ $\cos 3\varphi \geq 0$: Փաստորեն, 3φ-ն պետք է ընկած լինի I և IV քառորդներում.

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{կամ} \qquad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6},$$

$$2\pi - \frac{\pi}{2} \leq 3\varphi \leq 2\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{կամ} \qquad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$4\pi - \frac{\pi}{2} \leq 3\varphi \leq 4\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{կամ} \qquad \frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}:$$

Այսպիսով ստանում ենք φ-ի փոփոխման երեք միջակայք, որոնցից յուրաքանչյուրին համապատասխանում է եռաթերթ վարդի մեկական թերթիկ (գծ. 21): Կոսինուսի պարբերականությունից հետևում է, որ φ-ի հետագա փոփոխության ընթացքում (թե՛ դրական ուղղությամբ, թե՛ բացասական) կորի ընթացիկ կետը նույնությամբ կրկնում է իր հետագիծը: Թերթիկները ճիշտ պատկերելու համար անհրաժեշտ է նաև հաշվի առնել նշված միջակայքերում $\cos 3\varphi$ ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթը:



գծ. 21

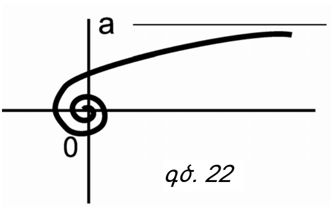
Օրինակ 14: $\rho = a/\varphi \quad (0<\varphi<+\infty)$ (Հիպերբոլական գալարագիծ):

Երբ φ-ն աճելով ձգտում է $+\infty$-ի, ρ-ն ձգտում է 0-ի: Դրա արդյունքում, կորի ընթացիկ կետը դրական ուղղությամբ անվերջ պտտվելով բևեռի շուրջը, անվերջ մոտենում է բևեռին:

Իսկ երբ φ-ն նվազելով ձգտում է 0-ի, $\rho \to \infty$: Դա նշանակում է, որ կետը անվերջ հեռանում է բևեռից: Ուսումնասիրելով կորի ուղղանկյուն կոորդինատների փոփոխման վարքը՝ հանգում ենք հետևյալին.

$$x = \rho\cos\varphi = \frac{a\cos\varphi}{\varphi} \to +\infty,$$

$$y = \rho\sin\varphi = \frac{a\sin\varphi}{\varphi} \to a \qquad (\varphi \to +0):$$



գծ. 22

Այսքանից կարող ենք եզրակացնել, որ $y = a$ ուղիղը կորի ասիմպտոտ է:

Արժե նաև նշել, որ φ-ի նվազմանը զուգընթաց $(\varphi < \pi/2)$ y-ը աճում է (գծ. 22):

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ապացուցել նույնությունը.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0):$$

Ցուցում: Առանձին-առանձին դիտարկել $(-\infty;\ 0)$ և $(0;\ +\infty)$ միջակայքերը, օգտվել $\text{n}^{\text{o}}\,1.1$-ում բերված պնդումից, իսկ այնուհետև, հաշվել նույնության ձախ մասի սահմանները, երբ $x \to \pm\infty$:

2. Ապացուցել անհավասարությունները.

ա) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R});$

բ) $\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 \qquad (x>0):$

3. Հետազոտել $y = (x^2-3)e^{-x}$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունը:

4. Ապացուցել անհավասարությունը.

$$x^{\alpha} - 1 \le \alpha(x-1) \qquad (x>0,\ 0<\alpha<1):$$

Ցուցում: Հետազոտել $\varphi(x) = x^{\alpha} - 1 - \alpha(x-1)$ ֆունկցիայի մոնոտոնությունը և հաշվի առնել, որ $\varphi(1) = 0$:

5. Դիցուք՝ $a, b > 0$, իսկ p և q դրական թվերն այնպիսին են, որ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: Ապացուցել Յունգի* անհավասարությունը.

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}:$$

Ցուցում: Նախորդ վարժության մեջ տեղադրել $x = a/b$, $\alpha = 1/p$:

6. Տրված են $x_1, \cdots, x_n$ և $y_1, \cdots, y_n$ թվերը: Ապացուցել Շվարցի** հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{1/2}:$$

Ցուցում: Նախորդ վարժության մեջ վերցնել

$$p = q = 2, \qquad a = \frac{x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \qquad b = \frac{y_k^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}:$$

7. Դիցուք f-ը x_0-ի շրջակայքում n անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \ne 0:$$

Ցույց տալ, որ եթե n-ը զույգ է, ապա x_0-ում առկա է էքստրեմում, իսկ եթե n-ը կենտ է, ապա էքստրեմում չկա:

Ցուցում: Հաշվի առնելով խնդրի պայմանները՝ Թեյլորի լոկալ բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} \right):$$

Մնում է տեսնել, որ զույգ n-ի դեպքում բանաձևի աջ մասը x_0-ի փոքր շրջակայքում պահպանում է իր նշանը, իսկ կենտ n-ի դեպքում՝ ոչ:

8. Ապացուցել, որ եթե $w = \varphi(y)$ $(y \in \mathbb{R})$ ֆունկցիան աճող է, ապա

---

* **Վ. Յունգ (Յանգ)** (1882-1946), անգլիացի մաթեմատիկոս:

** **Գ. Շվարց** (1843-1921), գերմանացի մաթեմատիկոս:

$y=f(x)$ և $w=\varphi\big(f(x)\big)$ ֆունկցիաներն ունեն միևնույն էքստրեմումի կետերը:

9. Ցույց տալ, որ x^{α} $(\alpha>1)$, $x\ln x$ ֆունկցիաները $(0;+\infty)$ միջակայքում ուռուցիկ են, իսկ x^{α} $(0<\alpha<1)$ և $\ln x$ ֆունկցիաները՝ գոգավոր:

10. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները և մեկնաբանել դրանք երկրաչափորեն.

ա) $\dfrac{1}{2}(x^{\alpha}+y^{\alpha})>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{\alpha}$ $\quad(x,y>0,\ x\neq y,\ \alpha>1)$;

բ) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $\quad(x,y>0,\ x\neq y)$:

11. Տրված է $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$ պարամետրական հավասարումների զույգը:

Պարզել, թե պարամետրի փոփոխման ինչ միջակայքերում է y-ը որոշվում որպես x-ից կախված ֆունկցիա և հետազոտել այդ ֆունկցիան մոնոտոնության ու ուռուցիկության առումով:

12. Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածում բավարարում է Լագրանժի թեորեմի բոլոր պայմաններին:

Ապացուցել, որ եթե այն խիստ ուռուցիկ է, ապա վերջավոր աճերի բանաձևում առկա c-ն միակն է (n$^{\circ}$ VII. 1.3):

13. Գրել $(1+x)^{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը և տեղադրելով դրանում $x=b/a$, ստանալ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի (n$^{\circ}$ I. 2.9, օրինակ 14) նոր ապացույց:

14. Բևեռային կոորդինատների համակարգում պատկերել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $\rho^{2}=a/\varphi$ (գավազան); $\qquad$ բ) $\rho=\sin 4\varphi$ (քառաթերթ վարդ):

15. Գերանի լայնակի կտրվածքը d տրամագծով շրջան է: Գերանը մշակելով պատրաստում են չորսու, որի լայնակի կտրվածքը b հիմքով և h բարձրությամբ ուղղանկյուն է: Հայտնի է, որ չորսուի ամրությունը գնահատվում է bh^{2} մեծությամբ:

Ի՞նչ համամասնությամբ պետք է մշակել գերանը, որպեսզի նրանից ստացվող չորսուն ունենա առավելագույն ամրություն:

16. Կլոր սեղանի կենտրոնից ինչ բարձրության վրա պետք է կախել էլեկտրական լամպը, որպեսզի սեղանի եզրը լինի մաքսիմալ լուսավորված: Հայտնի է, որ կետի լուսավորվածությունը որոշվում է $I = k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$ բանաձևով, որտեղ φ-ն սեղանի հարթության վրա ճառագայթի անկման անկյունն է, r-ը՝ լուսաղբյուրից եղած հեռավորությունը, իսկ k-ն՝ լուսաղբյուրի լույսի ուժը:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ VI: ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ

ԳԼՈՒԽ VII: ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

ԳԼՈՒԽ VIII: ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

ԼԵՎՈՆ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆԻ ԳԱԼՍՏՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ՄԱՍ II

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԲՈՒՀԱԿԱՆ ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ԲՈՒՀԵՐԻ ԲՆԱԳԻՏԱԿԱՆ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏՆԵՐԻ
ՈՒՍԱՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Ն. Խնկիկյանի, Կ. Չալաբյանի
Շապիկի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Վ. Դերձյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 17.03.2017:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 7.375:
Տպաքանակը՝ 250:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am