

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՍՆԱԿԱՐԱՆ

Յու. Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

## ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության  
նախարարության կողմից որպես դասագիրք  
բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական  
մասնագիտությունների ուսանողների համար

ԵՐԵՎԱՆ  
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ  
2017

ՀՏԳ 511(075.8)

ԳՄԳ 22.13 Գ73

Հ 177

*Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության  
կողմից որպես դասագիրք բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական  
մասնագիտությունների ուսանողների համար*

*Հրատարակության է երաշխավորել  
ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի  
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը*

Մասնագետ խմբագիր՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Ս.Լ. Սահակյան

Հակոբյան Յու.Ռ.

Հ 177 Թվային մեթոդներ/Հակոբյան Յու.Ռ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2017, 462 էջ:

Դասագրքում տրված է հանրահաշվի, մաթեմատիկական անալիզի և դիֆերենցիալ հավասարումների խնդիրների լուծման թվային մեթոդների հիմունքների համակարգված շարադրանքը:

Նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական և տեխնիկական մասնագիտությունների ուսանողների և ասպիրանտների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև թվային հաշվարկների հետ առնչվող մասնագետներին:

Yu.R. Hakopian, *Numerical Methods*, YSU Press, Yerevan, 2017, 462 pp.

Ю.Р. Акопян, *Численные методы*, Издательство ЕГУ, Ереван, 2017, 462стр.

ՀՏԳ 511(075.8)

ԳՄԳ 22.13 Գ73

ISBN 978-5-8084-2245-2

© ԵՊՀ հրատ., 2017

© Հակոբյան Յու.Ռ., 2017

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

<b>ՆԱԽԱԲԱՆ</b> .....	7
<b>Գլուխ 1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ</b> .....	9
1.1 Թվային մեթոդներ առարկայի մասին .....	9
1.2 Մոտավոր թվեր և սխալանքներ .....	12
1.3 Սեքենայական թվեր .....	19
1.4 Խնդիրների և հաշվողական ալգորիթմների կայունությունը .....	25
Խնդիրներ և վարժություններ - 1 .....	30
<b>Գլուխ 2. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ</b> .....	33
2.1 Արմատների տեղայնացումը .....	33
2.2 Կիսման եղանակը .....	36
2.3 Պարզ իտերացիայի մեթոդը .....	40
2.4 Ջուզամիտության արագացումը և Էյտկենի $\Delta^2$ -ընթացքը .....	46
2.5 Նյուտոնի մեթոդը .....	52
2.6 Նյուտոնի մեթոդի ընդհանրացումը .....	59
2.7 Հատողների մեթոդը .....	63
2.8 Նյուտոնի մեթոդը համակարգերի համար .....	67
Խնդիրներ և վարժություններ - 2 .....	70
<b>Գլուխ 3. ՍԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԻԵՐԸ</b> .....	75
3.1 Վեկտորներ և մատրիցներ .....	75
3.2 Սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ .....	80
3.3 Հատուկ տիպի մատրիցներ .....	82
3.4 Վեկտորների և մատրիցների նորմեր .....	89
3.5 Ջուզամիտություն նորմավորված տարածություններում .....	95
Խնդիրներ և վարժություններ - 3 .....	99
<b>Գլուխ 4. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՍԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ</b> .....	105
4.1 Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգեր .....	105
4.2 Մատրիցի պայմանավորվածության թիվը .....	108

4.3	LU - մեթոդներ	114
4.4	Գաուսի մեթոդը	117
4.5	Խոլեսկու մեթոդը	129
4.6	Երեքանկյունագծային համակարգեր	133
4.7	Իտերացիոն մեթոդներ	138
4.8	Յակոբիի մեթոդը	141
4.9	Գաուս-Չեյդելի մեթոդը	145
4.10	Յակոբիի և Գաուս-Չեյդելի մեթոդների համեմատումը	151
4.11	Ռեկաքսացիայի մեթոդը	154
4.12	Ռիչարդսոնի մեթոդը	157
4.13	Իտերացիոն մեթոդների վարքը «ոչ ստանդարտ» դեպքերում	161
4.14	Հակադարձ մատրիցի հաշվումը	164
	Խնդիրներ և վարժություններ - 4	167
<b>Գլուխ 5.</b>	<b>ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ</b>	171
5.1	Ներածական մաս	171
5.2	Աստիճանային մեթոդը	172
5.3	Պտտման մեթոդը	177
5.4	Սեփական արժեքների տեղայնացումը	185
5.5	Սեփական արժեքների խտորման մասին	190
	Խնդիրներ և վարժություններ - 5	193
<b>Գլուխ 6.</b>	<b>ԻՆՏԵՐՊՈԼԱՑԻԱ</b>	195
6.1	Ինտերպոլացիայի խնդիրը	195
6.2	Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը	197
6.3	Չեբիշևի բազմանդամները	201
6.4	Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը	206
6.5	Ինտերպոլացիոն բանաձևեր հավասարահեռ հանգույցների համար	210
6.6	Ինտերպոլացիոն սպլայններ	213
6.7	Խորանարդային սպլայն	217
	Խնդիրներ և վարժություններ - 6	221
<b>Գլուխ 7.</b>	<b>ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ</b>	225
7.1	Լավագույն մոտարկման տարր	225
7.2	Հավասարաչափ մոտարկումներ	230
7.3	Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման օրինակներ	238
7.4	Մոտարկումներ ունիտար տարածություններում	241
7.5	Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը	248

7.6 Միջին քառակուսային մոտարկումներ .....	253
7.7 Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը .....	261
7.8 Գծայնացման եղանակը .....	265
Խնդիրներ և վարժություններ - 7 .....	267
<b>Գլուխ 8. ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ</b> .....	271
8.1 Քառակուսացման բանաձևեր .....	271
8.2 Ուղղանկյունների բանաձևերը .....	273
8.3 Սեղանների բանաձևը .....	280
8.4 Միմպսոնի բանաձևը .....	284
8.5 Մխալանքի գնահատման Ռ-ունգեի կանոնը .....	288
8.6 Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևեր .....	290
8.7 Գաուսի քառակուսացման բանաձևը .....	293
8.8 Ադապտիվ ալգորիթմներ .....	299
Խնդիրներ և վարժություններ - 8 .....	301
<b>Գլուխ 9. ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԳԻՖԵՐԵՆՅԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ     ԼՈՒԾՈՒՄԸ</b> .....	305
9.1 Կոշիի խնդիրը .....	305
9.2 Վերլուծական մոտավոր մեթոդներ .....	310
9.3 Թվային դիֆերենցման բանաձևեր .....	314
9.4 Տարբերական մեթոդների դասակարգումը .....	318
9.5 Էյլերի մեթոդը .....	320
9.6 Էյլերի վերահաշվման մեթոդները .....	326
9.7 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը .....	331
9.8 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի .....	335
9.9 Ադամսի մեթոդը .....	338
9.10 Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ .....	345
9.11 Երկկետային եզրային խնդիր .....	353
9.12 Վերջավոր տարբերությունների մեթոդը .....	357
9.13 Տարբերական սխեմայի հետազոտումը .....	361
Խնդիրներ և վարժություններ - 9 .....	364
<b>Գլուխ 10. ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ ՍԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ     ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ</b> .....	369
10.1 Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին .....	369
10.2 Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները ..	372
10.3 Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար .....	384

10.4 Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը .....	389
10.5 Ձերմահաղորդականության հավասարումը .....	393
10.6 Լարի տատանման հավասարումը .....	402
10.7 Ֆուրիեի դիսկրետ ձևափոխությունը .....	404
10.8 Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար .....	410
10.9 Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները .....	414
Խնդիրներ և վարժություններ - 10 .....	420
<b>ՀԱՎԵԼՎԱԾ. ՀԱՍԱՌՈՏ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ</b> .....	423
<b>ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ</b> .....	453
<b>ԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ՑԱՆԿ</b> .....	457

# ՆԱԽԱԲԱՆ

Այս դասագրքով հեղինակը նպատակ ունի առաջին հերթին՝ տալ թվային անալիզի կարևորագույն մեթոդների բավարար չափով համակարգված և ժամանակակից շարադրանքը, երկրորդ հերթին՝ վերամշակելով և լրացումներ կատարելով, մեկտեղել հեղինակի նախորդ երկու դասագրքերը, որոնք ներկայացնում են երկար տարիների ընթացքում կարդացած նրա դասախոսությունները Երևանի պետական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում:

Գրքում ընդգրկված նյութը համապատասխանում է ներկայումս գործող համալսարանական ծրագրերին և կարող է օգտակար լինել հաշվողական մաթեմատիկային վերաբերող դասընթացներ կազմելիս:

Գիրքը բաղկացած է տասը գլխից և հավելվածից:

Առաջին գլուխը ներածական բնույթի է: Ներկայացվում է թվային մեթոդներ առարկան, նկարագրվում են մոտավոր թվերի հետ թվաբանական գործողությունները, տրվում է սխալանքների դասակարգումը և սահմանվում է հաշվողական ալգորիթմների կայունություն հասկացությունը:

Երկրորդ գլուխը վերաբերում է ոչ գծային հավասարումների և համակարգերի լուծման մոտավոր մեթոդներին: Նկարագրվում են առավել հաճախ օգտագործվող մեթոդները՝ պարզ իտերացիայի, Նյուտոնի, հատողների և դրանց տարբերակները:

Երրորդ գլխում բերված են գրքի հետագա նյութի ընկալման համար անհրաժեշտ տեղեկություններ՝ գծային հանրահաշվից և մատրիցների տեսությունից:

Չորրորդ գլխում ներկայացված են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ և իտերացիոն մեթոդները: Ներմուծվում է մատրիցի պայմանավորվածության թվի գաղափարը և բազմակողմանիորեն քննարկվում է նրա դերը՝ գծային համակարգեր լուծելիս:

Հինգերորդ գլուխը մատրիցի սեփական արժեքների խնդրի լուծման լայնորեն կիրառվող մեթոդների մասին է:

Վեցերորդ գլխում դիտարկվում է ինտերպոլացիայի խնդիրը, արտածվում են հիմնական ինտերպոլացիոն բանաձևերը: Տրվում են քառակուսային և խորանարդային ինտերպոլացիոն սպլայնների կառուցման ալգորիթմները:

Յոթերորդ գլխում դիտարկվում են մոտարկումներ նորմավորված տարածություններում: Ներմուծվում է լավագույն մոտարկման տարրի հասկացությունը: Ուսումնասիրվում են հանրահաշվական բազմանդամներով հավասարաչափ և միջին քառակուսային մոտարկումները: Շարադրվում են Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմի դասական և վերափոխված տարբերակները: Գլխի վերջին մասը վերաբերում է մեծ

կիրառություն ունեցող փոքրագույն քառակուսիների մեթոդին:

Ութերորդ գլուխը վերաբերում է թվային ինտեգրման մեթոդներին: Գիտարկվում են ուղղանկյունների, սեղանների, Միմպտոնի և Գաուսի քառակուսացման բանաձևերը: Արտածվում է սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը:

Իններորդ գլուխը նվիրված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին: Գիտարկվում են Կոշիի խնդրի լուծման Էյլերի մեթոդը և նրա վերափոխությունները, Ռունգե-Կուտայի և Ադամսի մեթոդները: Հիմնավորվում են սխալանքի գործնական գնահատման Ռունգեի կանոնը և Ռիչարդսոնի ճշգրտման մեթոդը: Հետազոտվում է մեթոդների կայունությունը: Շարադրվում է եզրային խնդիրների լուծման վերջավոր տարբերությունների եղանակը:

Տասներորդ գլխում դիտարկվում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման տարբերակային մեթոդները: Սահմանվում են տարբերակային սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները՝ մոտարկում, կայունություն և գուգամիտություն: Կառուցվում և հետազոտվում են տարբերակային սխեմաներ՝ տեղափոխման, ջերմահաղորդականության, լարի տատանման և Պուասոնի հավասարումների համար:

Յուրաքանչյուր գլխի վերջում տրվում են խնդիրներ և վարժություններ:

Հավելվածում բերված են համառոտ կենսագրական տեղեկություններ գրքում հիշատակված գիտնականների մասին: Տրված է օգտագործված գրականության ցանկը, որտեղ նշված դասագրքերն ու մենագրությունները առաջարկվում են առարկայի ավելի խոր ուսումնասիրման համար:

Հատուկ շնորհակալություն մասնագետ խմբագիր ֆիզ.-մաթ. գիտությունների թեկնածու, դոցենտ Ս.Լ.Սահակյանին և խմբագիր Լ.Գ. Մանուկյանին՝ նյութի կարգավորմանը լավագույնս օժանդակելու համար:

Յու.Ռ. Հակոբյան



# Գլուխ 1

## ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

### 1.1 Թվային մեթոդներ առարկայի մասին

Կարևորագույն բնագիտական խնդիրների լուծման անհրաժեշտությունը և արագագործ հաշվողական տեխնիկայի զարգացումը հանգեցրել են մարդկային գործունեության բազմաթիվ բնագավառներում մաթեմատիկական մեթոդների կիրառմանը և համակարգիչների զանգվածային ներդրմանը: Մաթեմատիկական մոդելավորումը ներկայումս լայնորեն օգտագործվում է ոչ միայն ճարտարագիտության և տնտեսագիտության մեջ, այլև այնպիսի ոչ մաթեմատիկական համարվող ոլորտներում, ինչպիսիք են կենսաբանությունը, բժշկությունը, լեզվաբանությունը, հոգեբանությունը և այլն: Բնագիտության տարբեր բնագավառներում ծագած խնդիրների քանակն ու բարդությունը առաջ են բերում դրանց լուծման առավել կատարյալ ու արագ ալգորիթմների պահանջ:

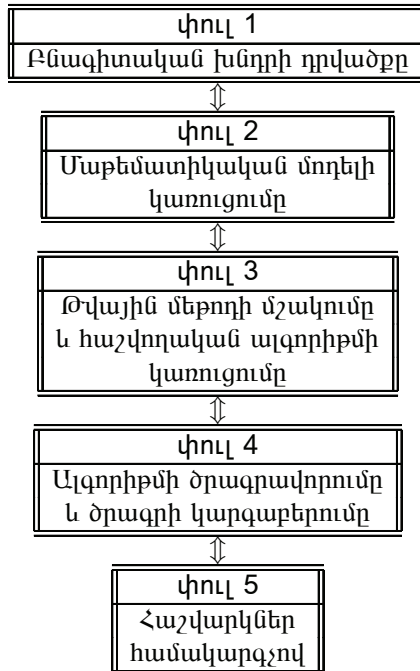
Բնագիտական խնդրի լուծումը մաթեմատիկական մոդելավորման շնորհիվ հանգում է մաթեմատիկական խնդրի լուծմանը: Սակայն, մեծամասամբ, ծագած մաթեմատիկական խնդրի ճշգրիտ լուծումը գտնել չի հաջողվում: Այդ իսկ պատճառով մեծ կարևորություն են ստանում թվային մեթոդները, որոնք հնարավորություն են տալիս ստանալու խնդրի մոտավոր լուծումը որոշակի ճշտությամբ: Եթե գործողությունների քանակը մեծ չէ, ապա կարելի է դրանք կատարել ձեռքով, կամ օգտագործելով պարզագույն հաշվողական միջոցներ: Իսկ եթե խնդրի լուծման համար պետք է կատարել մեծ թվով գործողություններ, ապա համակարգչի առկայությունը խիստ անհրաժեշտ է:

Նկ. 1.1.1-ում բերված սխեմայում տրված են բնագիտական խնդրի լուծման հիմնական փուլերը: Դիտարկենք այդ փուլերից յուրաքանչյուրն ավելի մանրամասն:

Առաջին փուլ: Այստեղ ձևակերպվում է բնական երևույթի կամ պրոցեսի հետ առնչվող խնդիրը:

Երկրորդ փուլ: Կառուցվում է մաթեմատիկական մոդելը, այսինքն՝ խնդիրն ստանում է մաթեմատիկական ձևակերպում: Մոդելին ներկայացվող կարևորագույն պահանջը դիտարկվող երևույթին համապատասխանությունն է, այսինքն՝ այն պետք է բավականաչափ ճշգրիտ (թույլատրելի սահմաններում) արտացոլի երևույթին բնորոշ հիմնական

գծերը: Այլ կերպ ասած՝ մոդելը պետք է լինի *կոռեկտ*: Միաժամանակ, այն պետք է լինի պարզ և հետազոտման համար մատչելի: Մաթեմատիկական մոդելի կառուցումը կամ նրա ընտրությունը պահանջում է խնդրի խոր իմացություն և մաթեմատիկայի համապատասխան բաժինների տիրապետում:



#### Նկ. 1.1.1 Բնագիտական խնդրի թվային լուծման փուլերը

Երրորդ փուլ: Մշակվում է թվային մեթոդ՝ խնդրի լուծումը հանգեցնելով հաշվողական ալգորիթմի, որն ըստ էության թվաբանական և տրամաբանական գործողությունների խիստ որոշակի հաջորդականություն է: Շատ կարևոր է, որ կառուցված ալգորիթմի միջոցով սկզբունքորեն հնարավոր լինի ստանալ խնդրի լուծումը ցանկացած ճշտությամբ: Այդ տեսակետից հաշվողական ալգորիթմի կարևորագույն բնութագիրն է՝  $\varepsilon$  ճշտությամբ լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ  $Q(\varepsilon)$  թվաբանական գործողությունների քանակը: Որպես օրենք,  $Q(\varepsilon)$  մեծությունն աճում է ճշտության մեծացմանը զուգընթաց: Իհարկե,  $\varepsilon$ -ը կարող է լինել այնքան փոքր, որ  $Q(\varepsilon)$  մեծությունը, իսկ դրա հետ նաև խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ ժամանակը, դառնան անթույլատրելիորեն մեծ: Հաճախ խնդրի լուծման համար կարելի է առաջարկել մի քանի ալգորիթմ, որոնք ապահովում են  $\varepsilon$  ճշտություն՝ կատարելով տարբեր քանակի  $Q(\varepsilon)$  գործողություններ: Այլ նկատառումների կամ հայտանիշների բացակայության դեպքում դրանցից պետք է ընտրել այն, որի համար  $Q(\varepsilon)$  մեծությունը նվազագույնն է: Այդպիսի ալգորիթմները կոչվում են *խնայողական*:

Չորրորդ փուլ: Կառուցված հաշվողական ալգորիթմը գրվում է ծրագրի տեսքով՝ օգտագործելով որևէ ալգորիթմական լեզու: Ծրագիրը կազմելիս, որպես կանոն, թույլ են տրվում տարբեր բնույթի սխալներ, անճշտություններ, բացթողումներ: Ծրագրի կարգաբերումը ներառում է դրանց հայտնաբերումը և ուղղումը: Այնուհետև ծրագիրը փորձարկվում է տեստային (ստուգողական) խնդիրների լուծման միջոցով՝ արդյունքների հավաստիության մեջ համոզվելու նպատակով:

Յինգերորդ փուլ: Ներմուծելով համակարգչի մեջ ելակետային տվյալները՝ կարգաբերված ծրագրի օգնությամբ կատարվում է հաշվարկ:

Խնդրի լուծման որոշ փուլերում կարող են առաջանալ սխալանքներ: Դիտարկենք սխալանքների աղբյուրները և կատարենք դրանց դասակարգումը: Դիցուք

$V$ -ն որոնելի մեծության ճշգրիտ (իրական) արժեքն է (փուլ 1),

$v$ -ն այդ մեծության մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող արժեքն է, այսինքն՝ մաթեմատիկական մոդելի լուծումը (փուլ 2),

$\tilde{v}$ -ն կլորացումների բացակայության ենթադրությամբ՝ թվային մեթոդով ստացված խնդրի լուծումն է (փուլ 3),

$v^*$ -ը համակարգչի միջոցով ստացված լուծումն է (փուլ 5):

Այդ դեպքում

$\varepsilon_1 = V - v$  մեծությունը կոչվում է *անվերացելի սխալանք*,

$\varepsilon_2 = v - \tilde{v}$  մեծությունը կոչվում է *մեթոդի սխալանք*,

$\varepsilon_3 = \tilde{v} - v^*$  մեծությունը կոչվում է *հաշվողական սխալանք*:

*Անվերացելի սխալանքը* պայմանավորված է հիմնականում այն հանգամանքով, որ մաթեմատիկական մոդելը լիովին չի համապատասխանում դիտարկվող բնական երևույթին:

Թվային մեթոդները սովորաբար մոտավոր են, այսինքն՝ մուտքային տվյալներում սխալների բացակայության և թվաբանական գործողությունների անթերի կատարման դեպքում խնդրի որոնելի լուծումը ստացվում է որոշակի սխալանքով, որը կոչվում է *մեթոդի սխալանք*: Դա տեղի է ունենում այն պատճառով, որ թվային մեթոդով սովորաբար լուծվում է ելակետային խնդիրը մոտարկող մեկ այլ՝ ավելի պարզ խնդիր: Մի շարք դեպքերում թվային մեթոդը կառուցվում է անվերջ պրոցեսի հիման վրա, որը սահմանում հանգեցնում է որոնելի լուծմանը: Սակայն իրականում սահմանային անցումը չի հաջողվում իրականացնել, և ինչ-որ քայլում ընդհատված պրոցեսը տալիս է մոտավոր լուծում:

Համակարգչի միջոցով հաշվումներ իրականացնելիս, որպես օրենք, անխուսափելի են տվյալների ներմուծման և թվաբանական գործողությունների կատարման արդյունքների կլորացման սխալանքներ՝ կապված համակարգչի կարգային ցանցի սահմանափակության հետ: Կլորացման հետևանքով առաջացած սխալանքը կոչվում է *հաշվողական սխալանք*:

**Օրինակ 1.1.1 :** Դիտարկենք ֆիզիկական երևույթ՝ երկրի մակերևույթից մեկնարկող հրթիռի ուղղահայաց թռիչքը: Մեզ հետաքրքրում է ժամանակի  $t$  պահին հրթիռի  $V(t)$  արագությունը: Պարզվում է, որ անօդ տարածության մեջ հրթիռի թռիչքի արագությունը

բավարարում է

$$\left( M - \int_0^t m(\tau) d\tau \right) \left( \frac{dv}{dt} + g \right) = c(t)m(t) \quad (1.1.1)$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը

$$v(0) = 0 \quad (1.1.2)$$

սկզբնական պայմանով, որտեղ

$M$ -ը հրթիռի նախնական զանգվածն է,

$m(t)$ -ն վառելիքի ծախսն է,

$g$ -ն ազատ անկման արագացումն է ( $\approx 9.8$  մ/վրկ<sup>2</sup>),

$c(t)$ -ն հրթիռի փողեքից գազի արտահոսքի արագությունն է:

Այս խնդիրը լուծելու համար ընտրենք բավականաչափ փոքր  $\Delta t$  քայլ և  $Ot$  առանցքի վրա նշենք  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots$  կետերը: Ինչպես բխում է ածանցյալի սահմանումից (տես, օրինակ, [62]),

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_n} \approx \frac{v(t_{n+1}) - v(t_n)}{\Delta t} : \quad (1.1.3)$$

Համաձայն (1.1.1) հավասարման և (1.1.3) բանաձևի՝  $\tilde{v}(t_n) \approx v(t_n)$  մեծության համար գրենք

$$\left( M - \int_0^{t_n} m(\tau) d\tau \right) \left( \frac{\tilde{v}(t_{n+1}) - \tilde{v}(t_n)}{\Delta t} + g \right) = c(t_n)m(t_n)$$

առնչությունը: Այսպիսով ստանում ենք  $\tilde{v}(t_n)$  մեծության հաշվման հետևյալ թվային ալգորիթմը.

$$\tilde{v}(t_{n+1}) = \tilde{v}(t_n) + \Delta t \left( \frac{c(t_n)m(t_n)}{M - \int_0^{t_n} m(\tau) d\tau} - g \right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.1.4)$$

որտեղ  $\tilde{v}(t_0) = 0$ : Նշենք, որ (1.1.4) անդրադարձ բանաձևերում առկա ինտեգրալները հաշվելու համար ևս կարող է պահանջվել թվային մեթոդ:  $\diamond$

## 1.2 Մոտավոր թվեր և սխալանքներ

Հաշվողական բնույթի խնդիրների լուծման ընթացքում կատարվում են թվաբանական գործողություններ թվերի հետ: Արդյունքում հաճախ ստանում են մեծությունների ոչ թե ճշգրիտ, այլ մոտավոր արժեքներ՝ թվերի գործնականորեն անխուսափելի կլորացման պատճառով: Մեծության *սխալանք* կանվանենք նրա ճշգրիտ և մոտավոր արժեքների տարբերությունը:

### 1.2.1 Հիմնական սահմանումներ

Գիցուք  $A$ -ն ինչ-որ մեծության ճշգրիտ, իսկ  $a$ -ն մոտավոր արժեքն է, որը հայտնի է՝

$$A \approx a :$$

**Սահմանում 1.2.1 :**  $a$  մոտավոր արժեքի *բացարձակ սխալանք* կանվանենք այն  $\Delta(a)$  թիվը, որի համար

$$|A - a| \leq \Delta(a) : \quad (1.2.1)$$

Եթե հայտնի է բացարձակ սխալանքը, ապա

$$a - \Delta(a) \leq A \leq a + \Delta(a) :$$

**Օրինակ 1.2.1 :** Հաշվենք  $\pi = 3.141592 \dots$  թվի  $a = 3.14$  մոտավոր արժեքի բացարձակ սխալանքը:

Քանի որ

$$3.14 < \pi < 3.142 ,$$

ապա

$$|\pi - a| < 0.002 :$$

Հետևաբար,  $\Delta(a) = 0.002$  :  $\diamond$

**Սահմանում 1.2.2 :**  $a$  մոտավոր արժեքի *հարաբերական սխալանք* կանվանենք այն  $\delta(a)$  թիվը, որի համար

$$\left| \frac{A - a}{A} \right| \leq \delta(a) : \quad (1.2.2)$$

Սահմանումից հետևում է, որ

$$|A - a| \leq |A|\delta(a) :$$

Հետևաբար

$$\Delta(a) = |A|\delta(a) : \quad (1.2.3)$$

Քանի որ  $A \approx a$ , և  $a$ -ն հայտնի է, ապա (1.2.3) բանաձևի փոխարեն հաճախ օգտվում են

$$\Delta(a) = |a|\delta(a) \quad (1.2.4)$$

բանաձևից:

**Օրինակ 1.2.2 :** Որոշենք  $\pi = 3.141592 \dots$  թվի  $a = 3.14$  մոտավոր արժեքի հարաբերական սխալանքը:

Օգտվելով 1.2.1 օրինակի թվային արդյունքից՝ կստանանք

$$\delta(a) = \frac{|\pi - a|}{\pi} < \frac{0.002}{3.14} \approx 0.0006 \quad (0.06\%) : \quad \diamond$$

## 1.2.2 Մոտավոր թվերի գրառման կանոնները

Դիցուք  $a$  թիվը գրված է տասնորդական դիրքային համակարգում՝

$$a = \pm \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 . \alpha_{-1} \dots \alpha_{-m}, \quad (1.2.5)$$

որտեղ  $\alpha_j$ -երը  $a$  թվի թվանշաններն են ( $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ), այսինքն՝

$$a = \pm \sum_{j=-m}^n \alpha_j 10^j :$$

**Սահմանում 1.2.3 :** Տրված թվի ձախից առաջին զրոյից տարբեր թվանշանը և նրանից աջ գտնվող բոլոր թվանշանները կոչվում են *իմաստալից* :

Օրինակ,  $a = -25.047$  և  $a = 0.00250$  թվերում իմաստալից են համարվում ընդգծված թվանշանները: Առաջին դեպքում իմաստալից թվանշանների քանակը հավասար է հինգի, իսկ երկրորդ դեպքում՝ երեքի: Այդ տեսակետից 0.00250 և 0.0025 թվերը համարժեք չեն, քանի որ նրանցից առաջին թիվը պարունակում է երեք, իսկ երկրորդը՝ երկու իմաստալից թվանշան:

Իմաստալից թվանշանների քանակը կարելի է մեծացնել կամ փոքրացնել՝ վերջին կարգերում ավելացնելով կամ դեմ նետելով զրոներ: Ընդ որում, տրված թիվը մնում է անփոփոխ: Իմաստալից թվանշանների քանակի այսպիսի անորոշությունը կարելի է օգտագործել մոտավոր թվերի գրառման ժամանակ այնպես, որ վերջին իմաստալից թվանշանով հնարավոր լինի որոշել մեծության բացարձակ սխալանքը: Սա բացատրելու համար տանք ևս մեկ սահմանում:

**Սահմանում 1.2.4 :** Կասենք, որ  $a$  թվի (1.2.5) տասական գրառման  $\alpha_j$  իմաստալից թվանշանը *ստույգ* է, եթե

$$\Delta(a) \leq 10^j : \quad (1.2.6)$$

Դիցուք  $a$  թվի  $a = 0.03405$  և  $a = 0.034050$  գրառումներում ընդգծված թվանշանները ստույգ են: Դա նշանակում է, որ առաջին դեպքում  $\Delta(a) \leq 10^{-5}$ , իսկ երկրորդ՝  $\Delta(a) \leq 10^{-6}$ :

Մոտավոր թվերի գրառման կանոնը պնդում է, որ վերջին իմաստալից թվանշանը պետք է լինի ստույգ: Օրինակ, 0.0344 և 0.034400 թվերը՝ որպես մոտավոր, տարբեր են: Առաջին թվի դեպքում կարելի է ասել, որ նրա բացարձակ սխալանքը չի գերազանցում  $10^{-4}$ -ը, իսկ երկրորդ թվի գրառումից հետևում է, որ նրա բացարձակ սխալանքը չի գերազանցում  $10^{-6}$ -ը:

Այն դեպքում, երբ մոտավոր թվի ամբողջ մասի իմաստալից թվանշանների քանակը ավելի մեծ է, քան ստույգ իմաստալից թվանշանների քանակը, ապա թիվը ներկայացնում են նորմալացված տեսքով: Օրինակ,  $a = 0.390 \cdot 10^5$  գրառումը նշանակում է, որ  $a$  թիվն ունի երեք ստույգ իմաստալից թվանշան: Այս դեպքում  $a = 39000$  գրառումն անթույլատրելի է:

Մոտավոր թվի գրառման ժամանակ հաճախ հարմար է լինում այն *կլորացնել*, այսինքն՝ ներկայացնել այն ավելի քիչ թվով կարգերի օգտագործմամբ: Հիմնականում կիրառվում է հետևյալ պարզ կանոնը:

*Եթե թվի դեմ նետվող կարգերից ամենաավագում թվանշանը փոքր է հինգից, ապա պահպանվող կարգերի պարունակությունը չի փոխվում, հակառակ դեպքում՝ կրտսեր պահպանվող կարգում ավելացվում է միավոր:*

Օրինակ,

$$\begin{aligned} 3.14159 &\approx 3.14, \\ -0.0025 &\approx -0.003, \\ 84.009974 &\approx 84.0100 : \end{aligned}$$

Ակնհայտ է, որ կլորացման հետևանքով առաջացած սխալանքի բացարձակ արժեքը չի գերազանցում պահպանվող կրտսեր կարգի միավորի կեսը:

### 1.2.3 Թվաբանական գործողությունների սխալանքների մասին

Դիցուք  $A_1, A_2, \dots, A_n$  թվերը ինչ-որ մեծությունների ճշգրիտ արժեքներն են, իսկ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  թվերը՝ մոտավոր: Ընդ որում,

$$|A_i - a_i| \leq \Delta(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Դիտարկենք

$$B = \sum_{i=1}^n A_i \quad \text{և} \quad b = \sum_{i=1}^n a_i$$

գումարները: Ունենք

$$|B - b| \leq \sum_{i=1}^n |A_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^n \Delta(a_i) : \quad (1.2.7)$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 1.2.1 :** *Թվերի գումարի բացարձակ սխալանքը չի գերազանցում այդ թվերի բացարձակ սխալանքների գումարը՝*

$$\Delta(b) \leq \sum_{i=1}^n \Delta(a_i) : \quad (1.2.8)$$

Այժմ հետազոտենք գումարի հարաբերական սխալանքը: Դիցուք գումարելիների ճշգրիտ արժեքները և նրանց մոտավոր արժեքներն ունեն միևնույն նշանը: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ

$$A_i > 0, \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Հաշվի առնելով (1.2.7) անհավասարությունը՝ կստանանք

$$\left| \frac{B - b}{B} \right| \leq \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2) + \dots + \Delta(a_n)}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} :$$

Քանի որ, համաձայն (1.2.3) բանաձևի,

$$\Delta(a_i) = A_i \delta(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

այսպես

$$\left| \frac{B - b}{B} \right| \leq \frac{A_1 \delta(a_1) + A_2 \delta(a_2) + \dots + A_n \delta(a_n)}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \delta(a_i) :$$

Դրանով իսկ ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 1.2.2 :** *Եթե գումարելիներն ունեն միևնույն նշանը, այսպես նրանց գումարի հարաբերական սխալանքը չի գերազանցում գումարելիների հարաբերական սխալանքների մեծագույնը, այն է՝*

$$\delta(b) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \delta(a_i) : \quad (1.2.9)$$

Հատուկ քննարկենք մոտ թվերի համման գործողությունը: Դիցուք  $B = A_1 - A_2$  և համապատասխանաբար՝  $b = a_1 - a_2$ : Համաձայն (1.2.8) գնահատականի՝ ունենք

$$\Delta(b) \leq \Delta(a_1) + \Delta(a_2) :$$

Այդ դեպքում

$$\delta(b) \leq \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{|B|} : \quad (1.2.10)$$

Եթե  $A_1$  և  $A_2$  մեծությունները բավականաչափ մոտ են՝  $A_1 \approx A_2$ , այսպես  $B \approx 0$ : Այդ դեպքում (1.2.10) անհավասարության համաձայն  $\delta(b)$  մեծությունը կարող է շատ մեծ լինել, չնայած որ  $\delta(a_1)$  և  $\delta(a_2)$  հարաբերական սխալանքները փոքր են: Այլ կերպ ասած՝ տեղի ունի *ճշտության կորուստ*:

**Օրինակ 1.2.3 :** Դիտարկենք  $a_1 = 47.132$  և  $a_2 = 47.131$  մոտավոր թվերի  $b = a_1 - a_2$  տարբերությունը: Ունենք  $b = 0.001$ : Այդ դեպքում  $a_1, a_2$  և  $b$  մեծությունների հարաբերական սխալանքներն են՝

$$\begin{aligned} \delta(a_1) &\approx \frac{\Delta(a_1)}{a_1} \approx \frac{0.001}{47.132} \approx 0.00002, \\ \delta(a_2) &\approx \frac{\Delta(a_2)}{a_2} \approx \frac{0.001}{47.131} \approx 0.00002, \\ \delta(b) &\approx \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{b} \approx \frac{0.001 + 0.001}{0.001} = 2.000 : \end{aligned}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տարբերության հարաբերական սխալանքը 100 000 անգամ գերազանցում է սկզբնական տվյալների հարաբերական սխալանքները:  $\diamond$



Նշված պատճառով նպատակահարմար է երկու մոտ թվերի տարբերություն պարունակող արտահայտությունները, եթե հնարավոր է, ձևափոխել: Օրինակ,  $b = \sqrt{2.00001} - \sqrt{2}$  արտահայտությունը հաշվելիս այն կարելի է ներկայացնել

$$b = \frac{0.00001}{\sqrt{2.00001} + \sqrt{2}}$$

համարժեք տեսքով:

Դիտարկենք երկու օրինակ ևս:

**Օրինակ 1.2.4 :** Պահանջվում է հաշվել  $x - \sin x$  տարբերությունը  $x$ -ի փոքր արժեքների համար: Քանի որ  $\sin x \approx x$ , ապա արդյունքում կարող ենք ունենալ ճշտության կորուստ: Ինչպե՞ս խուսափել դրանից:

Վերլուծենք  $\sin x$  ֆունկցիան Թեյլորի շարքի՝

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots :$$

Սահմանափակվենք վերլուծության վերջավոր թվով անդամներով՝

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(շարքը ընդհատելով՝  $k$ -ն ընտրում ենք այնպես, որ ապահովենք  $\sin x$  ֆունկցիայի հաշվման պահանջվող ճշտությունը): Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} x - \sin x &\approx \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{x^3}{3 \cdot 2} \left( 1 - \frac{x^2}{5 \cdot 4} \left( 1 - \frac{x^2}{7 \cdot 6} \left( \dots \left( 1 - \frac{x^2}{(2k+1) \cdot 2k} \right) \dots \right) \right) \right) : \end{aligned}$$

Ելնելով վերջին մոտավոր հավասարությունից՝ գրենք հաշվողական ալգորիթմը.

**Pseudocode FUNCTION** ( $x - \sin x$ )

input  $x, k$

$s = 1$

for  $i = k, k - 1, \dots, 2$  do

$$s = 1 - \frac{x^2}{(2i+1)2i} s$$

end

$$s = \frac{x^3}{6} s$$

output  $x$

Միաժամանակ նշենք, որ ժամանակակից համակարգիչների մաթեմատիկական ապահովումը ներառում է տարրական ֆունկցիաների գրադարանային ծրագրեր, որոնց միջոցով մեծ ճշտությամբ հաշվվում են այդ ֆունկցիաների արժեքները: Ուստի վերը դիտարկված  $x - \sin x$  արտահայտության համակարգչի օգնությամբ ստացված արժեքը որպես կանոն բավարարում է օգտագործողին:  $\diamond$

**Օրինակ 1.2.5 :** Գիտարկենք լավ հայտնի

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.2.11)$$

քառակուսի հավասարումը: Ենթադրենք, որ  $a \neq 0$  և  $D \equiv b^2 - 4ac > 0$ : Այս հավասարման արմատների հաշվման համար սովորաբար օգտագործում են

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad (1.2.12)$$

բանաձևերը: Սակայն, եթե  $b^2 \gg 4ac$ , ապա  $\sqrt{D} \approx |b|$ : Ուստի (1.2.12) բանաձևերից մեկում առաջանում է մոտ թվերի հանման խնդիրը:

Գժվար չէ ստանալ, որ (1.2.11) հավասարման արմատները կարելի է հաշվել նաև

$$x_1 = \frac{-2c}{b - \sqrt{D}}, \quad x_2 = \frac{-2c}{b + \sqrt{D}} \quad (1.2.13)$$

բանաձևերի օգնությամբ: Այսպիսով, եթե  $b > 0$ , ապա խորհուրդ է տրվում  $x_1$  արմատը հաշվել ըստ (1.2.12) բանաձևի, իսկ  $x_2$  արմատը՝ ըստ (1.2.13)-ի: Համանմանորեն, եթե  $b < 0$ , ապա  $x_1$ -ը հաշվվում է ըստ (1.2.13) բանաձևի, իսկ  $x_2$ -ն՝ ըստ (1.2.12)-ի: Ամփոփելով՝ (1.2.11) հավասարման արմատների համար ստանում ենք

$$x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{D}}$$

հաշվարկային բանաձևերը:  $\diamond$

Այժմ հետազոտենք արտադրյալի սխալանքը: Գիցուք

$$B = A_1 A_2 \dots A_n \quad \text{և} \quad b = a_1 a_2 \dots a_n :$$

Ունենք

$$A_i = a_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

հավասարությունները, որտեղ  $|\varepsilon_i| \leq \Delta(a_i)$ : Կիրառելով

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$$

ֆունկցիայի նկատմամբ Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմը՝ կստանանք

$$\begin{aligned} B - b &= (a_1 + \varepsilon_1)(a_2 + \varepsilon_2) \dots (a_n + \varepsilon_n) - a_1 a_2 \dots a_n \\ &= \sum_{i=1}^n [(a_1 + \theta_1 \varepsilon_1) \dots (a_{i-1} + \theta_{i-1} \varepsilon_{i-1})(a_{i+1} + \theta_{i+1} \varepsilon_{i+1}) \dots (a_n + \theta_n \varepsilon_n)] \varepsilon_i, \end{aligned}$$

որտեղ  $0 < \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n < 1$ : Ուստի

$$\begin{aligned} \left| \frac{B - b}{B} \right| &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{(a_1 + \theta_1 \varepsilon_1) \dots (a_{i-1} + \theta_{i-1} \varepsilon_{i-1})(a_{i+1} + \theta_{i+1} \varepsilon_{i+1}) \dots (a_n + \theta_n \varepsilon_n)}{(a_1 + \varepsilon_1) \dots (a_n + \varepsilon_n)} \right| |\varepsilon_i| \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{|\varepsilon_i|}{|a_i + \varepsilon_i|} = \sum_{i=1}^n \frac{|\varepsilon_i|}{|A_i|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\Delta(a_i)}{|A_i|} \leq \sum_{i=1}^n \delta(a_i) : \end{aligned}$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 1.2.3 :** *Չրոյից տարբեր թվերի արտադրյալի հարաբերական սխալանքը չի գերազանցում այդ թվերի հարաբերական սխալանքների գումարը՝*

$$\delta(b) \leq \sum_{i=1}^n \delta(a_i) : \quad (1.2.14)$$

Վերջում գնահատենք նաև զրոյից տարբեր թվերի քանորդի հարաբերական սխալանքը: Դիցուք

$$B = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{և} \quad b = \frac{a_1}{a_2} :$$

Ունենք

$$\begin{aligned} \frac{|B - b|}{|B|} &= \frac{|A_1 a_2 - a_1 A_2|}{|A_1| |a_2|} = \frac{|A_1 a_2 - a_1 a_2 + a_1 a_2 - a_1 A_2|}{|A_1| |a_2|} \\ &\leq \frac{|A_1 - a_1| |a_2| + |a_1| |A_2 - a_2|}{|A_1| |a_2|} \approx \frac{|A_1 - a_1|}{|A_1|} + \frac{|A_2 - a_2|}{|A_2|} \leq \delta(a_1) + \delta(a_2) : \end{aligned}$$

Դրանով իսկ ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 1.2.4 :** *Երկու թվերի քանորդի հարաբերական սխալանքը չի գերազանցում այդ թվերի հարաբերական սխալանքների գումարը՝*

$$\delta(b) \leq \delta(a_1) + \delta(a_2) : \quad (1.2.15)$$

Այստեղ մենք քննարկեցինք միայն թվաբանական գործողությունների սխալանքները: Ինչ վերաբերում է ֆունկցիաների սխալանքներին, ապա այդ հարցը բավականին մանրամասն հետազոտված է [5, 9, 13, 19] և այլ գրքերում:

## 1.3 Մեքենայական թվեր

Իրական թվերի բազմությունը անվերջ է: Սակայն համակարգիչը իր կարգացանցի սահմանափակության պատճառով կարող է գործողություններ կատարել այդ բազմության միայն վերջավոր ենթաբազմության հետ: Համակարգիչներում թվերը կարող են ներկայացվել երկու ձևով՝ *ֆիքսած կետով* և *սահող կետով*: Համառոտ նկարագրենք այդ երկու ներկայացումները: Նախապես նշենք, որ պարագրաֆի նյութը չի հավակնում այս հարցի կապակցությամբ ամբողջական և ամփոփ շարադրանքի, այլ միայն ներկայացնում է նրա բուն էությունը:

### 1.3.1 Ֆիքսած կետով թվերի համակարգը

Թվերի այս ներկայացման եղանակում թվի ամբողջ և կոտորակային մասերը բաժանող կետի դիրքը մնում է անփոփոխ: Դիտարկենք ֆիքսած կետով թվերի

$$FIX(q; r, t)$$

համակարգը, որտեղ  $q$ -ն թվարկության համակարգի հիմքն է,  $r$ -ը՝ թվի գրառման

համար օգտագործվող թվանշանային կարգերի քանակը, իսկ  $t$ -ն՝ թվի կոտորակային մասի համար հատկացված թվանշանային կարգերի քանակը: Այսինքն՝  $FIX(q; r, t)$  համակարգի յուրաքանչյուր թիվ գրվում է

$$a = \pm \alpha_{r-t-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 \cdot \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-t}$$

տեսքով, որտեղ  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ : Այս գրառումը նշանակում է, որ

$$a = \pm \sum_{j=-t}^{r-t-1} \alpha_j q^j :$$

Բնականաբար հարց է ծագում՝ ո՞րն է  $FIX(q; r, t)$  համակարգում ներկայացվող թվերի տիրույթը: Ամենամեծ դրական թիվը՝  $N_{\max}^+$  որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$N_{\max}^+ = (q-1) \sum_{j=-t}^{r-t-1} q^j = q^{r-t} - q^{-t} :$$

Ամենափոքր դրական թիվը կլինի

$$N_{\min}^+ = q^{-t} :$$

Այսպիսով,  $FIX(q; r, t)$  համակարգի բոլոր թվերը պատկանում են

$$[-q^{r-t} + q^{-t}, q^{r-t} - q^{-t}]$$

միջակայքին: Թվերը դասավորված են հավասարաչափ  $h = q^{-t}$  քայլով:

Կհամարենք, որ  $A$  իրական թիվը կարելի է մոտավոր ներկայացնել  $FIX(q; r, t)$  համակարգում, եթե  $|A| \leq N_{\max}^+$ : Հնարավոր են հետևյալ տարբերակները.

ա)  $A \in FIX(q; r, t)$ ,

բ)  $a' < A < a''$ , որտեղ  $a'$ -ը և  $a''$ -ը  $A$ -ին ամենամոտ թվերն են  $FIX(q; r, t)$  համակարգից: Այդ դեպքում  $A \approx a$ , որտեղ

$$a = a', \quad \text{եթե} \quad |A - a'| \leq |A - a''|,$$

$$a = a'', \quad \text{եթե} \quad |A - a'| > |A - a''| :$$

Ֆիքսած կետով ներկայացման ժամանակ բոլոր թվերն ունեն միևնույն բացարձակ սխալանքը՝

$$\Delta(a) = \frac{1}{2} q^{-t} :$$

Ընդ որում, բացարձակ արժեքով փոքր թվերն ունեն մեծ հարաբերական սխալանքներ՝

$$\delta(a) = \frac{q^{-t}}{2|A|} :$$

Թվերի ֆիքսած կետով գրառման գլխավոր թերություններից մեկը համակարգում թվերի ներկայացման միջակայքի խիստ սահմանափակությունն է: Այդ իմաստով ավելի լայն հնարավորություններ է տալիս թվերի սահող կետով ներկայացումը:

### 1.3.2 Սահող կետով թվերի համակարգը

Սահող կետով ներկայացումը թվերի գրառման երկրորդ, առավել տարածված ձևն է: Համակարգիչը գործողություններ կատարում է

$$q^k \cdot M$$

տեսքով ներկայացված թվերի հետ, որտեղ  $q$ -ն թվարկության համակարգի հիմքն է,  $k$ -ն ամբողջ թիվ է, որը կոչվում է *կարգ* ( $|k| \leq p$ ), իսկ  $M$ -ը թվանշանային մասն է՝ *մանտիսա* ( $M = \pm 0.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_t$ ): Սահող կետով թվերի համակարգի համար ընդունենք

$$FL(q; p, t)$$

նշանակումը ( $FL$  հապավումը առաջացել է անգլերեն *float* բառից, որը նշանակում է *սահող*):

Մանտիսի գրառման համար հատկացված  $t$  դիրքերի քանակը տալիս է թվերի ներկայացման ճշտությունը, իսկ  $p$  ամբողջ թիվը սահմանում է ներկայացվող թվերի միջակայքի լայնությունը: Մանտիսի ավագ կարգերում ոչ իմաստալից գրոներից խուսափելու և դրանով իսկ ներկայացվող թվերի առավելագույն հնարավոր ճշտությունը ապահովելու նպատակով՝ ոչ գրոյական թվերի գրառման ժամանակ դրվում է  $\alpha_1 \neq 0$  պայմանը: Եթե այդ պահանջը բավարարված է, ապա թիվը կոչվում է *նորմալացված*: Հետագայում կընդունենք, որ սահող կետով թվերը տրված են նորմալացված ձևով:

Ստանանք  $FL(q; p, t)$  համակարգի ամենամեծ դրական թիվը՝

$$N_{\max}^+ = q^p \sum_{j=1}^t (q-1) q^{-j} = q^p (1 - q^{-t}) :$$

Ամենափոքր դրական թիվը կլինի

$$N_{\min}^+ = q^{-p} \cdot 0.10 \dots 0 = q^{-(p+1)} :$$

Այսպիսով, սահող կետով դրական թվերը գտնվում են  $[N_{\min}^+, N_{\max}^+]$  հատվածում: Այս հատվածի ձախ և աջ սահմանները անվանում են *մեքենայական գրո* և *մեքենայական անվերջություն* համապատասխանաբար, քանի որ  $(-N_{\min}^+, N_{\min}^+)$  միջակայքի թվերը համակարգիչը համարում է գրո, իսկ  $[-N_{\max}^+, N_{\max}^+]$  հատվածից դուրս գտնվող թվերը նա չի ընկալում:

Ինչպես և ֆիքսած կետով գրության դեպքում, կհամարենք, որ  $A$  թիվը կարելի է ներկայացնել սահող կետով համակարգում, եթե  $|A| \leq N_{\max}^+$ : Հնարավոր են հետևյալ տարբերակները.

ա)  $A \in FL(q; p, t)$ ,

բ)  $a' < A < a''$ , որտեղ  $a'$ -ը և  $a''$ -ը  $A$ -ին ամենամոտ թվերն են  $FL(q; p, t)$  համակարգից: Այդ դեպքում  $A \approx a$ , որտեղ

$$a = a', \quad \text{եթե} \quad |A - a'| \leq |A - a''|,$$

$$a = a'', \quad \text{եթե} \quad |A - a'| > |A - a''| :$$

Փաստորեն այստեղ կիրառվում է այսպես կոչված *կանոնավոր կտրագման* սկզբունքը, ինչը մենք արդեն ձևակերպել ենք 1.2 պարագրաֆում տասնորդական թվերի համար: Այդ սկզբունքը հետևյալն է:

*Եթե դեն նետվող կարգերից ամենավազում թվանշանը փոքր է  $q/2$ -ից, ապա թվի պահպանվող կարգերի պարունակությունը չի փոխվում, հակառակ դեպքում՝ կրտսեր պահպանվող կարգում ավելացվում է միավոր:*

Նշանակենք  $A$  թվի ներկայացումը սահող կետով համակարգում  $\text{fl}(A)$ -ով, այսինքն՝

$$A \approx \text{fl}(A) \in FL(q; p, t) :$$

Գիցուք  $a' \leq \text{fl}(A) \equiv a \leq a''$  (տե՛ս վերը՝ տարբերակ  $p$ )), որտեղ  $a' = q^k \cdot M$  և հետևաբար՝  $a'' = a' + q^{k-t}$ : Այդ դեպքում

$$\Delta(a) \leq \frac{1}{2} q^{k-t} :$$

Ինչ վերաբերում է հարաբերական սխալանքին, ապա

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|A|} \leq \frac{0.5 q^{k-t}}{q^{k-1}} = \frac{1}{2} q^{1-t}, \quad (1.3.1)$$

քանի որ  $|A| \geq q^{k-1}$ : Այսպիսով, ի տարբերություն ֆիքսած կետի դեպքի, սահող կետով համակարգում բոլոր թվերը ներկայացվում են նույն սահմանային հարաբերական սխալանքով: Ինչպես հետևում է (1.3.1)-ից, եթե  $\text{fl}(A) \neq 0$ , ապա

$$\text{fl}(A) = A(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \frac{1}{2} q^{1-t} : \quad (1.3.2)$$

Համակարգչում թվերի ներկայացման ճշտության համար կարևոր բնութագրիչ է *մեքենայական էպսիլոնը*՝ սահող կետով այնպիսի ամենափոքր  $\varepsilon$  դրական թիվը, որ

$$\text{fl}(1 + \varepsilon) > 1 :$$

Մեքենայական էպսիլոնը սովորաբար նշանակում են *macheps*: Քանի որ

$$1 = q^1 \cdot 0.10 \dots 00,$$

իսկ սահող կետով մեկին հաջորդողը

$$q^1 \cdot 0.10 \dots 01$$

թիվն է, ապա որպես *macheps* կարելի է ընդունել հետևյալ մեծությունը.

$$\varepsilon = q^1 \cdot 0.00 \dots 01 = q^{1-t} :$$

Սակայն կանոնավոր կլորացման ժամանակ այդ մեծությունը իրականում երկու անգամ ավելի փոքր է: Իրոք, վերցնենք  $\varepsilon = \frac{1}{2}q^{1-t}$ . Այդ դեպքում ունենք

$$1 + \varepsilon = q^1 \left( 1 \cdot q^{-1} + 0 \cdot q^{-2} + \dots + 0 \cdot q^{-t} + \frac{q}{2} \cdot q^{-(t+1)} \right).$$

Հետևաբար՝  $\text{fl}(1 + \varepsilon) > 1$ : Այսպիսով,

$$\text{macheps} = \frac{1}{2} q^{1-t} : \quad (1.3.3)$$

Ինչպես հետևում է (1.3.1) գնահատականից, մեքենայական էպսիլոնը ծառայում է որպես սահող կետով ներկայացված թվերի հարաբերական սխալանքի չափ: Ստորև բերվում է մեքենայական էպսիլոնի հաշվման պարզ ալգորիթմ:

#### Pseudocode MACHEPS

```

macheps = 1.0
s = 2.0
while s > 1.0 do
    macheps = macheps/2
    s = 1.0 + macheps
end
macheps = 2 * macheps
output macheps

```

Պարզ է, որ այս ալգորիթմը որոշում է մեքենայական էպսիլոնը 2 բազմապատկիչի ճշտությամբ: Այսպիսով, *macheps*-ը որոշում է մեքենայի ճշտությունը:

Համառոտակի ձևակերպենք սահող կետով թվերի հետ թվաբանական գործողությունների կատարման օրենքները: Դիցուք

$$x = q^k X \quad \text{և} \quad y = q^l Y \quad (x \neq 0, y \neq 0) :$$

- *Գումարում և հանում*

$$z = x \pm y = q^m \left( q^{-(m-k)} X \pm q^{-(m-l)} Y \right),$$

որտեղ  $m = \max(k, l)$ : Արդյունքի մանտիսի մոդուլը, որն ակնհայտորեն փոքր է երկուսից, կարող է մեծ լինել մեկից: Այդ դեպքում՝ ստացված թիվը պետք է նորմալացնել «դեպի աջ», այսինքն՝ մանտիսը մեկ կարգով տեղաշարժել աջ և  $m$ -ի արժեքն ավելացնել մեկով: Մոտ թվերի հանման ժամանակ մանտիսի ավագ կարգերում կարող են առաջանալ զրոներ, և այդ դեպքում պետք է կատարել նորմալացում «դեպի ձախ»՝ համապատասխան չափով փոքրացնելով  $m$ -ի արժեքը: Բացի դրանից, ստացված արդյունքը պետք է համապատասխան ձևով կլորացվի:

- *Բազմապատկում*

$$z = x \cdot y = q^{k+l}(X \cdot Y) :$$

Անհրաժեշտության դեպքում կատարվում է արդյունքի նորմալացում «դեպի ձախ» (ոչ ավելի քան մեկ կարգով) և նրա կտրացում:

- *Բաժանում*

$$z = x/y = q^{k-l}(X/Y) :$$

Այնուհետև կատարվում է արդյունքի նորմալացում և կտրացում:

Եթե թվաբանական գործողությունների կատարման արդյունքում առաջանում է բացարձակ արժեքով մեծ  $A$  թիվ ( $|A| > N_{\max}^+$ ), ապա այն առաջ է բերում գերհագեցման ազդանշան (մեքենայական անվերջություն): Այդ դեպքում հաշվումները որպես կանոն ընդհատվում են: Հնարավոր է նաև մեքենայական գրոյի առաջացում, երբ երկու ոչ գրոյական թվերի նկատմամբ թվաբանական գործողությունների կատարման արդյունքում ստացվում է թիվ, որը բացարձակ արժեքով փոքր է  $N_{\min}^+$  թվից:

Նշանակենք  $*$  նշանով  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  կամ  $:$  թվաբանական գործողություններից որևէ մեկը: Կամայական  $x$  և  $y$  մեքենայական թվերի համար, համաձայն (1.3.2)-ի, ունենք

$$fl(x * y) = (x * y)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq \frac{1}{2}q^{1-t} \quad (1.3.4)$$

(եթե  $fl(x * y) \neq 0$ ): Մեքենայական թվաբանական գործողությունների հաջորդականության կատարման ժամանակ որպես օրենք հանդես են գալիս իրարից տարբեր  $\delta_1, \delta_2, \dots$  հարաբերական սխալանքներ: Վերլուծությունը չժանրաբեռնելու նպատակով գումարային սխալանքի գործնական գնահատման ընթացքում կարող ենք համարել, որ բոլոր  $\delta_i = \delta$  և

$$\prod_{i=1}^m (1 + \delta_{k_i}) = (1 + \delta)^m :$$

Բացատրենք ասածը հետևյալ օրինակի վրա:

**Օրինակ 1.3.1 :** Դիտարկենք  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  և  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  վեկտորների

$$s = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

սկայյար արտադրյալի հաշվման խնդիրը: Արդյունքը կարելի է ստանալ հետևյալ հաշվողական ալգորիթմի միջոցով.

```

Pseudocode  SCALPROD
input  x, y, n
s = 0
for i = 1, 2, ..., n do
    s = s + x_i y_i
end
output s

```



Սակայն, համաձայն (1.3.4)-ի, սկայար արտադրյալի իրապես հաշված մեծությունը կլինի

$$\tilde{s} = x_1 y_1 (1 + \delta)^n + \sum_{i=2}^n x_i y_i (1 + \delta)^{n+2-i} :$$

Ընդ որում, դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|\tilde{s} - s| \leq \frac{n}{2} q^{1-t} \hat{s} + O(q^{2(1-t)}),$$

որտեղ

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| : \quad \diamond$$

Ի մի բերելով մեքենայական թվերի հետ թվաբանական գործողությունների համառոտ դիտարկումը՝ նշենք, որ այդ գործողությունները կորցնում են իրենց սովորական հատկությունները: Դա հատկապես վերաբերում է տեղափոխական և բաշխական հատկություններին, որոնք խախտվում են համակարգիչներով թվաբանական գործողություններ կատարելիս: Այսպիսի հարցերի մանրակրկիտ ուսումնասիրությունը կարելի է գտնել [10, 59] մեմագրություններում:

## 1.4 Խնդիրների և հաշվողական ալգորիթմների կայունությունը

Հաճախ խնդրի մուտքային տվյալները կամ նրա մաթեմատիկական մոդելը պարունակում են անճշտություններ և սխալանքներ: Ցավոք ոչ միշտ են արդյունքի և սկզբնական տվյալների սխալանքները ունենում նույն կարգը: Որոշ խնդիրներ շատ զգայուն են սկզբնական տվյալների փոփոխության նկատմամբ: Խնդրի լուծման ընթացքում գործնականորեն անխուսափելի կլորացման սխալանքները նույնպես կարող են էսպես ազդել վերջնական արդյունքի վրա: Այդ պատճառով խնդիրը լուծելիս շատ կարևոր է պատկերացում ունենալ, թե որքանով է նրա լուծումը կախված նշված անճշտություններից ու սխալանքներից, ինչպես նաև լուծման մեթոդի ընտրությունից:

### 1.4.1 Պայմանավորվածություն

Սովորաբար *պայմանավորվածություն* հասկացությանը բնութագրում են մաթեմատիկական խնդրի լուծման զգայունությունը մուտքային տվյալների փոքր փոփոխությունների նկատմամբ: Դիտարկենք սխեմատիկորեն ներկայացված

$$[y_1, y_2, \dots, y_m] = \mathbf{P}[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (1.4.1)$$

խնդիրը, որտեղ  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  խնդրի մուտքային, իսկ  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  ելքային տվյալներն են: Ասում են, որ (1.4.1) խնդիրը *վատ պայմանավորված է*, եթե մուտքային

տվյալների  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  փոքր փոփոխությունները կարող են հանգեցնել ելքային տվյալների  $\Delta y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  մեծ փոփոխությունների: Փաստորեն վատ պայմանավորված խնդիրները *անկայուն են* մուտքային տվյալների նկատմամբ:

Բերենք վատ պայմանավորված խնդիրների օրինակներ:

**Օրինակ 1.4.1** (Ջ.Ուիլկինսոն [59]): Դիտարկենք

$$P(x) \equiv (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots$$

բազմանդամը: Դժվար չէ տեսնել, որ այդ բազմանդամի արմատներն են  $x_n = n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 20$  թվերը: Փոխարինելով  $x^{19}$ -ի  $-210$  գործակիցը  $-210 + 2^{-23}$  թվով  $P(x)$  բազմանդամի փոխարեն կունենանք

$$\tilde{P}(x) \equiv x^{20} - (210 - 2^{-23})x^{19} + \dots = P(x) + 2^{-23}x^{19} :$$

Ուսումնասիրենք, թե նման փոքր փոփոխությունն ինչպիսի ազդեցություն կունենա բազմանդամի արմատների վրա: Մեծ ճշգրտությամբ իրականացված հաշվումների արդյունքում ստացվել են արմատների հետևյալ արժեքները.

$x_1 = 1.000$	$x_6 = 6.000$	$x_{12,13} = 11.794 \pm 1.652i$
$x_2 = 2.000$	$x_7 = 7.000$	$x_{14,15} = 13.992 \pm 2.519i$
$x_3 = 3.000$	$x_8 = 8.007$	$x_{16,17} = 16.731 \pm 2.813i$
$x_4 = 4.000$	$x_9 = 8.917$	$x_{18,19} = 19.502 \pm 1.940i$
$x_5 = 5.000$	$x_{10,11} = 10.095 \pm 0.643i$	$x_{20} = 20.847$

Տեսնում ենք, որ  $x^{19}$ -ի գործակցի չնչին փոփոխությունը հանգեցրեց արմատների կտրուկ փոփոխության: Ընդ որում, ի հայտ եկան անգամ կոմպլեքս արմատներ: Այդ երևույթի պատճառը բուն խնդրի անկայունությունն է: Հաշվարկները կատարվել են բարձր ճշտությամբ, և կլորացումների սխալանքները չէին կարող նման արդյունքների պատճառ դառնալ:  $\diamond$

**Օրինակ 1.4.2** Դիտարկենք

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

գծային համակարգը, որն ունի  $x = 1$ ,  $y = 1$  միակ լուծում: Առաջին հավասարման աջ մասը 0.01 չափով փոփոխելով կատանանք

$$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$

համակարգը: Այս համակարգի լուծումը կլինի  $x = 11.01$ ,  $y = 0$ , որը էապես հեռու է սկզբնական համակարգի լուծումից:  $\diamond$

Որոշ տիպի խնդիրներում որպես պայմանավորվածության չափ սահմանվում է այսպես կոչված *պայմանավորվածության թիվը*: Լուսաբանենք այս հասկացությունը  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու օրինակով: Պարզենք թե արգումենտի փոքր փոփոխությունը ֆունկցիայի արժեքի ինչպիսի փոփոխության կհանգեցնի: Օգտվելով Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմից՝ կունենանք

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi) \Delta x \approx f'(x) \Delta x :$$

Այստեղից՝

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \left| \frac{f'(x) \Delta x}{f(x)} \right| = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{\Delta x}{x} \right| :$$

Այսպիսով, ֆունկցիայի արժեքի հարաբերական սխալանքը արտահայտվեց արգումենտի հարաբերական սխալանքի միջոցով: Որպես արգումենտի հարաբերական սխալանքի ուժեղացնող գործակից հանդես է գալիս

$$\kappa(x) \equiv \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \quad (1.4.2)$$

մեծությունը, որը կոչվում է դիտարկվող խնդրի *պայմանավորվածության թիվ*:

**Օրինակ 1.4.3** Դիտարկենք  $f(x) = \arcsin x$  ֆունկցիան: Ըստ (1.4.2) բանաձևի՝ ունենք

$$\kappa(x) = \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} \right| :$$

Ինչպես հայտնի է  $\arcsin x \approx \pi/2$ , երբ  $x \approx 1$ : Այդ պատճառով արգումենտի այդպիսի արժեքների համար

$$\kappa(x) \approx \frac{2x}{\pi\sqrt{1-x^2}} :$$

Այստեղից երևում է, որ  $f(x) = \arcsin x$  ֆունկցիայի հաշվման ժամանակ, երբ  $x$ -ը մոտ է 1-ին, կարող են ի հայտ գալ մեծ սխալանքներ:  $\diamond$

**Օրինակ 1.4.4** Դիտարկենք

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Երբ  $|\alpha| \neq 1$ , ապա համակարգը չվերասերված է և նրա լուծումն է

$$x(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2}, \quad y(\alpha) = -\frac{\alpha}{1-\alpha^2} :$$

Օգտվելով (1.4.2) բանաձևից՝ խնդրի պայմանավորվածության թվերի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները.

$$\kappa_x(\alpha) = \left| \frac{\alpha x'(\alpha)}{x(\alpha)} \right| = \frac{2\alpha^2}{|1-\alpha^2|}, \quad \kappa_y(\alpha) = \left| \frac{\alpha y'(\alpha)}{y(\alpha)} \right| = \frac{1+\alpha^2}{|1-\alpha^2|} :$$

Հեշտ է տեսնել, որ խնդիրը վատ է պայմանավորված, երբ  $|\alpha| \approx 1$ : Օրինակ, եթե  $\alpha = 0.9950$ , ապա  $x \approx 100.2506$ , իսկ  $\alpha = 0.9951$  դեպքում ստանում ենք  $x \approx 102.2914$ : Տեսնում ենք, որ արգումենտի  $\Delta\alpha = 0.0001$  փոքր փոփոխությունը հանգեցնում է լուծման բավականաչափ մեծ  $\Delta x \approx 2.0408$  փոփոխություն: Ունենք

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{0.0001}{0.9950} \approx 0.0001, \quad \frac{\Delta x}{x} \approx \frac{2.0408}{100.2506} \approx 0.0204 :$$

Այսպիսով, լուծման հարաբերական սխալանքը արգումենտի հարաբերական սխալանքի համեմատ մեծացավ համարյա 200 անգամ: Ընդ որում,  $\kappa_x(\alpha) \approx 198.5$   $\diamond$

Վատ պայմանավորված խնդրի թվային հաշվարկները կլորացման սխալանքների պատճառով կարող են հանգեցնել ճշգրիտ լուծումից զգալի շեղման:

## 1.4.2 Հաշվողական ալգորիթմների կայունության մասին

Մաթեմատիկական խնդիրների լուծման որոշ հաշվողական ալգորիթմների իրականացման ժամանակ ի հայտ է գալիս *թվային անկայունության* երևույթ: Այլ կերպ, փոքր սխալանքները, որոնք թույլ են տրվում հաշվողական ընթացքի այս կամ այն փուլում, հետագայում մեծանալով հանգեցնում են վերջնական արդյունքի մեծ աղավաղման:

**Օրինակ 1.4.5** Դիցուք պահանջվում է հաշվել հետևյալ մեծությունները.

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots : \quad (1.4.3)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (1.4.3) հաջորդականությունը մոնոտոն նվազող է և ձգտում է զրոյի.

$$E_1 > E_2 > \dots > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0 :$$

Ստանանք (1.4.3) հաջորդականության հաշվման համար անդրադարձ առնչություն: Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք.

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

կամ

$$E_1 = \frac{1}{e}, \quad E_n = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots : \quad (1.4.4)$$

Այս բանաձևերով կատարված հաշվարկները տվել են հետևյալ արդյունքները.

$E_1 = 0.3678795$	$E_8 = 0.1009320$	$E_{15} = -0.2237788$
$E_2 = 0.2642411$	$E_9 = 0.0916122$	$E_{16} = 4.5804613$
$E_3 = 0.2072766$	$E_{10} = 0.0838778$	$E_{17} = -76.8678422$
$E_4 = 0.1708934$	$E_{11} = 0.0773436$	$E_{18} = 1384.6211604$
$E_5 = 0.1455329$	$E_{12} = 0.0718768$	$E_{19} = -26306.8020470$
$E_6 = 0.1268024$	$E_{13} = 0.0656010$	$E_{20} = 526137.0409400$
$E_7 = 0.1123835$	$E_{14} = 0.0815853$	

Ինչո՞վ են պայմանավորված այսպիսի մեծ շեղումները: Հաշվարկների առաջին քայլում թույլ տրված սխալանքը կտրացման սխալանքն է, երբ  $1/e$  թիվը ներկայացվում է յոթ իմաստալից թվանշանների միջոցով: Այդ սխալանքը մոտավորապես հավասար է  $4.4 \cdot 10^{-8}$ : Սակայն հաշվարկների հաջորդ փուլերում այն հաջորդաբար բազմապատկվում է  $-2, -3, \dots, -20$  թվերով, ինչի արդյունքում ունենում ենք  $20!$  բազմապատկիչ: Ահա սա է անհեթեթ թվային արդյունքների ստացման պատճառը: Ուստի առաջարկված (1.4.4) հաշվողական ալգորիթմը անկայուն է: Այսպիսով, տեսականորեն անթերի (1.4.4) ալգորիթմը բացարձակապես անկիրառելի է հաշվողական մաթեմատիկայի տեսակետից:

Փորձենք կառուցել նման թերությունից զերծ ալգորիթմ: Ձևափոխենք (1.4.4) անդրադարձ բանաձևը հետևյալ կերպ.

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}, \quad n = \dots, 3, 2 : \quad (1.4.5)$$

Այժմ հաշվարկների յուրաքանչյուր փուլում  $E_n$ -ի սխալանքը բազմապատկվում է  $1/n$  բազմապատկիչով: Այսպիսով, եթե մենք հաշվումները սկսենք մի որևէ  $E_n$  արժեքից, երբ  $n \gg 1$ , և հաշվումները կատարենք (1.4.5) բանաձևի համաձայն, ապա սկզբնական կամ միջանկյալ կտրացումների սխալանքները կփոքրանան յուրաքանչյուր փուլում: Սկզբնական սխալանքը գնահատելու համար նկատենք, որ

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} :$$

Այսպիսով, եթե վերցնենք  $E_{20} = 0$ , ապա կկատարենք  $1/21$ -ից փոքր սկզբնական սխալանք: Այդ սխալանքը  $E_{19}$ -ի հաշվման ժամանակ բազմապատկվում է  $1/20$ -ով, այնպես որ  $E_{19}$ -ի սխալանքը չի գերազանցում  $\frac{1}{21} \cdot \frac{1}{20} \approx 0.0024$ : Հետագա հաշվումները կհանգեցնեն սխալանքի շատ ավելի զգալի փոքրացման: Ստորև բերվում են թվային արդյունքները.

$E_{20} = 0.0000000$	$E_{13} = 0.0669477$	$E_6 = 0.1268024$
$E_{19} = 0.0500000$	$E_{12} = 0.0717733$	$E_5 = 0.1455329$
$E_{18} = 0.0500000$	$E_{11} = 0.0773522$	$E_4 = 0.1708934$
$E_{17} = 0.0527778$	$E_{10} = 0.0838771$	$E_3 = 0.2072766$
$E_{16} = 0.0557190$	$E_9 = 0.0916123$	$E_2 = 0.2642411$
$E_{15} = 0.0590176$	$E_8 = 0.1009320$	$E_1 = 0.3678794$
$E_{14} = 0.0627322$	$E_7 = 0.1123835$	

◇

Նշենք, որ սույն դասընթացում թվային մեթոդների ուսումնասիրման ժամանակ մեծ տեղ կհատկացվի հաշվողական ալգորիթմների կայունության հետազոտմանը:

## Խնդիրներ և վարժություններ - 1

1. Դիցուք  $B = kA$ ,  $b = ka$ , որտեղ  $k$ -ն զրոյից տարբեր բազմապատկիչ է: Ապացուցել, որ

$$\Delta(b) = |k|\Delta(a), \quad \delta(b) = \delta(a) :$$

2. Դիցուք  $B = \frac{A_1}{A_2}$ ,  $b = \frac{a_1}{a_2}$ : Ապացուցել, որ

$$\delta(b) = \delta(a_1) + \delta(a_2) :$$

3. Դիցուք  $B = \sqrt[m]{A}$ ,  $b = \sqrt[m]{a}$  ( $m$ -ը բնական թիվ է): Ապացուցել, որ

$$\delta(b) = \frac{1}{m} \delta(a) :$$

4. Դիցուք  $B = \ln A$ ,  $b = \ln a$ : Ապացուցել, որ

$$\Delta(b) \approx \delta(a) :$$

5. Առաջարկել ստորև բերված արտահայտությունների հաշվման եղանակներ, որոնց դեպքում չի կատարվի ճշգրտության կորուստ.

ա) $\sqrt{x^2 + 1} - x$ ,	բ) $\ln x - 1$ ,
գ) $\ln(x + 1) - \ln x$ ,	դ) $(\cos x - e^{-x}) / \sin x$ ,
ե) $x^{-3}(\sin x - x)$ ,	զ) $\sin x - \operatorname{tg} x$ ,
է) $e^x - e$ ,	ը) $\sqrt{(x + 1)/x} - \sqrt{(x - 1)/x}$ :

6. Առաջարկել

$$f(x) = x + e^x - e^{3x}$$

ֆունկցիայի արժեքների հաշվման եղանակ փոքր  $x$ -երի համար:

7. Դիցուք  $f(x) = -e^{-2x} + e^x$ : Փոքր  $x$ -երի դեպքում ֆունկցիայի արժեքները հաշվելու համար ստորև բերված արտահայտություններից ո՞րն է ամենաճշգրիտը.

$$\text{ա) } 3x, \quad \text{բ) } 3x(1 - x/2), \quad \text{գ) } 2 - 3x :$$

8. Ընտրելով համապատասխան բանաձևերը՝ գտնել հետևյալ քառակուսի հավասարումների արմատները.

ա) $x^2 - 1000x + 1 = 0$ ,	բ) $x^2 + 10000x + 1 = 0$ ,
գ) $x^2 - 100000x + 1 = 0$ ,	դ) $x^2 + 1000000x + 1 = 0$ :

Ստուգել ստացված պատասխանները:

9. Գրել ծրագիր և համակարգչի միջոցով հաշվել

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1 \quad \text{և} \quad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

Ֆունկցիաների արժեքները  $x_k = 2^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  կետերում: Թեև  $f = g$ , կատանանք տարբեր արդյունքներ: Բացատրել այդ երևույթը:

10. Դիցուք  $A = 2^{12} + 2^{-12}$ : Գտնել  $FL(2; 127, 23)$  համակարգին պատկանող  $a'$  և  $a''$  թվերը, որոնք համապատասխանաբար ձախից և աջից ամենամոտոն են  $A$ -ին:

11. Սահող կետով թվերի  $FL(10; 16, 3)$  համակարգում բերել այնպիսի  $x$ ,  $y$  և  $z$  թվերի օրինակներ, որ

$$\begin{aligned} \text{ա)} & \text{ fl}(\text{fl}(x + y) + z) \neq \text{fl}(x + \text{fl}(y + z)), \\ \text{բ)} & \text{ fl}(\text{fl}(x \cdot y) \cdot z) \neq \text{fl}(x \cdot \text{fl}(y \cdot z)) : \end{aligned}$$

12. Ճի՞շտ է արդյոք, որ միշտ

$$\text{fl}\left(\frac{a + b}{2}\right) \in [a, b] :$$

13. Ապացուցել, որ կանայական  $2^{-n}$  թիվը ( $n$ -ը բնական թիվ է) կարելի է ներկայացնել

$$2^{-n} = 0.d_1d_2\dots d_n \quad (0 \leq d_i \leq 9)$$

տասնորդական գրառմամբ:

14. Յույց տալ, որ  $f(x) = x^\alpha$  ֆունկցիայի պայմանավորվածության թիվը  $x$ -ից անկախ է:

15. Հաշվել պայմանավորվածության թիվը հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\begin{aligned} \text{ա)} & (x - 1)^\alpha, \quad \text{բ)} \ln x, \quad \text{գ)} \sin x, \\ \text{դ)} & e^x, \quad \text{ե)} x^{-1}e^x, \quad \text{զ)} \arccos x : \end{aligned}$$

16. Դիցուք  $A_n$  հաջորդականությունը տրվում է հետևյալ անդրադարձ բանաձևերի միջոցով.

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_{n+1} = \frac{13}{3}A_n - \frac{4}{3}A_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots :$$

Արդյո՞ք կայուն են առաջարկված բանաձևերով իրականացվող հաշվարկները: Կատարել թվային հաշվարկներ:

17. Հաջորդականությունը տրվում է հետևյալ կերպ.

$$B_n = \int_0^1 x^n (x+5)^{-1} dx, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Ցույց տալ, որ  $B_0 = \ln 1.2$  և

$$B_n = \frac{1}{n} - 5B_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots :$$

Օգտագործելով այս անդրադարձ բանաձևերը՝ հաշվել  $B_0, B_1, \dots, B_{10}$  մեծությունները և գնահատել ստացված  $B_{10}$  արժեքի ճշտությունը:

18. Հաշվել նախորդ վարժության մեջ սահմանված  $B_{20}$  մեծությունը (այդ նպատակով կարելի է օգտագործել ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի թեյլորի շարքը): Ապա հակառակ կարգով հաշվել  $B_{19}, B_{18}, \dots, B_0$  մեծությունները՝ օգտագործելով անդրադարձ առնչությունները: Որքանով է ճշգրիտ ստացված  $B_0$  արժեքը: Բացատրել արդյունքը:



## Գլուխ 2

# ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

## 2.1 Արմատների տեղայնացումը

Բնագիտության շատ խնդիրներում առաջանում է ոչ գծային հավասարումների լուծման անհրաժեշտություն: Օրինակ՝ լույսի դիֆրակցիայի տեսության մեջ հայտնի է

$$x - \operatorname{tg} x = 0$$

հավասարումը: Մոլորակային ուղեծրերի հաշվարկը կապված է

$$x - a \sin x = b$$

*Կեպլերի հավասարման* արմատների որոշման հետ՝  $a$  և  $b$  պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում:

Միշտ չէ, որ հաջողվում գտնել հավասարման ճշգրիտ լուծումը: Ուստի կարևոր նշանակություն ունեն արմատների որոշման մոտավոր մեթոդները:

Դիտարկենք

$$f(x) = 0 \tag{2.1.1}$$

ընդհանուր տեսքով տրված հավասարումը: Հիշեցնենք, որ (2.1.1) հավասարման *արմատ* կոչվում է այն  $r$  թիվը, որի համար  $f(r) = 0$  (ասում են նաև, որ  $r$ -ը  $f(x)$  ֆունկցիայի *գրուն է*):

Ենթադրենք, որ (2.1.1) հավասարումն ունի միայն *մեկուսացված արմատներ*, այսինքն՝ յուրաքանչյուր արմատի համար գոյություն ունի շրջակայք, որն այդ հավասարման այլ արմատներ չի պարունակում: Որպես օրենք, (2.1.1) հավասարման մեկուսացված իրական արմատների մոտավոր հաշվումը բաղկացած է երկու փուլերից.

- *արմատների տեղայնացումը*, այսինքն՝ հավասարման մեկ և միայն մեկ արմատ պարունակող հնարավորին չափ փոքր միջակայքերի որոշումը,
- *արմատների ճշգրտումը*, այսինքն՝ դրանց հաշվումը տրված ճշտությամբ:

Արմատների տեղայնացման համար հաճախ օգտվում են ստորև բերվող թեորեմից:

**Թեորեմ 2.1.1** (Բ.Բոլցանո-Օ.Կոշի [62]) : Եթե  $f(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, այսինքն՝  $f(a)f(b) < 0$ , ապա  $(a, b)$  միջակայքում գոյություն ունի (2.1.1) հավասարման արմատ:

Նշենք, որ, եթե  $f(x)$  ֆունկցիան  $(a, b)$  միջակայքում մոնոտոն է, ապա այդ արմատը կլինի միակը:

Սովորաբար արմատների տեղայնացման ընթացքը սկսվում է  $[a, b]$  հատվածի ծայրակետերում  $f(x)$  ֆունկցիայի նշանների որոշումից: Այնուհետև որոշվում են  $f(x)$  ֆունկցիայի նշանները մի շարք  $c_1, c_2, \dots$  միջանկյալ կետերում, որոնք ընտրվում են ինչ-որ սկզբունքով: Եթե  $f(c_k)f(c_{k+1}) < 0$ , ապա, համաձայն Բոլցանո-Կոշու թեորեմի,  $(c_k, c_{k+1})$  միջակայքում գոյություն ունի (2.1.1) հավասարման արմատ: Պետք է նաև այս կամ այն եղանակով պարզել՝ արմատը միա՞կն է, թե՞ ոչ:

**Օրինակ 2.1.1** : Տեղայնացնել

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0 \quad (2.1.2)$$

հավասարման արմատները:

Կազմենք աղյուսակ.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-	+	+	+	-	-	+

Քանի որ (2.1.2) հավասարումը չի կարող ունենալ երեքից ավելի իրական արմատներ, ապա այդ արմատներն ընկած են  $(-3, -2)$ ,  $(0, 1)$  և  $(2, 3)$  միջակայքերում:  $\diamond$

Եթե  $f'(x)$  ֆունկցիայի գրոները գտնվում են հեշտությամբ, ապա  $f(x) = 0$  հավասարման արմատների տեղայնացման ընթացքը կարելի է կարգավորել: Դրա համար բավական է որոշել  $f(x)$  ֆունկցիայի նշանները միջակայքի ծայրակետերում և այն կետերում, որոնցում նրա ածանցյալը հավասար է զրոյի:

**Օրինակ 2.1.2** : Տեղայնացնել

$$f(x) \equiv x^4 - 4x - 1 = 0 \quad (2.1.3)$$

հավասարման արմատները:

Քանի որ  $f'(x) = 4(x^3 - 1)$ , ապա  $f'(x) = 0$ , երբ  $x = 1$ : Կազմենք հետևյալ աղյուսակը.

$x$	-1	1	2
$f(x)$	+	-	+

Ուստի (2.1.3) հավասարումն ունի միայն երկու իրական արմատներ, որոնցից մեկը գտնվում է  $(-1, 1)$ , մյուսը՝  $(1, 2)$  միջակայքում:  $\diamond$

Որոշ դեպքերում (2.1.1) հավասարման արմատները կարելի է տեղայնացնել գրաֆիկորեն:

**Օրինակ 2.1.3 :** Տեղայնացնել

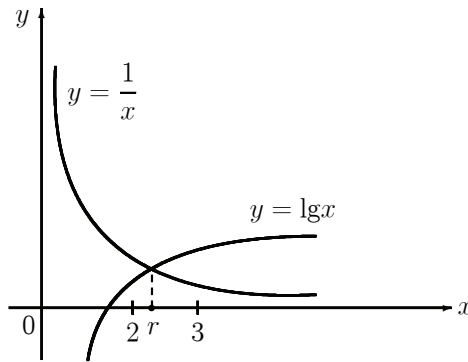
$$x \lg x - 1 = 0 \tag{2.1.4}$$

հավասարման արձատները:

Դիտարկենք (2.1.4) հավասարմանը համարժեք

$$\lg x = \frac{1}{x}$$

հավասարումը: Դրանով իսկ (2.1.4) հավասարման արձատները  $y = \lg x$  և  $y = 1/x$  կորերի հատման կետերի արժեքներն են (նկ.2.1.1):



**Նկ.2.1.1** Արձատների տեղայնացման գրաֆիկական եղանակը

Կառուցելով այդ կորերը՝ պարզ է դառնում, որ (2.1.4) հավասարումն ունի մեկ արձատ, որը գտնվում է (2, 3) միջակայքում: ◊

Հետևյալ պնդումը հնարավորություն է տալիս գոնե ընդհանուր կերպով գնահատել հավասարման արձատի մոտավոր արժեքի սխալանքը:

**Թեորեմ 2.1.2 :** Դիցուք  $\xi \in [a, b]$  կետը (2.1.1) հավասարման  $r \in [a, b]$  արձատի մոտավոր արժեքն է: Բացի այդ,  $f(x)$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում անընդհատ ածանցելի է և գոյություն ունի այնպիսի  $m > 0$  հաստատուն, որ

$$|f'(x)| \geq m, \quad x \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում ճիշտ է

$$|\xi - r| \leq \frac{|f(\xi)|}{m} \tag{2.1.5}$$

գնահատականը:

Ապացույց: Նախ նշենք, որ  $|f'(x)| \geq m$  պայմանը նշանակում է, որ  $f'(x)$  անընդմիջ  $[a, b]$  հատվածում չի փոխում իր նշանը: Այդ պատճառով (2.1.1) հավասարումը  $[a, b]$  հատվածում  $r$ -ից բացի այլ արմատ չունի: Համաձայն Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմի՝ գոյություն ունի այնպիսի  $c \in (a, b)$  կետ, որ

$$f(\xi) - f(r) = f'(c)(\xi - r) :$$

Քանի որ  $f(r) = 0$ , ապա

$$f(\xi) = f'(c)(\xi - r) :$$

Ուստի

$$|f(\xi)| = |f'(c)| |\xi - r| \geq m |\xi - r| ,$$

որտեղից էլ հետևում է (2.1.5) գնահատականը:  $\square$

Հաջորդ պարագրաֆում կշարադրենք պարզագույն մի մեթոդ, որը կարելի է կիրառել (2.1.1) հավասարման արմատների ինչպես տեղայնացման, այնպես էլ ճշգրտման համար:

## 2.2 Կիսման եղանակը

Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և  $f(a)f(b) < 0$ : Նշանակենք  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  և որպես (2.1.1) հավասարման որոնելի արմատի սկզբնական մոտարկում վերցնենք հատվածի միջնակետը .

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} :$$

Եթե  $f(x_0) \neq 0$ , ապա  $[a_0, x_0]$  և  $[x_0, b_0]$  հատվածներից ընտրում ենք այն, որի ծայրակետերում  $f(x)$  ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ: Նոր՝  $[a_1, b_1]$  հատվածը նորից կիսում ենք երկու հավասար մասերի և կատարում մնանատիպ ընտրություն: Այդպես շարունակելով՝ արդյունքում կստանանք կամ հավասարման ճշգրիտ արմատը, կամ էլ ներդրված միջակայքերի

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots \quad (2.2.1)$$

անվերջ հաջորդականություն: Ընդ որում,

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2.2)$$

և

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} : \quad (2.2.3)$$

Ստացված (2.2.1) հատվածների ձախ ծայրակետերը կազմում են մոնոտոն չնվազող

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots < b$$

սահմանափակ հաջորդականություն, իսկ այդ ծայրակետերը՝ մոնոտոն չաճող

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots > a$$

սահմանափակ հաջորդականություն: Ուստի գոյություն ունեն

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r^{(2)}$$

սահմանները: Եթե (2.2.3) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ  $n \rightarrow \infty$ , ապա կստանանք, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  և դրանով իսկ  $r^{(1)} = r^{(2)} \equiv r$  :

Ցույց տանք, որ  $r$ -ը  $f(x) = 0$  հավասարման արմատն է: Իրոք, անցնելով սահմանի (2.2.2) անհավասարության մեջ,  $f(x)$  ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ կստանանք  $(f(r))^2 \leq 0$ : Հետևաբար  $f(r) = 0$ :

Կիսման ընթացքի  $n$ -րդ քայլում ունենք  $[a_n, b_n]$  հատվածի

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2.5)$$

միջնակետը, որը կարելի է դիտարկել որպես  $r$  ճշգրիտ արմատի ընթացիկ մոտարկում: Հաշվի առնելով (2.2.3)-ը՝ հեշտ է տեսնել, որ

$$|r - x_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} : \quad (2.2.4)$$

Ստորև տրվում է կիսման մեթոդի պզորիթմը.

```

Pseudocode BISECTION
input  $a, b, N, \delta, \varepsilon$ 
 $u = f(a)$ 
 $v = f(b)$ 
 $e = b - a$ 
output  $a, b, u, v$ 
if  $sign(u) = sign(v)$  then stop
for  $k = 1, 2, \dots, N$  do
     $e = e/2$ 
     $c = a + e$ 
     $w = f(c)$ 
    output  $k, c, w, e$ 
    if  $|e| < \delta$  or  $|w| < \varepsilon$  then stop
    if  $sign(w) \neq sign(u)$  then
         $b = c$ 
         $v = w$ 
    else
         $a = c$ 
         $u = w$ 
    endif
end

```

Ալգորիթմի վերաբերյալ տանք մեկ պարզաբանում: Հատվածի  $c$  միջնակետը հաշվվում է  $c = a + (b - a)/2$  բանաձևով  $c = (a + b)/2$  բանաձևի փոխարեն: Դրա պատճառը պարզ կդառնա հետևյալ օրինակից:

**Օրինակ 2.2.1** (Ջ. Ֆորսայթ [64]) : Վերցնենք  $a = 0.981$ ,  $b = 0.983$ : Ակնհայտ է, որ հատվածի միջնակետը կլինի  $c = 0.982$ : Ենթադրենք, հաշվումները կատարվում են սահող կետով թվերի  $FL(10; p, 3)$  համակարգում: Ըստ  $c = (a + b)/2$  բանաձևի կստանանք

$$\begin{aligned} fl(a + b) &= 10^1 \cdot 0.196, \\ fl(fl(a + b) : 2) &= 10^0 \cdot 0.980 : \end{aligned}$$

Այսինքն՝ ստացված «միջնակետը» գտնվում է  $[a, b]$  հատվածից դուրս: Մյուս կողմից, ըստ  $c = a + (b - a)/2$  բանաձևի կունենանք.

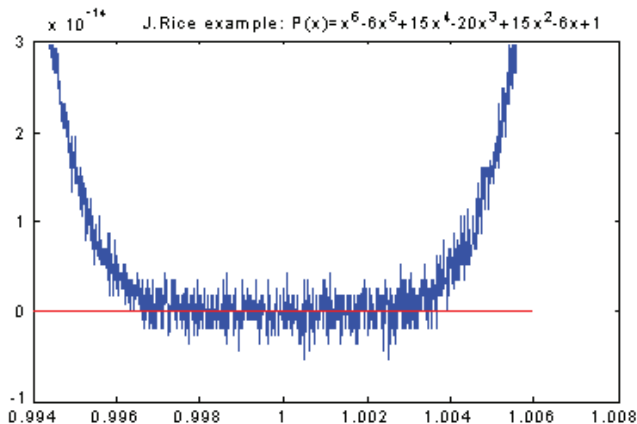
$$\begin{aligned} fl(b - a) &= 10^{-2} \cdot 0.200, \\ fl(fl(b - a)/2) &= 10^{-2} \cdot 0.100, && \diamond \\ fl(a + fl(fl(b - a)/2)) &= 10^0 \cdot 0.982 : \end{aligned}$$

Նշենք կիսման եղանակի մեկ առանձնահատկություն: Հաշվումների ընթացքում կարևոր դեր են խաղում ոչ թե  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքները, այլ այդ արժեքների նշանները: Քանի դեռ  $f(x)$ -ի նշանը որոշվում է ճշգրիտ, այդ արժեքի հաշվման ժամանակ թույլ տրված կլորացման սխալանքները բացարձակապես չեն ազդում ալգորիթմի ընթացքի վրա: Հակառակ դեպքում հաջորդ ենթամիջակայքը կարող է պարզապես սխալ ընտրվել: Կարելի է մտածել, որ կլորացման սխալանքները չեն կարող այնքան մեծ լինել, որ հանգեցնեն ֆունկցիայի նշանի փոփոխության: Սակայն, ինչպես ցույց է տալիս հետևյալ օրինակը, դա այդպես չէ:

**Օրինակ 2.2.2** (Ջ. Ռայս [47]) : Դիտարկենք վեցերորդ աստիճանի բազմանդամ՝

$$P(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 : \tag{2.2.5}$$

Նկ. 2.2.1 -ում բերված է այդ բազմանդամի գրաֆիկը:

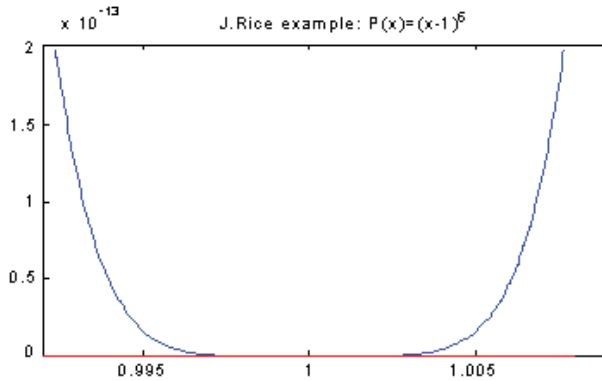


**Նկ. 2.2.1**  $P(x)$  բազմանդամի գրաֆիկը՝ կառուցված ըստ (2.2.5) բանաձևի

Պարզ երևում է, որ հաշվումների ժամանակ ստացվում են բազմանդամի բացասական արժեքներ, չնայած տեսականորեն այդ բազմանդամն ամենուրեք դրական է, բացի  $x = 1$  կետից, որտեղ  $P(1) = 0$ : Եթե  $P(x)$  բազմանդամը ներկայացնենք

$$P(x) = (x - 1)^6 \tag{2.2.6}$$

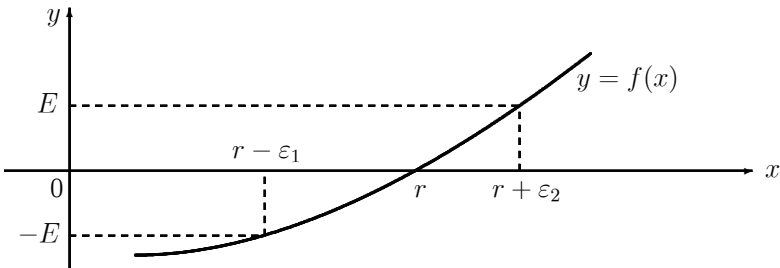
համարժեք տեսքով, ապա նրա գրաֆիկը կունենա նկ. 2.2.2-ում պատկերված տեսքը:



**Նկ. 2.2.2**  $P(x)$  բազմանդամի գրաֆիկը՝ կառուցված ըստ (2.2.6) բանաձևի

Նշենք, որ երկու գրաֆիկներն էլ (նկ. 2.2.1 և նկ. 2.2.2) ստացվել են հայտնի MATLAB փաթեթի օգնությամբ:  $\diamond$

Վերջում նշենք մեկ հանգամանք, որը կարող է առաջանալ նկարագրված մեթոդի իրականացման ժամանակ: Նշանակենք  $E$ -ով  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքների հաշվման ժամանակ թույլ տրված սխալանքների բացարձակ արժեքների մաքսիմումը: Քանի դեռ  $|f(x)| > E$ , ապա  $f(x)$ -ի նշանը որոշվում է ճշգրիտ: Որոնելի  $r$  արմատի շրջակայքում ֆունկցիայի արժեքները մոտ են գրոյին: Այդ պատճառով գոյություն ունի այսպես կոչված *անորոշության միջակայք*՝  $(r - \varepsilon_1, r + \varepsilon_2)$ , որտեղ ֆունկցիայի նշանը կարող է որոշվել ոչ ճշգրիտ (նկ. 2.2.3): Եթե մոտարկումներն ընկնում են նշված միջակայքը, ապա հետագա հաշվումները դառնում են անստույգ:



**Նկ. 2.2.3** Անորոշության միջակայք

Յավոք, անորոշության միջակայքի նախապես որոշելը չափազանց բարդ խնդիր է: Այն կախված է արմատի շրջակայքում  $f(x)$  ֆունկցիայի վարքից, հաշվողական միջոցների հզորությունից և այլն: Հաջորդական մոտարկումների անկայուն վարքը փաստորեն մեզ հուշում է, որ մենք գտնվում ենք անորոշության միջակայքում: Երբ դա տեղի ունի, անհիմաստ են դառնում հետագա հաշվումները: Միաժամանակ հարկ է նշել, որ ժամանակակից համակարգիչները հաշվարկները կատարում են մեծ ճշգրտությամբ և, որպես օրենք, գործնականորեն պահանջվող ճշգրտությունը ապահովվում է մինչև մոտարկումների անորոշության միջակայքում հայտնվելը:

Պարզությամբ հանդերձ, միջակայքի կիսման եղանակը ունի թերություն: Այն զուգամիտում է բավականաչափ դանդաղ: Պարզենք, թե քանի՞ քայլ է պետք կատարել  $r$  արմատի մոտավոր արժեքը  $\varepsilon > 0$  ճշգրտությամբ ստանալու համար: Օգտվելով (2.2.4) գնահատականից՝ պահանջենք, որ

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon :$$

Այստեղից կստանանք, որ քայլերի քանակը պետք է բավարարի

$$n+1 > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

անհավասարությանը: Այսպիսով՝  $n \sim \log_2 \varepsilon^{-1}$ : Հետագա պարագրաֆներում մենք կդիտարկենք ոչ գծային հավասարումների լուծման ավելի արագ մեթոդներ:

## 2.3 Պարզ իտերացիայի մեթոդը

Հաշվողական մաթեմատիկայի կարևոր հասկացություններից մեկը *իտերացիան* է (այդ բառը ծագել է լատիներեն *iteratio*՝ կրկնություն բառից): Իտերացիա կոչվում է որևէ մաթեմատիկական գործողության կրկնություններով արտադրված շարքի անդամներից մեկը, որն օգտագործում է նախորդ քայլերում ստացված արժեքները: Այդպիսի պարզագույն օրինակ է ֆակտորիալի հաշվումը.

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ n! &= n \cdot (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots : \end{aligned}$$

Իտերացիաներ կիրառվում են ոչ գծային հավասարումների արմատների որոշման ժամանակ, գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման համար և այլն:

Դիցուք ոչ գծային հավասարումը տրված է

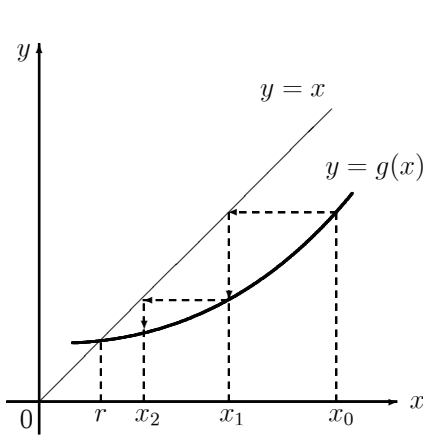
$$x = g(x) \tag{2.3.1}$$

տեսքով: Այդ հավասարման լուծումը կարելի է կազմակերպել հետևյալ կերպ: Նախապես ընտրվում է (2.3.1) հավասարման որոնելի  $r$  արմատի ինչ-որ  $x_0$  սկզբնական մոտարկում, այնուհետև հաջորդ մոտարկումները հաշվվում են

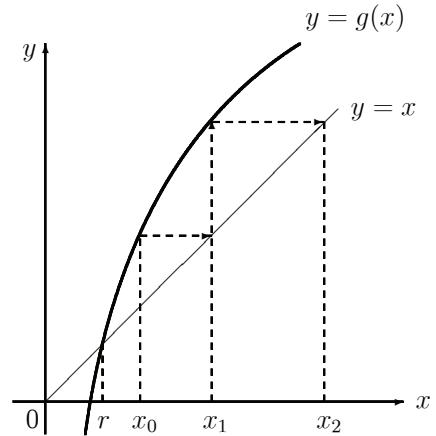
$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.3.2}$$



օրենքով: Հաջորդական մոտարկումների այս ընթացքը կոչվում է *պարզ իտերացիայի մեթոդ*: Նկ. 2.3.1 - ում տրված է մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը:



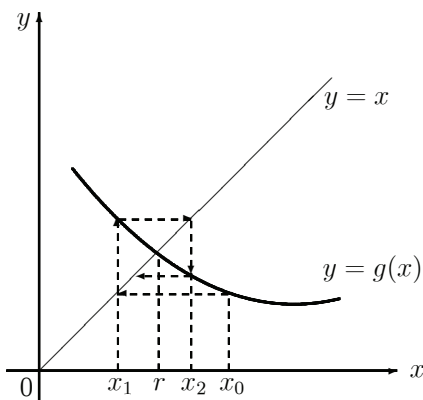
(ա)



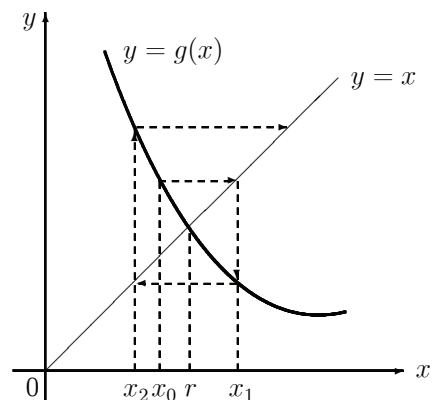
(բ)

**Նկ. 2.3.1** Պարզ իտերացիայի մեթոդ՝ (ա) գուգամետ ընթացք, (բ) տարամետ ընթացք

Ի տարբերություն նկ. 2.3.1-ում պատկերված դեպքի՝ ընթացքը կարող է ունենալ նաև պարուրաձև բնույթ (տե՛ս նկ. 2.3.2):



(ա)



(բ)

**Նկ. 2.3.2** Պարուրաձև ընթացք՝ (ա) գուգամետ, (բ) տարամետ

Տեղի ունի զուգամիտության մասին հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 2.3.1 :** Եթե (2.3.1) հավասարման  $r$  տեղայնացված արմատի ինչ-որ  $\Delta_\delta = (r - \delta, r + \delta)$  շրջակայքի համար գոյություն ունի  $0 < q < 1$  հաստատուն այնպես, որ

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in \Delta_\delta, \quad (2.3.3)$$

ապա կամայական  $x_0 \in \Delta_\delta$  սկզբնական մոտարկման ընտրության դեպքում պարզ խտրացիայի մեթոդը զուգամիտում է: Ընդ որում՝ տեղի ունի

$$|r - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.4)$$

գնահատականը:

Ապացույց: Դիցուք  $x_n \in \Delta_\delta$  և  $e_n \equiv r - x_n$  մեթոդի  $n$ -րդ քայլի սխալանքն է: Ինչպես հետևում է (2.3.1) և (2.3.2)-ից՝

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) :$$

Այստեղից, ըստ (2.3.3) պայմանի՝

$$|e_{n+1}| = |g(r) - g(x_n)| \leq q|r - x_n| = q|e_n| :$$

Քանի որ  $q < 1$ , ուստի  $x_{n+1} \in \Delta_\delta$ : Այսպիսով, եթե  $x_0 \in \Delta_\delta$ , ապա բոլոր հաջորդ մոտարկումները ևս պատկանում են  $r$  արմատի  $\Delta_\delta$  շրջակայքին: Վերը ստացված

$$|e_{n+1}| \leq q|e_n|, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.3.5)$$

անհավասարությունից հետևում է, որ

$$|e_n| \leq q^n|e_0|, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (2.3.6)$$

Սա ապացուցում է մեթոդի զուգամիտությունը, որովհետև  $q < 1$ : Այժմ արտածենք (2.3.4) գնահատականը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} |e_0| = |r - x_0| &\leq |r - x_1| + |x_1 - x_0| = |g(r) - g(x_0)| + |x_1 - x_0| \\ &\leq q|r - x_0| + |x_1 - x_0| = q|e_0| + |x_1 - x_0| : \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք

$$|e_0| \leq \frac{1}{1 - q}|x_1 - x_0|$$

անհավասարությունը, որի տեղադրումը (2.3.6)-ում տալիս է (2.3.4) գնահատականը:  $\square$

**Օրինակ 2.3.1 :** Ապացուցել, որ կամայական սկզբնական մոտարկման դեպքում

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}|x_n|, \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդը զուգամետ է:

Մեր օրինակում՝

$$g(x) = 3 - \frac{1}{2}|x|$$

և ցանկացած  $x, y \in (-\infty, +\infty)$  արժեքների համար

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{2}||x| - |y|| \leq \frac{1}{2}|x - y| :$$

Այստեղ  $q = \frac{1}{2}$ , և մեթոդը զուգամետ է:  $\diamond$

Որոշ դեպքերում հարմար է լինում օգտվել նաև հետևյալ պնդումից (չնայած այն դեռևս է ավելի խիստ պայմաններ  $g(x)$  ֆունկցիայի վրա):

**Թեորեմ 2.3.2 :** Եթե (2.3.1) հավասարման  $r$  տեղայնացված արմատի ինչ-որ  $\Delta_\delta = (r - \delta, r + \delta)$  շրջակայքում  $g(x)$  ֆունկցիան անընդհատ ածանցելի է և գոյություն ունի  $0 < q < 1$  հաստատուն այնպես, որ

$$|g'(x)| \leq q \quad \forall x \in \Delta_\delta, \quad (2.3.7)$$

ապա կամայական  $x_0 \in \Delta_\delta$  սկզբնական մոտարկման ընտրության դեպքում պարզ իտերացիայի մեթոդը զուգամիտում է: Ընդ որում տեղի ունի

$$|r - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3.8)$$

զննհատականը:

Ապացույց: Համաձայն Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [62]), ցանկացած երկու  $x, y \in \Delta_\delta$  կետերի համար ունենք

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y),$$

որտեղ  $\xi = (1 - \theta)x + \theta y$ ,  $0 < \theta < 1$ : Ուստի

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y| \leq q|x - y| :$$

Քանի որ սրանով բավարարվում է 2.3.1 թեորեմի (2.3.3) պայմանը, ապա սույն թեորեմը կարելի է ապացուցված համարել:  $\square$

**Օրինակ 2.3.2 :** Ապացուցել, որ ցանկացած սկզբնական մոտարկման համար

$$x_{n+1} = 4 + \frac{1}{3} \sin 2x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդը գուգամիտում է:

Այս օրինակում՝

$$g(x) = 4 + \frac{1}{3} \sin 2x :$$

Քանի որ

$$g'(x) = \frac{2}{3} \cos 2x,$$

ապա

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) :$$

Այսպիսով՝  $q = \frac{2}{3}$  և համաձայն 2.3.2 թեորեմի՝ մեթոդը գուգամիտում է :  $\diamond$

Այժմ գնահատենք իտերացիաների քանակը, որը բավարար կլինի որոնելի արմատի մոտավոր արժեքը  $\varepsilon > 0$  ճշտությամբ ստանալու համար: Օգտվենք (2.3.4) (կամ (2.3.8)) գնահատականից: Պահանջենք, որ

$$\frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| < \varepsilon :$$

Այստեղից ստանում ենք, որ իտերացիոն քայլերի քանակը պետք է բավարարի

$$n > \ln^{-1} \frac{1}{q} \cdot \ln \frac{C}{\varepsilon} \quad (2.3.9)$$

պայմանին, որտեղ  $C \equiv |x_1 - x_0|/(1-q)$ :

**Դիտողություն 2.3.1 :** *Իտերացիաների քանակը որոշելու համար ստացված (2.3.9) գնահատականի գործնական օգտագործումը հաճախ դժվար է դառնում այն պատճառով, որ չի հաջողվում գտնել  $q$  մեծությունը (2.3.3) (կամ (2.3.7)) պայմանից: Ուստի հաշվարկները սովորաբար կատարում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ չի բավարարված  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$  պայմանը: Բերենք այդ չափանիշի հիմնավորումը: Կամայական  $m$  բնական թվի համար ունենք*

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &= |(x_{n+m} - x_{n+m-1}) + \dots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\ &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+m} - x_{n+m-1}| \leq \\ &\leq q|x_n - x_{n-1}| + q^2|x_n - x_{n-1}| + \dots + q^m|x_n - x_{n-1}| = \\ &= (q + q^2 + \dots + q^m)|x_n - x_{n-1}| = q \frac{1 - q^m}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| : \end{aligned}$$

Ստացված

$$|x_{n+m} - x_n| \leq q \frac{1 - q^m}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|$$

անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ  $m \rightarrow \infty$ , կատանանք

$$|r - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| :$$

Այսպիսով, եթե  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ , ապա իտերացիայի  $n$ -րդ քայլում ստացված սխալանքը համաչափելի է  $\varepsilon$ -ի հետ:

Հաշվի առնելով արված դիտողությունը՝ պարզ իտերացիայի մեթոդի ակտրիթմը կարելի է գրել հետևյալ կերպ:

#### Pseudocode SIMPLEITER

```

input  $x, \varepsilon$ 
 $n = 0$ 
 $z = x$ 
 $y = x + 2\varepsilon$ 
while  $|y - z| \geq \varepsilon$  do
     $z = x$ 
     $y = g(x)$ 
     $n = n + 1$ 
     $x = y$ 
endwhile
output  $n, x$ 

```

Պարագրաֆի վերջում քննարկենք հետևյալ հարցը. ինչպե՞ս ձևափոխել

$$f(x) = 0 \tag{2.3.10}$$

հավասարումը (2.3.1) տեսքի, որպեսզի ապահովվի պարզ իտերացիայի մեթոդի զուգամիտությունը: Բերենք այդ հարցի լուծման եղանակներից մեկը:

Դիցուք (2.3.10) հավասարման արմատը տեղայնացված է  $[a, b]$  հատվածում: Ենթադրենք, որ  $f'(x)$  ամանցյալն այդ հատվածում պահպանում է իր նշանը: Գտնենք  $m$  և  $M$  դրական հաստատուններն այնպես, որ

$$m \leq \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|, \quad \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq M :$$

Իմաստ ունի դիտարկել այն դեպքը, երբ  $m < M$  (եթե  $m = M$ , ապա  $f(x)$  ֆունկցիան զծային է  $[a, b]$  հատվածում): Սահմանենք

$$g(x) \equiv x - \frac{f(x)}{\alpha}$$

Ֆունկցիան, որտեղ  $\alpha$  հաստատունը ընտրվում է հետևյալ կերպ.

$$1) |\alpha| = \frac{M+m}{2}, \quad 2) \operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(f'(x) : x \in [a, b]) :$$

Յույց տանք, որ այսպիսի ընտրությամբ պարզ իտերացիայի մեթոդը կլինի զուգամետ: Ածանցելով  $g(x)$  ֆունկցիան և հաշվի առնելով  $\alpha$  մեծության նշանի ընտրությունը՝ կստանանք

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{\alpha} = 1 - \frac{|f'(x)|}{|\alpha|} :$$

Այնուհետև, հեշտությամբ ձեռք ենք բերում

$$\frac{2m}{M+m} \leq \frac{|f'(x)|}{|\alpha|} \leq \frac{2M}{M+m} \quad \forall x \in [a, b]$$

գնահատականները: Հետևաբար,

$$-\frac{M-m}{M+m} \leq 1 - \frac{|f'(x)|}{|\alpha|} \leq \frac{M-m}{M+m},$$

այսինքն՝

$$|g'(x)| = \left| 1 - \frac{|f'(x)|}{|\alpha|} \right| \leq \frac{M-m}{M+m} \equiv q \quad \forall x \in [a, b] :$$

Այս վերջինից, քանի որ  $0 < q < 1$ , ըստ 2.3.2 թեորեմի պարզ իտերացիայի մեթոդը կլինի զուգամետ:

## 2.4 Չուգամիտության արագացումը և Էյտկենի $\Delta^2$ -ընթացքը

Անկասկած, մեզ հետաքրքրում են միայն զուգամետ իտերացիոն ընթացքներ: Սակայն զուգամիտությունը լինում է տարբեր բնույթի. մի իտերացիոն ընթացքը՝ մեկ այլի նկատմամբ, կարող է զուգամիտել ավելի արագ կամ դանդաղ: Որոշ դեպքերում հնարավոր է արագացնել հաջորդականության զուգամիտությունը: Հենց այդ հարցի քննարկմանն է նվիրված սույն պարագրաֆը:

### 2.4.1 Հաջորդականությունների զուգամիտության տիպերը

Դիցուք իրական թվերի  $x_n, n = 1, 2, \dots$  հաջորդականությունն ունի սահման.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r :$$

**Սահմանում 2.4.1 :** Կասենք, որ  $\{x_n\}$  հաջորդականության զուգամիտությունը *գծային է*, եթե գոյություն ունեն  $C < 1$  դրական հաստատուն և  $N$  բնական թիվ, այնպիսիք, որ

$$|r - x_{n+1}| \leq C |r - x_n| \quad \forall n \geq N : \quad (2.4.1)$$

Այս սահմանման մեջ  $C < 1$  պայմանը բնական է, քանի որ այն ապահովում է սխալանքների հաջորդականության նվազումը: Հակառակ դեպքում զուգամիտության մասին խոսք լինել չի կարող:

**Սահմանում 2.4.2 :** Կասենք, որ  $\{x_n\}$  հաջորդականության զուգամիտությունը *գերգծային է*, եթե գոյություն ունեն գրոյի ձգտող  $\varepsilon_n$  հաջորդականություն և  $N$  բնական թիվ, այնպիսիք, որ

$$|r - x_{n+1}| \leq \varepsilon_n |r - x_n| \quad \forall n \geq N : \quad (2.4.2)$$

Վերջապես, ներմուծենք ևս մեկ հասկացություն:

**Սահմանում 2.4.3 :** Կասենք, որ  $\{x_n\}$  հաջորդականության զուգամիտությունը  $\alpha > 1$  *կարգի է*, եթե գոյություն ունեն  $C$  դրական հաստատուն և  $N$  բնական թիվ, այնպիսիք, որ

$$|r - x_{n+1}| \leq C |r - x_n|^\alpha \quad \forall n \geq N : \quad (2.4.3)$$

Հաճախ գծային զուգամիտությամբ հաջորդականության մասին ասում են, որ այն զուգամիտում է *երկրաչափական պրոգրեսիայի արագությամբ*: Դա կարելի է հիմնավորել հետևյալ դատողություններով: Փաստորեն (2.4.1) պայմանը նշանակում է, որ գոյություն ունի  $\{\delta_n\}$  մաժորանտային հաջորդականություն՝

$$|r - x_n| \leq \delta_n,$$

որի անդամները կապված են

$$\delta_{n+1} = C\delta_n, \quad n \geq N$$

առնչությամբ: Այսպիսով,  $n \geq N$  արժեքների համար  $\delta_n$  մաժորանտները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

Համաձայն վերը ստացված (2.3.5) անհավասարության՝ պարզ իտերացիայի մեթոդի զուգամիտությունը առնվազն գծային է: Սակայն որոշ դեպքերում այն կարող է լինել ավելի բարձր կարգի: Դիցուք  $g(x)$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ

$$g^{(k)}(r) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, \quad g^{(s)}(r) \neq 0 : \quad (2.4.4)$$

Ըստ Թեյլորի բանաձևի (տե՛ս, օրինակ, [62]) ունենք

$$g(x_n) = g(r - e_n) = g(r) + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} g^{(k)}(r) e_n^k + \frac{(-1)^s}{s!} g^{(s)}(\xi_n) e_n^s,$$

որտեղ  $\xi_n = r - \theta e_n$  ( $0 < \theta < 1$ ): Այստեղից, հաշվի առնելով (2.4.4) պայմանները, կստանանք.

$$g(x_n) = g(r) + \frac{(-1)^s}{s!} g^{(s)}(\xi_n) e_n^s :$$

Ուստի

$$|e_{n+1}| = |r - x_{n+1}| = |g(r) - g(x_n)| = \frac{|g^{(s)}(\xi_n)|}{s!} |e_n|^s$$

կամ

$$|e_{n+1}| \approx \frac{|g^{(s)}(r)|}{s!} |e_n|^s :$$

Դրանով իսկ զուգամիտության կարգը հավասար է  $s$ -ի:

## 2.4.2 Չուգամիտության արագացման էյտկենի $\Delta^2$ -ընթացքը

Այժմ նկարագրենք  $r$  սահմանին գծորեն զուգամիտող  $\{x_n\}$  հաջորդականության զուգամիտության արագացման եղանակը: Դիցուք զուգամիտությունն այնպիսին է, որ

$$r - x_{n+1} = (c + \delta_n)(r - x_n), \quad n \geq N, \quad (2.4.5)$$

որտեղ  $|c| < 1$  և  $\delta_n \rightarrow 0$ , երբ  $n \rightarrow \infty$ : Նշենք, որ երբ պարզ խտրացիայի մեթոդը զուգամետ է, ապա հաջորդական մոտարկումների վարքը, որպես օրենք, հենց (2.4.5) տեսքի է: Իրոք, (2.3.5)-ից ունենք

$$\left| \frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} \right| \leq q :$$

Ենթադրենք, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} \right| \equiv \bar{q} \leq q$$

սահմանը: Այդ դեպքում

$$\left| \frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} \right| = \bar{q} + \delta_n, \quad (2.4.6)$$

որտեղ  $\delta_n \rightarrow 0$ , երբ  $n \rightarrow \infty$ : Եթե ինչ-որ  $n$ -ից սկսած  $x_n$  մոտարկումները կազմում են մոնոտոն հաջորդականություն (տե՛ս, օրինակ, նկ.2.3.1(ա)-ում պատկերված դեպքը), ապա  $r - x_{n+1}$  և  $r - x_n$  տարբերությունները ունեն նույն նշանը: Հետևաբար

$$\frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = \bar{q} + \delta_n,$$

որտեղից էլ

$$r - x_{n+1} = (\bar{q} + \delta_n)(r - x_n) :$$

Պարուրածև զուգամիտության դեպքում (տե՛ս նկ.2.3.2(ա))  $r - x_{n+1}$  և  $r - x_n$  տարբերությունները ունեն հակադիր նշաններ: Ուստի (2.4.6)-ից կստանանք

$$-\frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = \bar{q} + \delta_n$$



կամ

$$r - x_{n+1} = (-\bar{q} - \delta_n)(r - x_n) :$$

Նախ կատարենք որոշ դատողություններ: Ինչպես հետևում է (2.4.5)-ից,  $n$ -ի մեծ արժեքների համար

$$\frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} \approx c, \quad \frac{r - x_{n+2}}{r - x_{n+1}} \approx c :$$

Այստեղից, ելնելով

$$\frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} \approx \frac{r - x_{n+2}}{r - x_{n+1}}$$

կամ

$$(r - x_{n+1})^2 \approx (r - x_n)(r - x_{n+2})$$

մոտավոր հավասարությունից, կատանանք

$$r \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} : \quad (2.4.7)$$

Այժմ, որպես հիմք վերցնելով (2.4.7) մոտավոր հավասարությունը, կազմենք նոր հաջորդականություն.

$$z_n = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n \geq N : \quad (2.4.8)$$

Պարզվում է, որ այս հաջորդականությունը զուգամիտում է  $r$  սահմանին ավելի արագ, քան  $x_n$ -ը՝ այն իմաստով, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - z_n}{r - x_n} = 0 : \quad (2.4.9)$$

Ապացուցենք այս փաստը:

Նշանակենք  $e_n \equiv r - x_n$ : Պարզ ձևափոխություններից հետո՝  $z_n$ -ը որոշող (2.4.8) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$z_n = \frac{(r - e_{n+2})(r - e_n) - (r - e_{n+1})^2}{(r - e_{n+2}) - 2(r - e_{n+1}) + (r - e_n)} = r + \frac{e_{n+1}^2 - e_{n+2}e_n}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} :$$

Այստեղից կունենանք

$$r - z_n = \frac{e_{n+2}e_n - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} :$$

Քանի որ (2.4.5)-ից՝

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= (c + \delta_n)e_n, \\ e_{n+2} &= (c + \delta_{n+1})e_{n+1} = (c + \delta_{n+1})(c + \delta_n)e_n, \end{aligned}$$

ապա

$$\begin{aligned} r - z_n &= \frac{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n)e_n^2 - (c + \delta_n)^2 e_n^2}{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n)e_n - 2(c + \delta_n)e_n + e_n} \\ &= e_n \frac{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n) - (c + \delta_n)^2}{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n) - 2(c + \delta_n) + 1} : \end{aligned}$$

Այստեղից՝

$$\frac{r - z_n}{r - x_n} = \frac{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n) - (c + \delta_n)^2}{(c + \delta_{n+1})(c + \delta_n) - 2(c + \delta_n) + 1} :$$

Երբ  $n \rightarrow \infty$ , ապա վերջին կտորակի համարիչը ձգտում է գրոյի, իսկ հայտարարը՝  $c^2 - 2c + 1 = (c - 1)^2 \neq 0$  (քանի որ  $|c| < 1$ ) մեծությանը: Այսպիսով, (2.4.9) պնդումը ճիշտ է:

Դժվար չէ համոզվել, որ  $z_n$  մեծությունները (2.4.8)-ից կարելի է գրել մեկ այլ տեսքով՝

$$z_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n \geq N : \quad (2.4.10)$$

Անցումը գուգամետ  $\{x_n\}$  հաջորդականությունից ավելի արագ գուգամիտող  $\{z_n\}$  հաջորդականությանը կոչվում է *Էյտկենի  $\Delta^2$ -ձևափոխություն* կամ  *$\Delta^2$ -ընթացք*: Անվանման մեջ  $\Delta^2$  սիմվոլի ներկայությունը կարելի է հիմնավորել հետևյալ կերպ: Ներմուծենք այսպես կոչված *վերջավոր տարբերություններ*.

$$\Delta x_n \equiv x_{n+1} - x_n$$

(ավելի մանրամասն վերջավոր տարբերությունները և դրանց հատկությունները քննարկվում են սույն գրքի 6.5 պարագրաֆում): Այնուհետև,

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n,$$

և  $z_n$  մեծությունների համար (2.4.10)-ից կստանանք

$$z_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (2.4.11)$$

արտահայտությունը: Հենց այս բանաձևի շնորհիվ հաջորդականությունների գուգամիտության արագացման նկարագրված եղանակը ստացել է իր  $\Delta^2$  անունը:

### Օրինակ 2.4.1 : Դիտարկենք

$$x = e^{-x}$$

հավասարումը, որի միակ արմատն է  $r = 0.56714329\dots$  թիվը: Այս հավասարման լուծման համար կիրառենք պարզ իտերացիայի մեթոդը՝ ընտրելով որպես սկզբնական մոտարկում  $x_0 = 0.5$ : Հաշվարկների արդյունքները տրված են ստորև բերված աղյուսակի երկրորդ սյունակում:

$n$	$x_n$	$z_n$
0	0.500000000	0. <u>56762388</u>
1	0.60653066	0. <u>56729899</u>
2	0.54523921	0. <u>56719314</u>
3	0.57970309	0. <u>56715936</u>
4	0.56006463	0. <u>56714845</u>
5	0.57117215	0. <u>56714495</u>
6	0.56486295	0. <u>56714382</u>
7	0.56843805	0. <u>56714346</u>
8	0.56640945	0. <u>56714335</u>
9	0.56755963	0. <u>56714331</u>
10	0.56690721	0. <u>56714330</u>
11	0.56727720	0. <u>56714329</u>
12	0.56706735	
13	0.56718636	

Հաշվարկվել են նաև  $z_n$  մեծությունները՝ ըստ (2.4.10) բանաձևի (տե՛ս աղյուսակի երրորդ սյունակը): Ներկայացված հաշվարկները ցույց են տալիս, որ զուգամիտության արագացումն առկա է:  $\diamond$

**Գիտողություն 2.4.1 :** *Էյտկենի  $\Delta^2$ -ընթացքը կիրառելիս խորհուրդ է տրվում դադարեցնել հաշվարկները, երբ այն սկսում է արտադրել գործնականորեն նույն արժեքները (մոտ թվերի հանման պատճառով ճշգրտության կորուստից խուսափելու համար):*

Վերջում նշենք, որ Էյտկենի  $\Delta^2$ -ընթացքի կիրառումը քառակուսային զուգամիտության դեպքում արագացման արդյունք սովորաբար չի տալիս: Իրոք, դիտարկենք, օրինակ,

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4.12}$$

խտերացիաները: Եթե ընտրենք  $0 < x_0 < 1$  սկզբնական մոտարկում, ապա (2.4.12) օրենքով ստացվող հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի, և զուգամիտության կարգը հավասար է երկուսի: Քանի որ

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad x_{n+2} = x_{n+1}^2 = x_n^4,$$

ապա (2.4.10)-ից կստանանք

$$z_n = \frac{x_n^3(x_n - 1)}{x_n^3 - 2x_n + 1} = O(x_n^3) :$$

Սակայն  $z_n$ -ի հաշվման ժամանակ օգտագործվում է  $x_{n+2} = O(x_n^4)$  անդամը: Այսինքն,  $z_n$ -ը ձգտում է զրոյի  $x_n$ -ից ավելի դանդաղ:

## 2.5 Նյութոնի մեթոդը

Մույն պարագրաֆում մենք կշարադրենք ոչ գծային հավասարումների լուծման կարևորագույն և լայն տարածում ստացած եղանակը՝ *Նյութոնի մեթոդը*:

### 2.5.1 Մեթոդի արտածումը

Դիտարկենք

$$f(x) = 0 \quad (2.5.1)$$

հավասարման  $r$  տեղայնացված արմատի բավականաչափ փոքր շրջակայք: Ենթադրենք, որ այդ շրջակայքում  $f(x)$  ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ ածանցելի է: Դիցուք  $\xi$ -ն  $r$  արմատի ինչ-որ մոտարկումն է նշված շրջակայքից և  $h \equiv r - \xi$ : Ըստ Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$0 = f(r) = f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{h^2}{2}f''(\alpha),$$

որտեղ  $\alpha = \xi + \theta h$ ,  $0 < \theta < 1$ : Դեռ նետելով բանաձևի  $O(h^2)$  անդամը՝ կստանանք

$$f(\xi) + hf'(\xi) \approx 0$$

մոտավոր հավասարություն: Եթե  $f'(\xi) \neq 0$ , ապա

$$h \approx -\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

կամ

$$r \approx \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} :$$

Վերջինս նշանակում է, որ

$$\eta = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես որոնելի արմատի նոր մոտարկում:

Կատարված վերլուծության հիման վրա կառուցենք հետևյալ եղանակը. ընտրենք ինչ-որ  $x_0$  սկզբնական մոտարկում, որից հետո հաջորդ մոտարկումները հաշվենք

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.2)$$

բանաձևով: Այս եղանակը հայտնի է որպես *Նյութոնի մեթոդ* (հաճախ այն անվանում են նաև *Նյութոն-Ռաֆսոնի մեթոդ*):

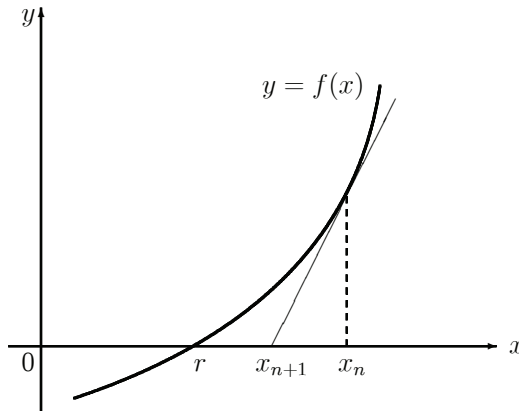
Մեթոդն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: Տանենք  $(x_n, f(x_n))$  կետով անցնող  $y = f(x)$  կորի շոշափողը և գտնենք այդ շոշափողի  $Ox$  առանցքի հետ հատման կետի արսցիսը (նկ. 2.5.1): Շոշափողի հավասարումն է՝

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) :$$

Այստեղից, հավասարեցնելով  $y$ -ը զրոյի, կստանանք

$$(x_{n+1} =) \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} :$$

Այդ իսկ պատճառով Նյուտոնի մեթոդը երբեմն անվանում են նաև *շոշափողների մեթոդ*:



**Նկ. 2.5.1** Նյուտոնի մեթոդը

**Գիտողություն 2.5.1 :** Դժվար չէ նկատել, որ Նյուտոնի մեթոդը ըստ էության պարզ իտերացիայի մեթոդի մի տարբերակ է, որտեղ

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.5.3)$$

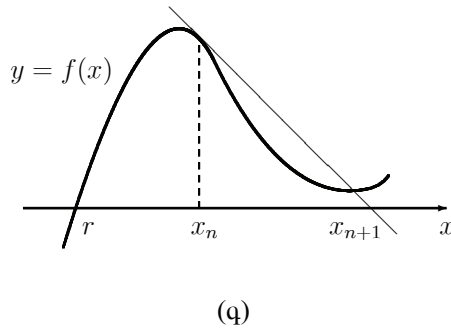
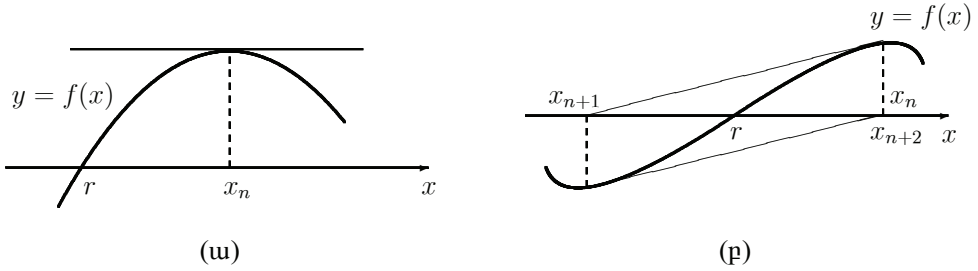
(համեմատիր, (2.3.2) և (2.5.2) բանաձևերը):

Ստորև բերված է Նյուտոնի մեթոդի ալգորիթմը:

**Pseudocode NEWTON**

```
input  $x, \varepsilon$ 
 $n = 0$ 
 $z = x$ 
 $y = x + 2\varepsilon$ 
while  $|y - z| \geq \varepsilon$  do
     $z = x$ 
     $y = x - f(x)/f'(x)$ 
     $n = n + 1$ 
     $x = y$ 
endwhile
output  $n, x$ 
```

Նյուտոնի մեթոդի օգտագործման ժամանակ կարող են ի հայտ գալ իտերացիաների վատ վարքի տարբեր դեպքեր, որոնցից մի քանիսը պատկերված են նկ. 2.5.2-ում:



**Նկ. 2.5.2** Նյուտոնի մեթոդի վատ վարքի օրինակներ. (ա)  $f'(x_n) = 0$ , հաջորդ մոտարկումը որոշված չէ. (բ) տատանում, (գ) տարամիտում

**2.5.2 Մեթոդի զուգամիտության հետազոտումը**

Քննարկենք այն դեպքը, երբ  $r$ -ը (2.5.1) հավասարման *պարզ* արմատն է, այսինքն՝

$$f(r) = 0 \neq f'(r) : \tag{2.5.4}$$

Ենթադրենք, որ  $f''(x)$  երկրորդ աստիճանի անընդհատ է արմատի դիտարկվող շրջակայքում: Նշանակենք  $e_n$ -ով մեթոդի  $n$ -րդ քայլի սխալանքը՝  $e_n \equiv r - x_n$ :

Օգտվելով (2.5.2) բանաձևից՝ կստանանք

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)e_n + f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.5.5}$$

բոլոր  $n = 0, 1, 2, \dots$  արժեքների համար: Համաձայն Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$0 = f(r) = f(x_n + e_n) = f(x_n) + f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$$

վերլուծումը, որտեղ  $\xi_n = x_n + \theta e_n$ ,  $0 < \theta < 1$ : Ոստի

$$f'(x_n)e_n + f(x_n) = -\frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2 :$$

Հաշվի առնելով վերջին հավասարությունը՝ (2.5.5)-ից կստանանք

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.6)$$

առնչությունը: Ենթադրելով, որ  $x_n$ -ը գտնվում է որոնելի արմատի բավականաչափ փոքր շրջակայքում, ստանում ենք

$$e_{n+1} \approx C e_n^2, \quad \text{որտեղ } C \equiv -\frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} : \quad (2.5.7)$$

Այսպիսով, եթե մեթոդը զուգամետ է, ապա զուգամիտության կարգը հավասար է երկուսի:

Շարունակենք զուգամիտության հետազոտումը: Քանի որ  $r$ -ը հավասարման պարզ արմատն է (տե՛ս (2.5.4)-ը), ապա գոյություն ունի նրա այնպիսի  $\Delta_\delta = \{x : |r-x| \leq \delta\}$  շրջակայք, որտեղ

$$\min_{x \in \Delta_\delta} |f'(x)| > 0 :$$

Ներմուծենք

$$C(\delta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in \Delta_\delta} |f''(x)|}{\min_{x \in \Delta_\delta} |f'(x)|} \quad (2.5.8)$$

մեծությունը: Գծվար չէ տեսնել, որ  $\delta$ -ի փոքրացման հետ մեկտեղ  $C(\delta)$ -ն նվազում է, ընդ որում՝

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} :$$

Ուստի  $\delta$ -ն կարելի է ընտրել այնպես, որ

$$\gamma \equiv \delta C(\delta) < 1 :$$

Գիցուք  $x_0 \in \Delta_\delta$ : Այդ դեպքում  $|e_0| \leq \delta$  և

$$|r - \xi_0| = |r - x_0 - \theta e_0| = (1 - \theta)|e_0| \leq \delta,$$

այսինքն՝  $\xi_0 \in \Delta_\delta$ : Հաշվի առնելով դա՝  $C(\delta)$ -ի (2.5.8) սահմանումից հետևում է, որ

$$\frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_0)|}{|f'(x_0)|} \leq C(\delta) :$$

Այնուհետև, (2.5.6) առնչությունից կունենանք.

$$|e_1| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_0)|}{|f'(x_0)|} e_0^2 \leq C(\delta) e_0^2 = C(\delta) |e_0| |e_0| \leq \delta C(\delta) |e_0| = \gamma |e_0| :$$

Ուստի, քանի որ  $\gamma < 1$ , ապա  $|e_1| \leq \delta$ : Այսինքն հաջորդ  $x_1$  մոտարկումը նույնպես պատկանում է  $r$  արմատի  $\Delta_\delta$  շրջակայքին: Շարունակելով նման դատողությունները՝ կստանանք.

$$\begin{aligned} |e_2| &\leq \gamma|e_1| \leq \gamma^2|e_0| && (x_2 \in \Delta_\delta), \\ |e_3| &\leq \gamma|e_2| \leq \gamma^3|e_0| && (x_3 \in \Delta_\delta), \\ \dots &\dots \dots && \dots \dots \\ |e_n| &\leq \gamma|e_{n-1}| \leq \gamma^n|e_0| && (x_n \in \Delta_\delta), \\ \dots &\dots \dots && \dots \dots \end{aligned}$$

Այսպիսով, կարող ենք ամփոփել կատարված վերլուծությունը: Գիցուք  $r$ -ը (2.5.1) հավասարման պարզ արմատն է և  $f(x)$  ֆունկցիան երկու անգամ անընդհատ ածանցելի է այդ արմատի շրջակայքում: Եթե սկզբնական մոտարկումն ընտրված է  $r$ -ին բավականաչափ մոտ, ապա (2.5.2) Նյուտոնի մեթոդը գուզամիտում է, ընդ որում՝

$$|r - x_{n+1}| \leq C_1|r - x_n|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5.9)$$

որտեղ  $C_1 = const > 0$ :

Գնահատենք Նյուտոնի մեթոդում  $\varepsilon > 0$  ճշտությամբ արմատի մոտավոր արժեքը ստանալու համար պահանջվող քայլերի քանակը: Դրա համար օգտվենք (2.5.9) անհավասարությունից, որից հեշտությամբ հետևում է

$$|r - x_n| \leq C_1^{2^n - 1}|r - x_0|^{2^n}$$

գնահատականը: Պահանջելով

$$C_1^{2^n - 1}|r - x_0|^{2^n} < \varepsilon,$$

կստանանք՝

$$n > \log_2 \left( C^* \ln \frac{1}{C_1 \varepsilon} \right), \quad (2.5.10)$$

որտեղ  $C^* \equiv -1/\ln(C_1|r - x_0|)$ : Սա նշանակում է, որ ափսոսաբար, երբ  $\varepsilon \rightarrow 0$ , քայլերի քանակը Նյուտոնի մեթոդում ավելի քիչ է պարզ իտերացիայի մեթոդում կատարվող քայլերի քանակից (համեմատի՛ր (2.5.10)-ը (2.3.9) գնահատականի հետ):

Ինչպես արդեն ասվել էր դիտողություն 2.5.1-ում, Նյուտոնի մեթոդը փաստորեն պարզ իտերացիայի մեթոդ է  $x = g(x)$  հավասարման համար, որտեղ  $g(x)$  ֆունկցիան որոշվում է (2.5.2) բանաձևով: Քանի որ  $g'(r) = 0$  և  $g''(r) = f''(r)/f'(r)$ , ապա Նյուտոնի մեթոդի քառակուսային գուզամիտությունը (պարզ արմատի դեպքում) հետևում է նաև (2.4.4) պայմաններից:

Նշենք, որ եթե  $r$ -ը (2.5.1) հավասարման *պատիկ* արմատ է, այսինքն՝

$$f(r) = f'(r) = 0 \neq f''(r), \quad (2.5.11)$$

ապա Նյուտոնի մեթոդի գուզամիտությունը գծային է: Իրոք, վերը մենք ստացել ենք

$$e_{n+1} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.5.12)$$



առնչությունը (տե՛ս (2.5.5)-ը): Ըստ Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$f(x_n) = f(r - e_n) = f(r) - f'(r)e_n + \frac{f''(r - \theta_1 e_n)}{2} e_n^2 \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

և

$$f'(x_n) = f'(r - e_n) = f'(r) - f''(r - \theta_2 e_n)e_n \quad (0 < \theta_2 < 1),$$

որտեղից էլ՝

$$f(x_n) \approx \frac{f''(r)}{2} e_n^2, \quad f'(x_n) \approx -f''(r)e_n :$$

Տեղադրելով ստացված առնչությունները (2.5.12)-ում՝ կստանանք

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} e_n :$$

Ինչպես հետևում է վերոշարադրյալից, Նյուտոնի մեթոդը զուգամիտում է, եթե  $x_0$  սկզբնական մոտարկումը ընտրված է բավականաչափ մոտ որոնելի արմատին: Սակայն որոշ դեպքերում այդ պահանջը պարտադիր չէ:

**Թեորեմ 2.5.1** : *Դիցուք  $[a, b]$  հատվածում երկու անգամ անընդհատ ածանցելի  $f(x)$  ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

*ա) հատվածի ծայրակետերում այն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, այսինքն՝  $f(a)f(b) < 0$ ,*

*բ)  $f'(x)$  և  $f''(x)$  ածանցյալները պահպանում են իրենց նշանը  $[a, b]$  հատվածում: Այդ դեպքում Նյուտոնի մեթոդը զուգամիտում է  $[a, b]$  հատվածից*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \quad (2.5.13)$$

*պայմանին բավարարող կամայական  $x_0$  սկզբնական մոտարկման ընտրության դեպքում:*

Ապացույց: Նախ ասենք, որ շնորհիվ ա) և բ) պայմանների  $f(x)$  ֆունկցիան ունի միակ գրո: Նշանակենք այն  $r$ -ով: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ

$$f'(x) > 0 \quad \text{և} \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] : \quad (2.5.14)$$

Այդ դեպքում (2.5.13) պայմանից հետևում է, որ  $f(x_0) > 0$ : Քանի որ  $f(x)$  ֆունկցիան մոնոտոն աճող է  $[a, b]$ -ում, ապա  $r < x_0 \leq b$ : Այնուհետև, (2.5.6) հավասարությունից ունենք

$$e_1 = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} e_0^2,$$

որտեղ  $r < \xi_0 < x_0$ : Հաշվի առնելով (2.5.14) ենթադրությունները՝ կստանանք, որ  $e_1 < 0$  կամ  $x_1 > r$ : Քանի որ  $f(x)$ -ը մոնոտոն աճող է, ապա  $f(x_1) > 0$ : Ըստ մեթոդի (2.5.2) հաշվարկային բանաձևի՝ ունենք

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

որտեղից էլ  $x_1 < x_0$ : Այսպիսով, շարունակելով նման դատողությունները, կստանանք մոտարկումների մոնոտոն նվազող և սահմանափակ հաջորդականություն.

$$r < \dots < x_2 < x_1 < x_0 \leq b :$$

Ուստի գոյություն ունի  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  սահմանը: Այժմ, անցնելով սահմանի (2.5.2) հավասարության մեջ, երբ  $n \rightarrow \infty$ , կստանանք՝

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} :$$

Վերջինից հետևում է, որ  $f(x^*) = 0$ , իսկ քանի որ ֆունկցիայի զրոն միակն է, ապա  $x^* = r$ : Համանմանորեն քննարկվում են ածանցյալների նշանների այլ հնարավոր տարբերակները:  $\square$

**Օրինակ 2.5.1 :** Նյուտոնի մեթոդը կարելի է կիրառել դրական թվերից քառակուսի արմատները հաշվելու համար: Գիցուք պահանջվում է գտնել  $\sqrt{a}$ -ը, որտեղ  $a > 0$ : Որոնելի արժեքը

$$x^2 - a = 0$$

հավասարման արմատն է: Համաձայն (2.5.2) բանաձևի՝

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.15)$$

(այս բանաձևը վերագրվում է հին հունական մեխանիկոս և ճարտարագետ Հերոնին): Հեշտ է տեսնել, որ (2.5.15) ընթացքը կգուգամիտի ցանկացած դրական սկզբնական մոտարկման դեպքում: Գիցուք  $a = 17$ : Ընտրելով  $x_0 = 4$ , և սահմանափակվելով տասնորդական կետից հետո յոթ նիշով՝ կստանանք

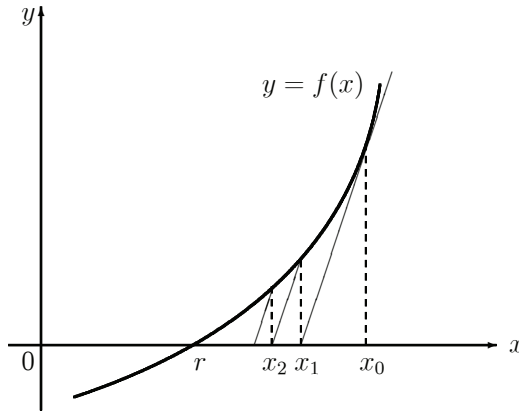
$$\begin{aligned} x_1 &= 4.125, \\ x_2 &= 4.1231061, \\ x_3 &= 4.1231056, \\ x_4 &= 4.1231056 \quad \text{և այլն} : \end{aligned}$$

Համեմատության համար նշենք, որ  $\sqrt{17} = 4.123105625\dots$ :  $\diamond$

### 2.5.3 Հաստատուն ածանցյալով տարբերակը

Եթե (2.5.2) բանաձևում  $f'(x_n)$ -ը փոխարինենք  $f'(x_0)$ -ով, ապա կստանանք մի այլ մեթոդ՝

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots : \quad (2.5.16)$$



**Նկ. 2.5.3** Նյութոնի մեթոդի հաստատուն ածանցյալով տարբերակը

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին  $(x_n, f(x_n))$  կետերում տարված շոշափողները փոխարինվում են  $(x_0, f(x_0))$  կետով տարված շոշափողին զուգահեռ ուղիղներով (նկ. 2.5.3): Նոր՝ (2.5.16) բանաձևն ազատում է ամեն անգամ  $f'(x_n)$  ածանցյալի արժեքը հաշվելու անհրաժեշտությունից: Դա օգտակար է լինում այն դեպքերում, երբ ֆունկցիայի ածանցյալի հաշվումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ: Միաժամանակ պետք է նշել, որ զուգամիտության արագությունն այդ դեպքում ընկնում է:

## 2.6 Նյութոնի մեթոդի ընդհանրացումը

Սույն պարագրաֆում մենք ցույց կտանք, որ Նյութոնի մեթոդը պատկանում է պարամետրից կախված և քառակուսային զուգամիտություն ունեցող իտերացիոն մեթոդների ընտանիքի: Նշված պարամետրի ընտրության շնորհիվ կարելի է ոչ միայն զգալի չափով արագացնել մեթոդի զուգամիտությունը, այլև, որոշ դեպքերում, ընդլայնել սկզբնական մոտարկման ընտրության միջակայքը:

Դիտարկենք

$$f(x) = 0 \tag{2.6.1}$$

հավասարումը: Ինչպես նշվել էր նախորդ պարագրաֆում (տես 2.5.1 դիտողությունը), Նյութոնի մեթոդը ըստ էության

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.6.2}$$

պարզ իտերացիայի մեթոդ է, որտեղ

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} : \tag{2.6.3}$$

Նյուտոնի մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում հաշվվում են  $f$  ֆունկցիայի և դրա ածանցյալի արժեքները: Ուստի, էսպես չմեծացնելով հաշվողական աշխատանքի ծավալը, մենք կարող ենք դիտարկել ավելի ընդհանուր խտերացիոն մեթոդ (2.6.2), որտեղ (2.6.3) ֆունկցիայի փոխարեն վերցվում է

$$g(x) = x - \frac{af(x) + bf'(x)}{cf(x) + df'(x)} : \quad (2.6.4)$$

Ինչպե՞ս ընտրենք  $a, b, c$  և  $d$  հաստատումները: Դիցուք  $r$ -ը (2.6.1) հավասարման պարզ արմատն է: Ունենք

$$g(r) = r - \frac{af(r) + bf'(r)}{cf(r) + df'(r)} = r - \frac{b}{d},$$

և  $g(r) = r$  պայմանից կստանանք, որ  $b = 0$ : Այսպիսով  $g(x)$  ֆունկցիան կգրվի

$$g(x) = x - \frac{af(x)}{cf(x) + df'(x)} :$$

տեսքով: Քանի որ Նյուտոնի մեթոդի զուգամիտությունը քառակուսային է, բնական է պահանջել, որ  $g'(r) = 0$ : Հաշվենք  $g(x)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$g'(x) = 1 - \frac{ad((f'(x))^2 - f(x)f''(x))}{(cf(x) + df'(x))^2} :$$

Այստեղից՝

$$g'(r) = 1 - \frac{ad((f'(r))^2 - f(r)f''(r))}{(cf(r) + df'(r))^2} = 1 - \frac{a}{d} :$$

Ելնելով  $g'(r) = 0$  պահանջից՝ ստանում ենք՝  $a = d \neq 0$ : Ուստի մեր ֆունկցիան կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$g(x) = x - \frac{af(x)}{cf(x) + af'(x)} :$$

Վերջապես այն կարելի է ներկայացնել որպես մեկ պարամետրից կախված ֆունկցիա.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda f(x) + f'(x)}, \quad (2.6.5)$$

որտեղ  $\lambda \equiv \frac{c}{a}$ :

Հաշվի առնելով  $g(x)$  ֆունկցիայի (2.6.5) տեսքը՝ (2.6.2)-ից հանգում ենք նոր խտերացիոն մեթոդի.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda f(x_n) + f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots : \quad (2.6.6)$$

Հեշտ է տեսնել, որ  $\lambda = 0$  դեպքում մենք ստանում ենք Նյուտոնի մեթոդը: Այսինքն, (2.6.6) մեթոդը կարելի է դիտարկել որպես Նյուտոնի մեթոդի ընդհանրացում:

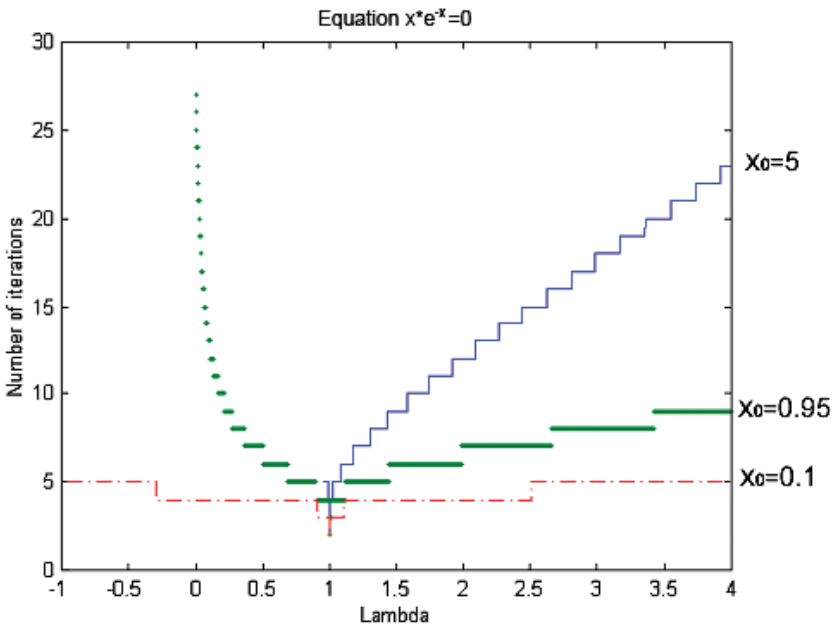
Օրինակով ցույց տանք, թե ինչպես  $\lambda$  պարամետրի ներմուծումը կարող է լավացնել զուգամիտության ընթացքը:

**Օրինակ 2.6.1 :** Գիտարկենք

$$xe^{-x} = 0 \tag{2.6.7}$$

հավասարումը, որի միակ արմատն է՝  $r = 0$  : Նյուտոնի մեթոդը այս հավասարման համար զուգամիտում է, եթե սկզբնական մոտարկումը բավարարում է  $x_0 < 1$  պայմանին:

Կատարվել են հաշվարկներ ըստ (2.6.6) բանաձևի՝  $x_0$  սկզբնական մոտարկման մի քանի արժեքների համար.  $x_0 = 0.1, x_0 = 0.95$  և  $x_0 = 5$  : Նկ. 2.6.1-ում բերված է կատարված խտերացիաների թիվը (2.6.7) հավասարման լուծումը  $10^{-6}$  ճշգրտությամբ ստանալու համար՝ կախված  $\lambda$  պարամետրի ընտրությունից:



**Նկ. 2.6.1** Խտերացիաների թիվը՝ կախված  $\lambda$ -ի ընտրությունից

Նկարից պարզ երևում է, որ  $\lambda$ -ի օպտիմալ արժեքը մոտավորապես հավասար է 1-ի՝ սկզբնական մոտարկման բոլոր ընտրված արժեքների համար:  $\diamond$

Վերադառնանք (2.6.6) մեթոդին: Առայժմ մենք ապահովել ենք մեթոդի զուգամիտության միայն երկրորդ կարգը: Փորձենք բարձրացնել այն: Հիշեցնենք, որ մենք քննարկում ենք (2.6.1) հավասարման պարզ արմատի դեպքը: Ենթադրենք մաս, որ  $f(x)$  ֆունկցիան երեք անգամ անընդհատ ածանցելի է արմատի շրջակայքում: Պահանջենք, որ  $g''(r) = 0$  : Ածանցելով՝ (2.6.5)-ից կստանանք.

$$g''(x) = 2 \frac{\lambda(f'(x))^3 - f(x)f''(x)(2\lambda f'(x) + f''(x))}{(\lambda f(x) + f'(x))^3} + \frac{f(x)f'''(x) + f'(x)f''(x)}{(\lambda f(x) + f'(x))^2} :$$

Այստեղից՝

$$g''(r) = 2\lambda + \frac{f''(r)}{f'(r)} : \quad (2.6.8)$$

Ելնելով  $g''(r) = 0$  պահանջից՝ կստանանք  $\lambda$  պարամետրի *օպտիմալ* արժեքը.

$$\lambda_0 = -\frac{f''(r)}{2f'(r)} : \quad (2.6.9)$$

Վերը դիտարկված 2.6.1 օրինակում

$$f(x) = xe^{-x} :$$

Ունենք

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = (x-2)e^{-x} :$$

Ըստ (2.6.9) բանաձևի՝

$$\lambda_0 = -\frac{f''(0)}{2f'(0)} = 1 :$$

Այսպիսով, 2.6.1 օրինակի հավասարման համար կատարված հաշվարկները լավ համաձայնեցվում են տեսական դատողությունների հետ:

**Դիտողություն 2.6.1 :** *Գործնականում, եթե հայտնի է  $r$  արմատի բավականաչափ լավ մոտարկումը՝  $\xi \approx r$ , ապա  $\lambda$  պարամետրը կարելի է ընտրել հետևյալ կերպ.*

$$\tilde{\lambda}_0 = -\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} :$$

Ընդունելով որպես հիմք օպտիմալ պարամետրի համար ստացված (2.6.9) արժեքը՝  $g(x)$  ֆունկցիայի (2.6.5) արտահայտությունում  $\lambda$ -ի փոխարեն տեղադրենք

$$-\frac{f''(x)}{2f'(x)} :$$

Կստանանք

$$g(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} : \quad (2.6.10)$$

Համապատասխանաբար, հանգում ենք

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (2.6.11)$$

իտերացիոն մեթոդին, որը հայտնի է որպես *Հալլեի մեթոդ*: Մեթոդի գույամիտության կարգը հավասար է երեքի, քանի որ (2.6.10)-ում տրված ֆունկցիայի համար  $g''(r) = 0$ : Սակայն նշենք, որ այս մեթոդը պահանջում է  $f(x)$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի հաշվումը, ինչը առանձին դեպքերում կարող է զգալիորեն մեծացնել հաշվողական աշխատանքը:

## 2.7 Հատողների մեթոդը

Շարադրենք ոչ գծային հավասարումների լուծման ևս մեկ եղանակ, որը նույնպես լայնորեն կիրառելի է, և որոշ դեպքերում գերադասելի է Նյուտոնի մեթոդից:

### 2.7.1 Մեթոդի արտածումը

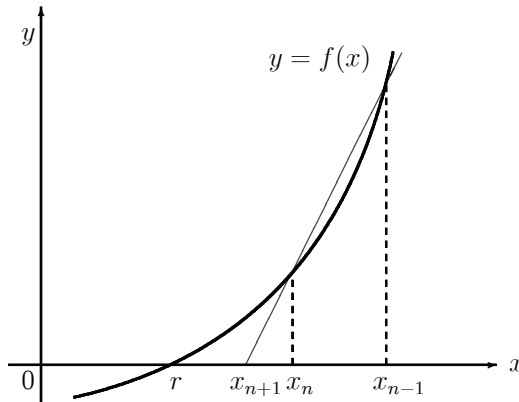
Նյուտոնի մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում հաշվվում են ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները (տե՛ս (2.5.2) բանաձևը): Եթե ածանցյալի հաշվումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ, ապա (2.5.2) բանաձևում ածանցյալը կարելի է փոխարինել

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

տարբերական հարաբերությամբ: Արդյունքում կստանանք հաջորդական մոտարկումների հաշվման նոր կանոն.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots : \quad (2.7.1)$$

Նկ.2.7.1-ում տրված է (2.7.1) մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը: Հարթության  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  և  $(x_n, f(x_n))$  կետերով տանենք ուղիղ (հատող) և գտնենք այդ ուղիղ  $Ox$  առանցքի հետ հատման կետի արսցիսը:



**Նկ.2.7.1** Հատողների մեթոդը

Ուղիղ գծի հավասարումն է՝

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} :$$

Այստեղից, հավասարեցնելով  $y = 0$ -ը գրոյի, կստանանք

$$(x_{n+1} =) \quad x = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) :$$

Ուստի (2.7.1) մեթոդը կոչվում է *հատողների մեթոդ*:

Կառուցված մեթոդը պատկանում է *երկքայլ* իտերացիոն մեթոդների դասին, քանի որ  $x_{n+1}$  մոտարկումը հաշվելիս օգտագործվում են նախորդ երկու մոտարկումները՝  $x_n$  և  $x_{n-1}$ : Միաժամանակ նշենք, որ (2.7.1) մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում հաշվվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքը միայն մեկ կետում:

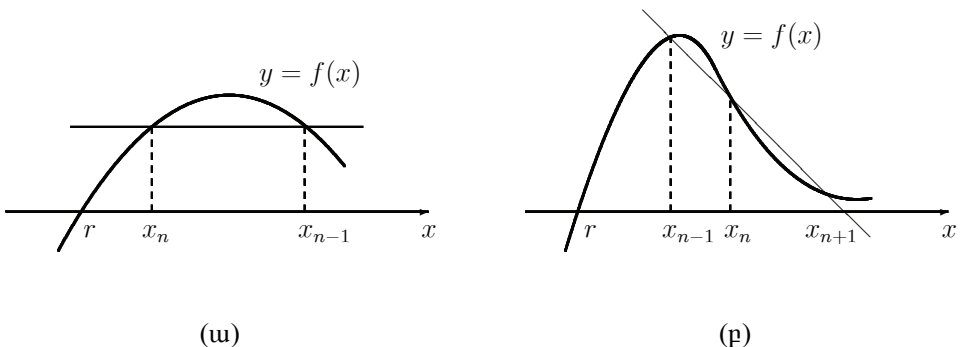
#### Pseudocode SECANT

```

input  $x_0, x_1, \varepsilon$ 
 $n = 0$ 
 $z = x_1$ 
 $y = x_1 + 2\varepsilon$ 
while  $|y - z| \geq \varepsilon$  do
     $z = x_1$ 
     $y = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$ 
     $n = n + 1$ 
     $x_0 = x_1$ 
     $x_1 = y$ 
endwhile
output  $n, x_1$ 

```

Ինչպես Նյուտոնի մեթոդում, հատողների մեթոդի կիրառման ժամանակ նույնպես կարող են առաջանալ իտերացիաների վատ վարքի տարբեր դեպքեր: Դրանցից մի քանիսը բերված են նկ. 2.7.2-ում:



**Նկ. 2.7.2** Հատողների մեթոդի վատ վարքի օրինակներ. (ա)  $f(x_{n-1}) = f(x_n)$ , հաջորդ մոտարկումը որոշված չէ, (բ) տարամիտում



### 2.7.2 Մեթոդի զուգամիտության արագության մասին

Ենթադրենք, որ  $r$ -ը  $f(x)$  ֆունկցիայի պարզ գրո է, և այդ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալն անընդհատ է նշված արմատի դիտարկվող շրջակայքում:

Դիցուք  $e_n \equiv r - x_n$ : Մեթոդի (2.7.1) հաշվարկային բանաձևից ունենք

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= r - x_{n+1} = r - \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}f(x_n) - e_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}} e_n e_{n-1} : \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Օգտվելով Թեյլորի բանաձևից՝ գրենք

$$f(x_n) = f(r - e_n) = f(r) - f'(r)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$$

վերլուծությունը, որտեղ  $\xi_n = r - \theta e_n$ ,  $0 < \theta < 1$ : Ենթադրելով, որ  $e_n$ -ը փոքր է, այստեղից կստանանք

$$f(x_n) \approx -f'(r)e_n + \frac{1}{2}f''(r)e_n^2$$

մոտավոր հավասարությունը: Վերջինից հետևում է, որ

$$\frac{f(x_n)}{e_n} \approx -f'(r) + \frac{1}{2}f''(r)e_n : \quad (2.7.3)$$

Նմանապես ստացվում է

$$\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} \approx -f'(r) + \frac{1}{2}f''(r)e_{n-1} \quad (2.7.4)$$

հավասարությունը: Այնուհետև, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմը, կստանանք

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(x^*)(x_n - x_{n-1}),$$

որտեղ  $x^* = \theta x_n + (1 - \theta)x_{n-1}$ ,  $0 < \theta < 1$ : Եթե  $x_n$  և  $x_{n-1}$  մոտարկումները մոտ են  $r$  արմատին, ապա

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) \approx f'(r)(x_n - x_{n-1}) : \quad (2.7.5)$$

Տեղադրելով (2.7.3)–(2.7.5) մոտավոր հավասարությունները (2.7.2) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$e_{n+1} \approx \frac{f''(r)(e_n - e_{n-1})}{2f'(r)(x_n - x_{n-1})} e_n e_{n-1} :$$

Քանի որ  $x_n - x_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ , ապա վերջին մոտավոր հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$e_{n+1} \approx C e_n e_{n-1}, \quad \text{որտեղ } C \equiv -\frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} : \quad (2.7.6)$$

Չուգամիտության կարգը որոշելու նպատակով ենթադրենք, որ սխալանքների համար տեղի ունի

$$|e_{n+1}| \approx A|e_n|^\alpha, \quad A = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (2.7.7)$$

ասիմպտոտիկ առնչությունը: Դա նշանակում է, որ

$$\frac{|e_{n+1}|}{A|e_n|^\alpha} \rightarrow 1, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Համաձայն (2.7.7)-ի ունենք  $|e_n| \approx A|e_{n-1}|^\alpha$ , ուստի

$$|e_{n-1}| \approx (A^{-1}|e_n|)^{\frac{1}{\alpha}} : \quad (2.7.8)$$

Եթե

$$|e_{n+1}| \approx |C| |e_n| |e_{n-1}|$$

առնչության մեջ (տե՛ս (2.7.6)-ը)  $|e_{n+1}|$  և  $|e_{n-1}|$  մեծությունները փոխարինենք համապատասխանաբար (2.7.7) և (2.7.8) մոտավոր արտահայտություններով, ապա կստանանք

$$A^{1+\frac{1}{\alpha}}|C|^{-1} \approx |e_n|^{1-\alpha+\frac{1}{\alpha}} : \quad (2.7.9)$$

Քանի որ այս ասիմպտոտիկ առնչության ձախ մասը ոչ գրոյական հաստատուն է, անկախ գրոյի ձգտող  $e_n$ -ից, երբ այն ձգտում է գրոյի, ապա

$$1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 : \quad (2.7.10)$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62 : \quad (2.7.11)$$

Ուստի

$$|e_{n+1}| \approx A|e_n|^{1.62} : \quad (2.7.12)$$

Սա նշանակում է, որ հատողների մեթոդի զուգամիտության կարգը հավասար է մոտավորապես 1.62-ի: Ինչ վերաբերում է  $A$  դրական հաստատունին, ապա, քանի որ (2.7.9) ասիմպտոտիկ առնչության աջ մասը փաստորեն հավասար է մեկի, ունենք

$$A^{1+\frac{1}{\alpha}}|C|^{-1} \approx 1 :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (2.7.10) և (2.7.11)-ը, կստանանք

$$A \approx |C|^{\alpha-1} \approx |C|^{0.62} :$$

Կատարենք հատողների և Նյուտոնի մեթոդների համեմատումը այլ տեսանկյունից: Քանի որ  $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62 < 2$ , ապա հատողների մեթոդը զուգամիտության կարգով զիջում է Նյուտոնի մեթոդին: Մյուս կողմից, հատողների մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում

հաշվվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի մեկ նոր արժեք, մինչդեռ Նյուտոնի մեթոդում հաշվվում են ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի արժեքները: Եթե ենթադրենք, որ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի հաշվման համար ծախսվում է մոտավորապես նույն համակարգչային ժամանակը, ապա հատողների մեթոդի երկու քայլը համարժեք է Նյուտոնի մեթոդի մեկ քայլին: Ասվածի համաձայն, ունենք

$$|e_{n+2}| \approx A|e_{n+1}|^\alpha \approx A^{1+\alpha}|e_n|^{\alpha^2} = A^{1+\alpha}|e_n|^{1+\alpha} \approx A^{1+\alpha}|e_n|^{2.62} :$$

Այսպիսով, քննարկված տեսանկյունից հատողների մեթոդը գերադասելի է Նյուտոնի մեթոդից:

### 2.8 Նյուտոնի մեթոդը համակարգերի համար

Դիցուք տրված է  $m$  անհայտներով  $m$  ոչ գծային հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 : \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Դիտարկման մեջ ներմուծելով

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

վեկտորը և

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

վեկտոր-ֆունկցիան, (2.8.1) համակարգը գրենք

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.8.2)$$

համառոտ տեսքով:

Դիցուք  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T$ -ը (2.8.2) հավասարման մեկուսացված արմատ է, իսկ  $\mathbf{x}_n = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}]^T$ -ը այդ արմատի  $n$ -րդ մոտարկումն է: Կարող ենք գրել  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_n + \mathbf{e}_n$ , որտեղ  $\mathbf{e}_n = [e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \dots, e_m^{(n)}]^T$  վեկտորը  $\mathbf{x}_n$  մոտարկման սխալանքն է: Տեղադրելով (2.8.2) հավասարման մեջ  $\mathbf{r}$ -ի փոխարեն  $\mathbf{x}_n + \mathbf{e}_n$ , կունենանք

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \mathbf{e}_n) = \mathbf{0} : \quad (2.8.3)$$

Ենթադրենք, որ բոլոր  $f_i, i = 1, 2, \dots, m$  ֆունկցիաներն երկու անգամ անընդհատ ածանցելի են  $\mathbf{R}^m$  տարածության  $\mathbf{r}$  և  $\mathbf{x}_n$  կետերը պարունակող մի որոշ ուռուցիկ շրջակայքում: Այդ դեպքում

$$f_i(x_1^{(n)} + e_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} + e_m^{(n)}) = f_i(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n} e_j^{(n)} + O(|\mathbf{e}_n|^2)$$

(այստեղ  $|\mathbf{e}_n| \equiv \sqrt{(e_1^{(n)})^2 + \dots + (e_m^{(n)})^2}$  մեծությունը  $\mathbf{e}_n$  վեկտորի երկարությունն է): Այնուհետև, ենթադրելով, որ  $|\mathbf{e}_n|$ -ը փոքր է, կստանանք

$$f_i(x_1^{(n)} + e_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} + e_m^{(n)}) \approx f_i(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n} e_j^{(n)}$$

մոտավոր հավասարությունը: Այսպիսով (2.8.3) հավասարությունից ստանում ենք

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{e}_n \approx \mathbf{0} \quad (2.8.4)$$

մոտավոր հավասարությունը, որտեղ

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (2.8.5)$$

մատրիցը  $x_1, x_2, \dots, x_m$  փոփոխականների նկատմամբ  $f_1, f_2, \dots, f_m$  ֆունկցիաների համակարգի *Յակոբիի մատրիցն է (յակոբիան)*: Ենթադրելով, որ  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)$  մատրիցը չվերասերված է, (2.8.4) -ից կստանանք

$$\mathbf{e}_n \approx -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$$

կամ

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{x}_n - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) :$$

Այս մոտավոր հավասարությունը հիմք է տալիս  $\mathbf{r}$  որոնելի արմատի հաջորդ  $(n+1)$ -րդ մոտարկումը ստանալ

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad (2.8.6)$$

կանոնով:

Դժվար չէ նկատել, որ  $n = 1$  դեպքում (2.8.6) բանաձևը վերածվում է սովորական Նյուտոնի մեթոդի (2.5.2) հաշվարկային բանաձևի: Այդ պատճառով (2.8.6) մեթոդը նույնպես կրում է *Նյուտոնի մեթոդ* անունը:

Այստեղ մենք չենք զբաղվելու (2.8.6) մեթոդի գուգամիտության հարցերի ուսումնասիրությամբ: Այդ հարցերի քննարկումը կարելի է գտնել, օրինակ, [3], [19], [43] գրքերում: Դրա փոխարեն մենք համառոտ կքննարկենք մեթոդի կիրառման հետ կապված որոշ կարևոր հարցեր:

• Նյուտոնի մեթոդի կիրառումը, ըստ (2.8.6) բանաձևի, կապված է  $F'(x_n)$  մատրիցի հակադարձման հետ: Սակայն այդ աշխատատար գործողությունից խուսափելու նպատակով մեթոդի քայլը գործնականում իրականացվում է հետևյալ կերպ.

1. լուծվում է

$$F'(x_n)z_n = -F(x_n)$$

գծային հավասարումների համակարգը,

2. հաշվվում է

$$x_{n+1} = x_n + z_n :$$

• Մեթոդի ամեն մի քայլում անհրաժեշտ է լինում կառուցել Յակոբիի (2.8.5) մատրիցը: Դա պահանջում է  $\partial f_i / \partial x_j$  մասնական ածանցյալների հաշվումը: Եթե  $m$ -ը մեծ է, կամ  $f_i$  ֆունկցիաները տրված են բարդ անալիտիկ արտահայտություններով, ապա ածանցյալների հաշվումը և ստացված արտահայտությունների ծրագրավորումը բավականաչափ աշխատատար է: Այդ դեպքում մասնական ածանցյալները կարելի է փոխարինել վերջավոր տարբերություններով, օրինակ՝

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_m) - f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)}{h} :$$

(2.8.7)

Նման մոտեցմամբ պահանջվում է միայն  $f_i$  ֆունկցիաների հաշվումը, ինչը մեթոդի իրականացման ընթացքում պետք է ամեն դեպքում:

• Մեթոդը կիրառելիս զգալի դժվարություն է ներկայացնում  $x_0$  սկզբնական մոտարկման ընտրությունը: Սովորաբար, մեթոդը գուգամիտում է, եթե  $x_0$ -ն ընտրված է  $r$  արմատին բավականաչափ մոտ: Դրա հետ կապված, հաճախ օգտագործվում է *ըստ պարամետրի շարունակման* եղանակը, որի էությունը կայանում է հետևյալում:

Դիտարկենք

$$G(x; \alpha) = 0 \tag{2.8.8}$$

հավասարումը, որը պարունակում է  $\alpha$  պարամետր: Դիցուք պահանջվում է գտնել այդ հավասարման  $r_0, r_1, \dots, r_N$  լուծումները պարամետրի համապատասխանաբար  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$  արժեքների համար: Ընդ որում՝  $\alpha = \alpha_0$  դեպքում (2.8.8) հավասարման լուծումն հեշտությամբ գտնվում է: Եթե  $|\alpha_1 - \alpha_0|$  մեծությունը փոքր է, հիմքեր կան ենթադրելու, որ  $r_0$ -ն բավականաչափ մոտ է  $r_1$ -ին և այն կարող է լավ սկզբնական մոտարկում լինել

$$G(x; \alpha_1) = 0$$

հավասարումը Նյուտոնի մեթոդով լուծելիս: Շարունակելով այդ ընթացքը՝ կարելի է նախորդ խնդրի գտնված լուծումը ընտրել որպես սկզբնական մոտարկում հաջորդ խնդրի լուծման համար:

Նկարագրված գաղափարը կարելի է արդյունավետ օգտագործել (2.8.2) հավասարման լուծման ժամանակ: Ենթադրենք՝ հավասարման որոնելի  $r$  արմատի  $\mathbf{x}_0$  սկզբնական մոտարկումը չի ապահովում Նյուտոնի մեթոդի զուգամիտությունը: Ներմուծենք նոր հավասարում՝ կախված  $\alpha$  պարամետրից.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}; \alpha) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\alpha - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 :$$

Երբ  $\alpha = 0$ , ունենք

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}; 0) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$$

հավասարումը, որի արմատն է  $\mathbf{x}_0$ -ն: Իսկ երբ  $\alpha = 1$ , ստանում ենք

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}; 1) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$$

նախնական հավասարումը: Ուստի (2.8.2) հավասարումը լուծելու համար մենք կարող ենք կիրառել ըստ պարամետրի շարունակման եղանակը՝ ընտրելով պարամետրերի  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N = 1$  հաջորդականություն:

## Խնդիրներ և վարժություններ-2

1. Տեղայնացնել հետևյալ հավասարումների իրական արմատները.

$$\text{ա) } x^3 - 6x + 2 = 0, \quad \text{բ) } x^4 - 4x - 1 = 0, \quad \text{գ) } x^3 + 2x + 7.8 = 0,$$

$$\text{դ) } x + e^x = 0, \quad \text{ե) } x - \sin x = 0.25, \quad \text{զ) } 3x - \cos x - 1 = 0,$$

$$\text{է) } \cos x + 1 - x = 0, \quad \text{ը) } x^2 = \sin x, \quad \text{թ) } 5x - 8 \ln x = 8 :$$

2. Որոշել հետևյալ հավասարումների իրական արմատների թիվը նշված միջակայքերում.

$$\text{ա) } x^2 - e^x = 0, \quad [-2, 2], \quad \text{բ) } x - \cos x = 0, \quad [-2, 2],$$

$$\text{գ) } \cos x + (1 + x^2)^{-1} = 0, \quad [-2, 2], \quad \text{դ) } (x - 2)^2 - \ln x = 0, \quad [0.5, 4.5] :$$

3. Ֆույց տալ, որ  $x e^{-x} = \gamma$  հավասարումը ունի ճիշտ երկու իրական արմատ, եթե  $0 < \gamma < e^{-1}$ :

4. Տրված է

$$\sin x = -k \cos x$$

հավասարումը, որտեղ  $k$ -ն ոչ բացասական թիվ է: Այդ հավասարումը ունի անվերջ թիվ արմատներ: Տեղայնացնել այդ արմատները:

5. Տրված է իրական գործակիցներով բազմանդամ

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 :$$

Ապացուցել, որ եթե

$$P(a) > 0, P'(a) > 0, \dots, P^{(n)}(a) > 0$$

ինչ-որ  $a$ -ի համար, ապա բազմանդամը  $a$ -ից մեծ իրական արմատներ չունի:

6. Հայտնի է, որ  $x_* = 1.22$  թիվը

$$x^4 - x - 1 = 0$$

հավասարման արմատի մոտավոր արժեքն է: Գնահատել այդ մոտարկման բացարձակ սխալանքը:

7. Ճի՞շտ է արդյոք, որ կիսման մեթոդում

$$|r - x_0| \geq |r - x_1| \geq \dots :$$

8. Սահմանենք  $d_0, d_1, \dots$  հաջորդականությունը հետևյալ կերպ. եթե  $[a_n, b_n]$  հատվածի կիսման ընթացքում որպես  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  վերցվում է ձախ կեսը, ապա  $d_n = 0$ , հակառակ դեպքում՝  $d_n = 1$ : Կիսման մեթոդի այգորիթմով որոշվող  $r$  արմատն արտահայտել սահմանված հաջորդականության միջոցով:

9. Բերել օրինակ, երբ կիսման մեթոդում

$$a_0 = a_1 < a_2 = a_3 < a_4 = a_5 < a_6 = \dots :$$

10. Բերել օրինակ (կամ ցույց տալ, որ այդպիսին գոյություն չունի), երբ կիսման մեթոդում

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots :$$

11. Ապացուցել, որ

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդը, որտեղ

$$g(x) \equiv a \sin^2 x + b \cos^2 x + 1, \quad |a - b| < 1,$$

գուգամիտում է կամայական սկզբնական մոտարկման դեպքում:

12. Դիցուք

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Ապացուցել, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  կամայական  $x_0 > -2$  սկզբնական արժեքի համար:

13. Տրված է

$$x^2 = a, \quad a > 0$$

հավասարումը: Ցույց տալ, որ

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

իտերացիոն մեթոդը չի գուգամիտում:

14. Ապացուցել, որ

$$x_{n+1} = \cos x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդը զուգամիտում է կամայական սկզբնական մոտարկման դեպքում:

15. Հետազոտել

$$x_{n+1} = \frac{1}{2(1+x_n^2)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդի զուգամիտությունը:

16. Հետազոտել, թե երբ և որ սահմանին են զուգամիտում

$$x_{n+1} = 2^{x_n-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

իտերացիաները  $x_0$  սկզբնական մոտարկման տարբեր ընտրության դեպքում:

17. Հետազոտել

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \quad n = 0, 1, \dots$$

պարզ իտերացիայի մեթոդի զուգամիտությունը՝ կախված  $x_0$  սկզբնական մոտարկման ընտրությունից:

18. Պարզ իտերացիայի մեթոդը կիրառվում է

$$g(x) = 2 + (x - 2)^4$$

ֆունկցիայի նկատմամբ: Որոշել այն սկզբնական մոտարկումների միջակայքը, որոնց դեպքում մեթոդը զուգամիտում է: Ինչպիսի՞ն կլինի զուգամիտության կարգը:

19. Ինչի՞նք է հավասար

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}, \quad a > 0$$

արտահայտությունը:

20. Դիցուք  $r$ -ը չորս անգամ անընդհատ ածանցելի  $f(x)$  ֆունկցիայի պարզ զրոն է: Հաջորդական մոտավորությունները հաշվվում են

$$x_{n+1} = \frac{x'_{n+1} + x''_{n+1}}{2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

օրենքով, որտեղ

$$x'_{n+1} = x_n - u(x_n), \quad x''_{n+1} = x_n - u(x_n)/u'(x_n) \quad (u(x) \equiv f(x)/f'(x)) :$$

Յույց տալ, որ եթե  $x_n$  հաջորդականությունը ձգտում է  $r$ -ի, ապա զուգամիտությունը խորանարդային է:



21. Ինչպե՞ս կարելի է հաշվել

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

հավասարման բոլոր իրական արմատները՝ կիրառելով պարզ իտերացիայի մեթոդը:

22. Որոշել հետևյալ հաջորդականությունների զուգամիտության կարգը.

$$\text{ա) } x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{բ) } x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

$$\text{գ) } x_n = \sqrt[n]{n}, \quad \text{դ) } x_{n+1} = \arctg x_n :$$

23. Կիրառել Էյտկենի  $\Delta^2$ -ընթացքը

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

հաջորդականության նկատմամբ:

24. Դիտարկենք  $x_n$  հաջորդականությունը, որն արտադրվում է

$$x_n = r + aq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad |q| < 1$$

օրենքով: Ինչպիսի՞ արդյունք կտա Էյտկենի  $\Delta^2$ -ընթացքի կիրառումը այս հաջորդականության նկատմամբ:

25. Յույց տալ, որ

$$x^p - a = 0$$

հավասարման նկատմամբ ( $a$ -ն դրական թիվ է,  $p \geq 2$ ) Նյուտոնի մեթոդի կիրառումը կհանգեցնի

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} \left[ (p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right], \quad n = 0, 1, \dots$$

իտերացիաների հաջորդականությանը, որը զուգամիտում է ցանկացած  $x_0 > 0$  սկզբնական մոտարկման դեպքում:

26. Դիտարկվում է

$$x_{n+1} = Ax_n + B \frac{a}{x_n^2} + C \frac{a^2}{x_n^5}, \quad n = 0, 1, \dots$$

իտերացիոն մեթոդ  $\sqrt[3]{a}$  խորանարդ արմատը հաշվելու համար: Գտնել  $A, B$  և  $C$  պարամետրերի արժեքները, որոնք ապահովում են մեթոդի զուգամիտության մեծագույն կարգը:

27. Ցույց տալ, որ եթե  $r$ -ը  $f(x)$  ֆունկցիայի  $k$ -պատիկ գրոն է ( $k \geq 2$ ), ապա Նյուտոնի մեթոդի քառակուսային գուգամիտությունը կարելի է վերականգնել հետևյալ վերափոխության միջոցով.

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots :$$

28. Որոշել

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

հաստատուն ածանցյալով Նյուտոնի գուգամիտության կարգը:

29. Հետևյալ համակարգերի համար կատարել Նյուտոնի մեթոդի երկու իտերացիա.

$$(u) \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 4xy^2 - x = 1 \end{cases}$$

(սկզբնական մոտարկումը՝  $(0, 1)$ ),

$$(p) \begin{cases} xy^2 + x^2y + x^4 = 3 \\ x^3y^5 - 2x^5y - x^2 = -2 \end{cases}$$

(սկզբնական մոտարկումը՝  $(1, 1)$ ):

## Գլուխ 3

# ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԵՐԸ

### 3.1 Վեկտորներ և մատրիցներ

Նշանակենք  $C^n$ -ով  $C$  կոմպլեքս թվերի դաշտի բաղադրիչներով

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

վեկտորների (*վեկտոր-սյունակների*) տարածությունը: Եթե վեկտորների բաղադրիչները ընտրվում են  $\mathbf{R}$  իրական թվերի դաշտից, ապա համապատասխան վեկտորական տարածությունը կնշանակենք  $\mathbf{R}^n$ -ով:

**Սահմանում 3.1.1 :**  $C^n$  տարածությանը պատկանող

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

վեկտորների *սկալյար արտադրյալ* կանվանենք

$$(x, y) \equiv \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (3.1.1)$$

թիվը (վերին գծիկը նշանակում է կոմպլեքս համալուծության գործողություն):

Դժվար չէ ստուգել, որ (3.1.1) բանաձևով ներմուծված սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

$$\begin{aligned} \text{SP1.} & \quad (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}, \\ \text{SP2.} & \quad (x, y) = \overline{(y, x)}, \\ \text{SP3.} & \quad (\alpha x, y) = \alpha (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \\ \text{SP4.} & \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z) : \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Որպես **SP2** և **SP3** հատկությունների հետևանք ստանում ենք

$$(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (3.1.3)$$

հատկությունը:

**Դիտողություն 3.1.1 :** *Քանի որ կոմպլեքս թվերի  $\mathbb{C}$  դաշտը ավելի «զայն» է իրական թվերի  $\mathbb{R}$  դաշտից, ապա  $\mathbb{C}$  դաշտի վրա որոշված օբյեկտների վերաբերյալ բոլոր դատողությունները բնական ձևով տարածվում են  $\mathbb{R}$  դաշտի վրա որոշված օբյեկտների վրա: Դրանով  $\mathbb{R}^n$  տարածության մեջ սկալյար արտադրյալի (3.1.1) սահմանումը կրնդունի հետևյալ տեսքը.*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i : \quad (3.1.4)$$

Հանապատասխանաբար, **SP2** հատկությունը (3.1.2)-ից կգրվի

$$\text{SP2}' . \quad (x, y) = (y, x) \quad (3.1.5)$$

տեսքով:

Այս դիտողությունը նկատի կունենանք հետագայում: Հատուկ վերապահություն կարվի բոլոր այն դեպքերում, երբ կառաջանան տարբերություններ սահմանումներում կամ պնդումների մեջ:

**Սահմանում 3.1.2 :**  $x$  և  $y$  վեկտորները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե  $(x, y) = 0$ :

**Սահմանում 3.1.3 :**  $x$  վեկտորը կոչվում է *նորմավորված*, եթե  $(x, x) = 1$ :

Ցանկացած երկու  $x, y \in \mathbb{C}^n$  վեկտորների համար ճիշտ է *Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը*.

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \quad (3.1.6)$$

(տե՛ս, օրինակ՝ [11, 33]): Ընդ որում, հավասարությունը (3.1.6)-ում տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ  $x$  և  $y$  վեկտորները գծորեն կախված են:

**Սահմանում 3.1.4 :** Վեկտորների համակարգը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե այն բաղկացած է կա՛մ մեկ վեկտորից, կա՛մ դրա վեկտորները գույժ առ գույժ օրթոգոնալ են: Նորմավորված վեկտորների օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է *օրթոնորմալ*:

Նշանակենք  $\mathbb{C}^{m \times n}$ -ով կոմպլեքս տարրերով  $m \times n$  չափի

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

մատրիցների տարածությունը: Համապատասխանաբար, իրական թվերի դաշտի տարրերով մատրիցների տարածությունը կնշանակենք  $\mathbf{R}^{m \times n}$ -ով: Հետագայում (3.1.7) մատրիցի համար կօգտվենք նաև նրա համառոտ գրառումից.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} :$$

Ենթադրվում է, որ ընթերցողը ծանոթ է հիմնական մատրիցային գործողություններին՝

$A \pm B$  (մատրիցների գումարում և հանում),

$\alpha A$  (մատրիցը թվով բազմապատկում),

$AB$  (մատրիցների բազմապատկում),

$A^T$  (մատրիցի տրանսպոնացում),

$A^*$  (մատրիցի համալուծություն),

ինչպես նաև հետևյալ գաղափարներին՝

$\det A$  (մատրիցի որոշիչ),

$\text{rank } A$  (մատրիցի ռանգ):

Այդ հասկացությունների սահմանումները կարելի է գտնել [11, 16, 32] և այլ գրքերում: Պարզ է, որ  $A^* = A^T$ , երբ  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ :

**Գիտողություն 3.1.2 :**  $\mathbf{C}^n$  (կամ  $\mathbf{R}^n$ ) տարածության վեկտորները կարելի է դիտարկել որպես  $n \times 1$  չափսի մատրիցներ:

Հաշվի առնելով վերջին դիտողությունը՝ երկու վեկտորների վերը սահմանված (3.1.1) սկալյար արտադրյալը կարելի է գրել նաև մատրիցային արտադրյալի տեսքով.

$$(x, y) = y^* x : \quad (3.1.8)$$

Համապատասխանաբար, իրական տարածության դեպքում ունենք.

$$(x, y) = y^T x : \quad (3.1.9)$$

Գիցուք  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ : Օգտագործելով սկալյար արտադրյալի (3.1.8) մատրիցային գրառումը՝ հեշտ է ցույց տալ, որ

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (3.1.10)$$

կանայական  $x \in \mathbf{C}^n$  և  $y \in \mathbf{C}^m$  վեկտորների համար: Եթե  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , ապա (3.1.10) հավասարությունն ընդունում է

$$(Ax, y) = (x, A^T y) \quad (3.1.11)$$

տեսքը:

Հիշեցնենք ևս մի քանի կարևոր հասկացություն:

**Մահմանում 3.1.5 :**  $A$  մատրիցի  $k$ -րդ կարգի *մինոր* կոչվում է այդ մատրիցի  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  համարներով տողերի և  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  համարներով սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված մատրիցի որոշիչը և նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} :$$

Մինորը կոչվում է *գլխավոր*, եթե  $i_s = j_s, s = 1, 2, \dots, k$ : Այն գլխավոր մինորը, որում  $i_s = s, s = 1, 2, \dots, k$ , կոչվում է *անկյունային*:

**Մահմանում 3.1.6 :**  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի *հետք* կոչվում է

$$\text{tr } A \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (3.1.12)$$

թիվը:

Պարագրաֆի վերջում դիտարկենք այսպես կոչված *վանդակային մատրիցներ*: Նախ նշենք, որ մատրիցների տրոհումը վանդակների՝ պարզ, սակայն չափազանց օգտակար գաղափար է մաթեմատիկական տարբեր խնդիրներ լուծելիս: Դա հաճախ կիրառվում է պնդումների ապացուցման համար, հաշվողական ալգորիթմների մշակման ժամանակ և այլն:

Դիցուք ունենք  $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$  մատրից: Ներկայացնենք այն

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

տեսքով, որտեղ  $A_{ij}$  վանդակները  $m_i \times n_j$  չափսի մատրիցներ են, ընդ որում՝

$$\sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n :$$

Օրինակ՝

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 8 & 11 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 11 & 13 & 8 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{bmatrix} :$$

Նույն չափսի և միանման տրոհումով վանդակային մատրիցները անվանում են *համաձև*:

Վանդակային մատրիցների օգտագործումը հարմար է դրանով, որ նրանց հետ հիմնական գործողությունները կատարվում են ձևականորեն ինչպես սովորական մատրիցների դեպքում:

- Վանդակային մատրիցների գումարումը և հանումը:

Դիցուք տրված են երկու համաձև մատրից.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pq} \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում՝

$$A \pm B = \begin{bmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & \dots & A_{1q} \pm B_{1q} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & \dots & A_{2q} \pm B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} \pm B_{p1} & A_{p2} \pm B_{p2} & \dots & A_{pq} \pm B_{pq} \end{bmatrix} :$$

- Վանդակային մատրիցի թվով բազմապատկումը:

Վերը բերված (3.1.13) վանդակային մատրիցի համար

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1q} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \dots & \alpha A_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{p1} & \alpha A_{p2} & \dots & \alpha A_{pq} \end{bmatrix} :$$

- Վանդակային մատրիցների բազմապատկումը:

Դիցուք տրված են վանդակային մատրիցներ՝

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{ps} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times k}, \quad \begin{aligned} & A_{il} \in \mathbf{C}^{m_i \times k_l}, \\ & \sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{l=1}^s k_l = k \end{aligned}$$

և

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{sq} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{k \times n}, \quad \begin{aligned} & B_{lj} \in \mathbf{C}^{k_l \times n_j}, \\ & \sum_{l=1}^s k_l = k, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n : \end{aligned}$$

Բազմապատկման արդյունքում կստանանք

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pq} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m \times n}, \quad \begin{aligned} & C_{ij} \in \mathbf{C}^{m_i \times n_j}, \\ & \sum_{i=1}^p m_i = m, \quad \sum_{j=1}^q n_j = n \end{aligned}$$

մատրիցը, որի վանդակները հաշվվում են հետևյալ բանաձևով.

$$C_{ij} = \sum_{t=1}^s A_{it} B_{tj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q :$$

### 3.2 Սեփական արժեքներ և սեփական վեկտորներ

Մույն պարագրաֆում մենք կսահմանենք մատրիցների տեսության կարևորագույն հասկացություններից մեկը:

**Սահմանում 3.2.1 :**  $\lambda$  թիվը կոչվում է  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցի *սեփական արժեք*, եթե գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական  $x \in \mathbb{C}^n$  վեկտոր, որ

$$Ax = \lambda x : \quad (3.2.1)$$

Ցանկացած  $x \neq 0$  վեկտոր, որը բավարարում է (3.2.1) հավասարմանը, կոչվում է  $A$  մատրիցի  $\lambda$  սեփական արժեքին համապատասխանող *սեփական վեկտոր*:

Տեղի ունի հեշտությամբ ապացուցվող հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.2.1 :**  $\lambda$  թիվը  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցի սեփական արժեքն է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (3.2.2)$$

որտեղ  $I$ -ն միավոր մատրիցն է:

Ապացույց: Գծվար չէ տեսնել, որ  $\lambda$  թիվը  $A$  մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $(\lambda I - A)x = 0$  համասեռ հավասարումը ունի ոչ զրոյական լուծում: Իսկ նշված հավասարումը ունի ոչ զրոյական լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\det(\lambda I - A) = 0$ :  $\square$

Նկատի առնելով ապացուցված թեորեմը՝ դիտարկենք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.2.3)$$

*բնութագրիչ որոշիչը*: Բացելով այն և խմբավորելով անդամները ըստ  $\lambda$ -ի աստիճանների՝ կստանանք

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n \quad (3.2.4)$$

*բնութագրիչ բազմանդամը*: Ընդ որում՝

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.5)$$



(տե՛ս, օրինակ՝ [16]): Մասնավորապես՝

$$p_1 = \operatorname{tr} A, \quad p_n = \det A : \quad (3.2.6)$$

Դեռ ավելին, տեղի ունեն

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = p_1, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = p_n : \quad (3.2.7)$$

առնչությունները (տե՛ս, օրինակ՝ [16, 32]):

Այսպիսով, մատրիցի սեփական արժեքները բնութագրիչ բազմանդամի արմատներն են: Հիմնվելով բազմանդամների արմատների վերաբերյալ հայտնի փաստի վրա (տե՛ս, օրինակ՝ [32]), կարող ենք պնդել, որ  $n$ -րդ կարգի մատրիցն ունի ճիշտ  $n$  հատ սեփական արժեք (այն պայմանով, որ յուրաքանչյուր սեփական արժեքը հաշվվում է այնքան անգամ, որքան իր պատիկությունն է որպես բնութագրիչ բազմանդամի արմատ): Նշենք, որ երբ  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցն ունի կոմպլեքս սեփական արժեքներ, ապա դրանք կոմպլեքս համալուծ են:

**Սահմանում 3.2.2 :**  $A$  մատրիցի սեփական արժեքների բազմությունը կոչվում է նրա *սպեկտր* և նշանակվում  $\operatorname{sp} A$ -ով:

**Սահմանում 3.2.3 :**  $A$  մատրիցի *սպեկտրալ շառավիղ* կոչվում է

$$\rho(A) \equiv \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{sp} A\} \quad (3.2.8)$$

թիվը:

Չնակերպենք հետագայի համար կարևոր մի քանի պնդում, որոնց ապացույցը դժվարություն չի ներկայացնում:

**Լեմմա 3.2.1 :**  $\lambda = 0$  թիվը  $A$  մատրիցի սեփական արժեք է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ մատրիցը վերաստերիած է, այսինքն՝  $\det A = 0$  :

**Լեմմա 3.2.2 :** Եթե  $\lambda$  թիվը  $A$  չվերաստերիած մատրիցի սեփական արժեք է, ապա  $\lambda^{-1}$  թիվը՝  $A^{-1}$  մատրիցի սեփական արժեք է:

**Լեմմա 3.2.3 :** Եթե  $\lambda$  թիվը  $A$  մատրիցի սեփական արժեք է, ապա  $\lambda^k$  թիվը՝  $A^k$  մատրիցի սեփական արժեք է ( $k = 2, 3, \dots$ ):

**Լեմմա 3.2.4 :**  $A$  և  $A^T$  մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են:

Թողնում ենք այդ պնդումների ապացույցը ընթերցողին որպես վարժություն: Հաջորդ պնդման ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [32] գրքում:

**Լեմմա 3.2.5 :** Չույգ առ զույգ իրարից տարբեր սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գծորեն անկախ են:

### 3.3 Հատուկ տիպի մատրիցներ

Մույն պարագրաֆում մենք կներմուծենք մատրիցներ, որոնք շատ կարևոր դեր են խաղում հաշվողական մաթեմատիկայում և կուսումնասիրենք այդ մատրիցների հիմնական հատկությունները:

#### 3.3.1 Միմետրիկ մատրիցներ

**Մահմանում 3.3.1 :**  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը կոչվում է *սիմետրիկ*, եթե  $A = A^T$  :

Միմետրիկ մատրիցները օժտված են հետևյալ հեշտ ապացուցվող հատկություններով:

**Լեմմա 3.3.1 :** *Եթե չվերասերված  $A$  մատրիցը սիմետրիկ է, ապա նրա հակադարձը նույնպես սիմետրիկ մատրից է:*

**Լեմմա 3.3.2 :** *Միմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են:*

**Լեմմա 3.3.3 :** *Միմետրիկ մատրիցի տարրեր սեփական արժեքներին համասպառուսախանող սեփական վեկտորներն օրթոգոնալ են:*

**Լեմմա 3.3.4 :** *Ցանկացած  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  մատրիցի համար  $A^T A$  և  $AA^T$  մատրիցները սիմետրիկ են:*

Գծային հանրահաշվի դասընթացում ապացուցվում է հետևյալ պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [16, 32]):

**Թեորեմ 3.3.1 :** *Ցանկացած  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  սիմետրիկ մատրից ունի  $n$  հաստ գույգ առ գույգ օրթոգոնալ սեփական վեկտոր:*

Այսպիսով,  $\mathbf{R}^n$  տարածության մեջ գոյություն ունի օրթոգոնալ բազիս՝ կազմված  $A$  մատրիցի սեփական վեկտորներից:

Օգտվելով վերջին թեորեմից՝ ապացուցենք հետևյալ չափազանց կարևոր պնդումը:

**Թեորեմ 3.3.2 :** *Դիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  սիմետրիկ մատրից է: Այդ դեպքում*

$$\lambda_{\min} \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_{\max} \quad \forall x \neq 0, \quad (3.3.1)$$

որտեղ  $\lambda_{\min}$  և  $\lambda_{\max}$  թվերը  $A$  մատրիցի վորքրագույն և մեծագույն սեփական արժեքներն են: Դեռ ավելին,

$$\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} : \quad (3.3.2)$$

Ապացույց: Կարգավորենք  $A$  մատրիցի սեփական արժեքները.

$$\lambda_{min} \equiv \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n \equiv \lambda_{max}$$

(հիշեցնենք, որ համաձայն 3.3.2 լեմմայի  $A$ -ի սեփական արժեքներն իրական են): Այնուհետև, դիցուք համապատասխան սեփական վեկտորները՝

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

կազմում են օրթոնորմալ բազիս  $\mathbf{R}^n$  տարածությունում (տե՛ս 3.3.1 թեորեմը): Այսպիսով,

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

և

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = j, \\ 0, & \text{եթե } i \neq j: \end{cases}$$

Վերցնենք կամայական  $x \in \mathbf{R}^n$  վեկտոր: Ունենք

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ae_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i :$$

Օգտվելով այդ վերլուծություններից՝ կստանանք

$$(x, x) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2,$$

$$(Ax, x) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \alpha_i \alpha_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\lambda_{min} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

կամ

$$\lambda_{min}(x, x) \leq (Ax, x) \leq \lambda_{max}(x, x) :$$

Այստեղից, եթե  $x \neq 0$ , կստանանք (3.3.1) անհավասարությունները: Վերջապես, (3.3.1)-ից և

$$\frac{(Ae_1, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{(\lambda_1 e_1, e_1)}{(e_1, e_1)} = \lambda_1 = \lambda_{min},$$

$$\frac{(Ae_n, e_n)}{(e_n, e_n)} = \frac{(\lambda_n e_n, e_n)}{(e_n, e_n)} = \lambda_n = \lambda_{max}$$

հավասարություններից հետևում են (3.3.2) առնչությունները:  $\square$

Հատուկ նշենք, որ հենց նոր ապացուցված թեորեմում դիտարկված

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} \tag{3.3.3}$$

հարաբերությունը կարևոր դեր է խաղում ինչպես մատրիցների տեսության մեջ, այնպես էլ կիրառություններում և կոչվում է *Ռելեի հարաբերություն* (տե՛ս, օրինակ՝ [16, 67]):

### 3.3.2 Գրական որոշյալ և դրական կիսատրոշյալ մատրիցներ

**Սահմանում 3.3.2 :**  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  սիմետրիկ մատրիցը կոչվում է *դրական որոշյալ* (գրվում է  $A > 0$ ), եթե  $(Ax, x) > 0$  ցանկացած ոչ գրոյական  $x \in \mathbf{R}^n$  վեկտորի համար:

**Սահմանում 3.3.3 :**  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  սիմետրիկ մատրիցը կոչվում է *դրական կիսատրոշյալ* (գրվում է  $A \geq 0$ ), եթե  $(Ax, x) \geq 0$  ցանկացած  $x \in \mathbf{R}^n$  վեկտորի համար:

Ստորև բերվում են մի քանի հեշտ ապացուցվող պնդումներ դրական որոշյալ և դրական կիսատրոշյալ մատրիցների վերաբերյալ:

**Լեմմա 3.3.5 :** *Գրական որոշյալ մատրիցի անկյունագծային տարրերը դրական են, իսկ դրական կիսատրոշյալ մատրիցինը՝ ոչ բացասական:*

**Լեմմա 3.3.6 :** *Գրական որոշյալ մատրիցի սեփական արժեքները դրական են, իսկ դրական կիսատրոշյալ մատրիցինը՝ ոչ բացասական:*

**Լեմմա 3.3.7 :** *Եթե  $A$  մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա  $A^{-1}$  հակադարձ մատրիցը նույնպես դրական որոշյալ է:*

**Լեմմա 3.3.8 :** *Ցանկացած  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  մատրիցի համար  $A^T A$  և  $AA^T$  մատրիցները դրական կիսատրոշյալ են: Դեռ ավելին, եթե  $\text{rank } A = n$ , ապա  $A^T A > 0$ , իսկ եթե  $\text{rank } A = m$ , ապա  $AA^T > 0$ :*

Ճիշտ է հետևյալ կարևոր պնդումը (տե՛ս, օրինակ՝ [16, 32]):

**Թեորեմ 3.3.3 (Սիլվեստրի չափանիշ) :**  $A$  սիմետրիկ մատրիցը դրական որոշյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ դրա բոլոր անկյունային մինորները դրական են, այսինքն՝

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (3.3.4)$$

### 3.3.3 Օրթոգոնալ մատրիցներ

**Սահմանում 3.3.4 :**  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը կոչվում է *օրթոգոնալ*, եթե  $A^{-1} = A^T$ :

Նշենք օրթոգոնալ մատրիցների մի քանի կարևոր հատկություն: Ստորև բերված չորս պնդումների ապացույցը առաջարկվում է ընթերցողին որպես վարժություն:

**Լեմմա 3.3.9 :** *Եթե  $A$  մատրիցն օրթոգոնալ է, ապա  $A^T$  մատրիցը ևս օրթոգոնալ է:*

**Լեմմա 3.3.10 :** *Օրթոգոնալ մատրիցների արտադրյալն օրթոգոնալ մատրից է:*

**Լեմմա 3.3.11 :** *Օրթոգոնալ մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով հավասար են մեկի:*

**Լեմմա 3.3.12 :** *Օրթոգոնալ մատրիցի որոշիչը բացարձակ արժեքով հավասար է մեկի:*

Նշենք, որ վերջին լեմմայից հետևում է օրթոգոնալ մատրիցների չվերասերվածությունը:

**Թեորեմ 3.3.4 :**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  մատրիցը օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա սյունակները կազմում են օրթոնորմալ վեկտորների համակարգ  $\mathbb{R}^n$  տարածությունում:

Ապացույց: Դիցուք  $A$  մատրիցի սյունակներն են՝  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ : Թեորեմի պնդումը անմիջապես բխում է

$$(A^T A)_{ji} = A^{(j)T} A^{(i)} = (A^{(i)}, A^{(j)}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

հավասարություններից:  $\square$

Որպես ապացուցված թեորեմի և 3.3.9 լեմմայի ակնհայտ հետևանք ստանում ենք համանման պնդում մատրիցի տողերի վերաբերյալ:

**Թեորեմ 3.3.5 :**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  մատրիցը օրթոգոնալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերը կազմում են օրթոնորմալ վեկտորների համակարգ  $\mathbb{R}^n$  տարածությունում:

Բերենք հաշվողական գծային հանրահաշվում լայնորեն կիրառվող օրթոգոնալ մատրիցների օրինակներ:

- Տեղափոխության մատրիցներ

Այդպես անվանում են մատրիցները, որոնց յուրաքանչյուր տող և յուրաքանչյուր սյունակ պարունակում է ճիշտ մեկ միավոր, մինչդեռ մնացած բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի: Օրինակ՝

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

Փաստորեն տեղափոխության մատրիցը միավոր մատրիցի տողերի (կամ սյունակների) տեղափոխության արդյունք է: Նշենք նաև, որ այդպիսի մատրիցները իրենց անունը ստացել են հետևյալ հեշտ ապացուցվող պնդման պատճառով:

**Լեմմա 3.3.13 :** *Կամայական մատրիցի բազմապատկման արդյունքը աջից (ձախից) տեղափոխության մատրիցով համարժեք է նրա համապատասխան սյունակների (տողերի) տեղափոխությանը:*

Լուսաբանենք վերջին լեմման օրինակով: Բազմապատկելով

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

մատրիցը աջից և ձախից վերը բերված տեղափոխության մատրիցով՝ կատանանք.

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 5 & 7 \\ 12 & 10 & 9 & 11 \\ 16 & 14 & 13 & 15 \end{bmatrix},$$

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} :$$

Ակնհայտ է հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 3.3.14 :** *Տեղափոխության մատրիցների արտադրյալը դարձյալ տեղափոխության մատրից է:*

Տեղափոխության մատրիցների բազմության մեջ հատուկ առանձնացնենք այսպես կոչված *տեղափոխության տարրական*  $P_{ij}$  մատրիցները, որոնք ստացվում են միավոր մատրիցից՝ նրա  $i$ -րդ և  $j$ -րդ տողերի տեղափոխության արդյունքում:

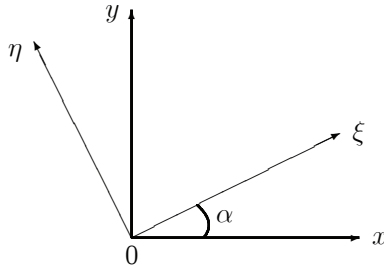
- Պտտման մատրիցներ

Պտտման մատրից անվանում են

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & c & \dots & -s & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & s & \dots & c & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (3.3.5)$$

մատրիցը, որը տարբերվում է միավոր մատրիցից ընդամենը չորս տարրերով՝ զետեղված  $i$  և  $j$  համարներով տողերի և սյունակների հատման տեղերում, որտեղ  $c^2 + s^2 = 1$ : Վերջին պայմանը թույլ է տալիս  $c$  և  $s$  մեծությունները մեկնաբանել որպես ինչ-որ  $\alpha$  անկյան կոսինուս և սինուս՝  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ :

Օրինակ, դիտարկենք  $(x, y)$  կոորդինատական համակարգի պտույտը  $\alpha$  անկյամբ, ինչը հանգեցնում է  $(\xi, \eta)$  նոր կոորդինատական համակարգի՝ ինչպես ցույց է տրված նկ. 3.3.1-ում:



**Նկ. 3.3.1** Կոորդինատական համակարգի պտույտը

Մեկ կոորդինատական համակարգից մյուսին անցումը կատարվում է ըստ հետևյալ բանաձևերի.

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ \eta &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha : \end{aligned}$$

Համապատասխանաբար, ձևափոխության մատրիցն է՝

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} :$$

Ավելի բարձր չափողականության տարածություններում (3.3.5) մատրիցով արտահայտվող ձևափոխությունը երկրաչափորեն նշանակում է  $\alpha$  անկյամբ պտույտ  $i$  և  $j$  ինդեքսներով որոշվող հարթության մեջ, երբ մնացած կոորդինատական առանցքները մնում են անփոփոխ: Ուստի (3.3.5) տիպի մատրիցները անվանում են նաև *հարթ պտույտների մատրիցներ*:

• Արտացոլման մատրիցներ

Դիցուք  $L$ -ը  $n$ -չափանի գծային տարածություն է: Այդ տարածության յուրաքանչյուր  $(n - 1)$ -չափանի ենթատարածություն անվանում են *հիպերհարթություն*:

Դիտարկենք  $\mathbf{R}^n$  վեկտորական տարածության մեջ ինչ-որ  $\Gamma$  հիպերհարթություն: Պարզ է, որ այդ հիպերհարթությունը միարժեքորեն որոշվում է  $w$  նորմալ վեկտորով՝

$$w^T x = 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad w^T w = 1 \tag{3.3.6}$$

(տե՛ս նկ. 3.3.2): Նշենք, որ այստեղ հարմար է օգտագործել սկալյար արտադրյալի (3.1.9) գրառումը:

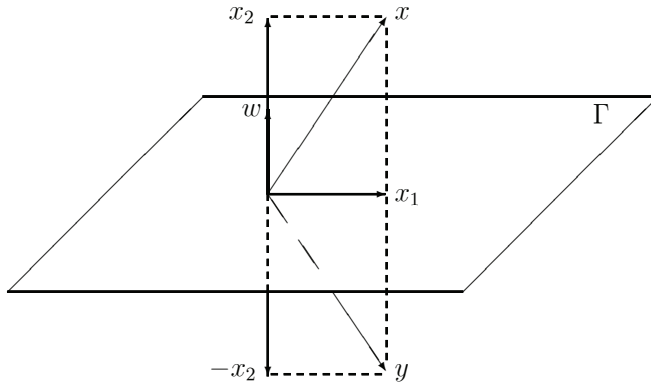
Վերցնենք կամայական  $x \in \mathbf{R}^n$  վեկտոր և ներկայացնենք այն

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \Gamma, \quad x_2 \perp \Gamma \tag{3.3.7}$$

գումարի տեսքով: Այնուհետև սահմանենք

$$y = x_1 - x_2 \tag{3.3.8}$$

վեկտորը, որը կոդիրարկենք որպես  $x$  վեկտորի *արտացոլում*  $\Gamma$  հիպերհարթության նկատմամբ (նկ. 3.3.2): Գտնենք այդ ձևափոխության մատրիցը:



**Նկ. 3.3.2** Արտացոլում  $\Gamma$  հիպերհարթության նկատմամբ

Ինչպես հետևում է (3.3.7) և (3.3.8)-ից՝

$$y = x - 2x_2 : \tag{3.3.9}$$

Պարզ է, որ

$$x_2 = w\alpha ,$$

որտեղ  $\alpha$ -ն ինչ-որ իրական թիվ է: Բազմապատկելով վերջին հավասարության երկու կողմը ձախից  $w^T$ -ով և հաշվի առնելով  $w$  վեկտորի նորմավորվածությունը՝ կստանանք

$$w^T x_2 = w^T w\alpha = \alpha :$$

Ուստի

$$x_2 = w w^T x_2 :$$

Այնուհետև, քանի որ  $w$  վեկտորը օրթոգոնալ է  $\Gamma$  հիպերհարթությանը (տե՛ս (3.3.6)-ը), ունենք

$$w^T x = w^T (x_1 + x_2) = w^T x_1 + w^T x_2 = w^T x_2 :$$

Այսպիսով՝

$$x_2 = w w^T x :$$



Տեղադրելով  $x_2$  վեկտորի այս ներկայացումը (3.3.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$y = (I - 2ww^T)x :$$

Դրանով որոշվում է

$$y = Hx \quad (3.3.10)$$

արտացոլումը, որում հանդես է գալիս

$$H = I - 2ww^T \quad (3.3.11)$$

*արտացոլման մատրիցը:*

Հեշտ է տեսնել, որ  $H$  մատրիցը սիմետրիկ է և օրթոգոնալ: Իրոք,

$$H^2 = (I - 2ww^T)(I - 2ww^T) = I - 4ww^T + 4ww^Tww^T = I - 4ww^T + 4ww^T = I :$$

Հետևաբար՝

$$H = H^T = H^{-1} :$$

### 3.3.4 Նման մատրիցներ

**Սահմանում 3.3.5 :**  $A$  և  $B$  մատրիցները կոչվում են *նման* և գրվում է  $A \sim B$ , եթե գոյություն ունի այնպիսի չվերասերված  $S$  մատրից, որ  $B = S^{-1}AS$ :

Նշենք նման մատրիցների մեկ կարևոր հատկություն:

**Թեորեմ 3.3.6 :** *Նման մատրիցների սեփական արժեքները նույն են:*

Ապացույց: Դիցուք  $B = S^{-1}AS$ : Ունենք

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - S^{-1}AS) = \det[S^{-1}(\lambda I - A)S] = \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det S = \det(\lambda I - A) : \end{aligned}$$

Քանի որ համընկնում են  $A$  և  $B$  մատրիցների բնութագրիչ բազմանդամները, ապա համընկնում են նաև դրանց սեփական արժեքները:  $\square$

## 3.4 Վեկտորների և մատրիցների նորմեր

Գծային հանրահաշվի թվային մեթոդների վերլուծության և գնահատման ընթացքում անհրաժեշտ են վեկտորների և մատրիցների նորմերը: Սույն պարագրաֆում տրվում են այդ հիմնական հասկացությունները:

### 3.4.1 Վեկտորի նորմ

**Սահմանում 3.4.1 :**  $\|x\|$  իրական թիվը կոչվում է  $x \in \mathbf{C}^n$  (կամ  $x \in \mathbf{R}^n$ ) վեկտորի *նորմ*, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\begin{aligned} \text{VN1.} \quad & \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}, \\ \text{VN2.} \quad & \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \\ \text{VN3.} \quad & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| : \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Վեկտորական տարածությունում նորմը կարող է ներմուծվել տարբեր եղանակներով: Առավել գործածելի են հետևյալ նորմերը.

$$l_\infty\text{-նորմ} : \quad \|x\|_\infty \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (3.4.2)$$

$$l_1\text{-նորմ} : \quad \|x\|_1 \equiv \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (3.4.3)$$

$$l_2\text{-նորմ} : \quad \|x\|_2 \equiv \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} : \quad (3.4.4)$$

Հեշտ է նկատել  $l_2$ -նորմի կապը սկալյար արտադրյալի հետ.

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} : \quad (3.4.5)$$

Ինչո՞վ են պայմանավորված (3.4.2)–(3.4.4) նորմերի նշանակումները: Բանն այն է, որ այդ նորմերը

$$\|x\|_p \equiv \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (3.4.6)$$

Հյուդերի  $l_p$ -նորմի մասնավոր դեպքերն են: Գա ակնհայտ է  $l_1$ - և  $l_2$ - նորմերի համար: Ինչ վերաբերում է  $l_\infty$ -նորմին, ապա այն  $l_p$ -նորմի սահմանային դեպքն է, երբ  $p \rightarrow \infty$ : Իրոք, յուրաքանչյուր  $x \in \mathbf{C}^n$  վեկտորի համար տեղի ունեն

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

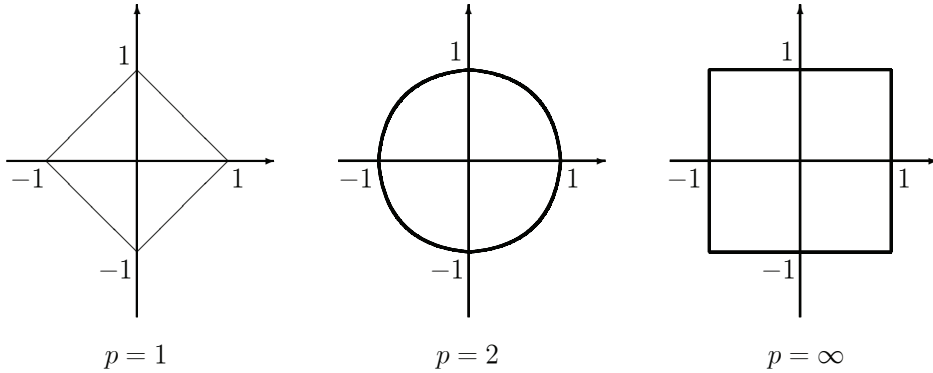
անհավասարությունները: Վերջինից հետևում է, որ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty :$$

Նորմերի մասին ակնառու պատկերացում է տալիս

$$S = \{x : \|x\| = 1\}$$

բազմությունը, որը կոչվում է *միավոր սֆերա*: Նկ. 3.4.1-ում  $\mathbf{R}^2$  տարածության դեպքում ցույց են տրված միավոր սֆերաները  $l_\infty$ -,  $l_1$ - և  $l_2$ - նորմերի համար:



**Նկ. 3.4.1**  $\mathbb{R}^2$  տարածության միավոր սֆերաները  $l_p$ -նորմերի համար ( $p = \infty, 1, 2$ )

### 3.4.2 Մատրիցի նորմ

**Սահմանում 3.4.2 :**  $\|A\|$  իրական քիվը կոչվում է  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (կամ  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) մատրիցի *նորմ*, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

- MN1.**  $\|A\| \geq 0$ ,  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$ ,
- MN2.**  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ,
- MN3.**  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
- MN4.**  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  :

Որպես մատրիցային նորմի օրինակ կարելի է բերել այսպես կոչված *Ֆրոբենիուսի նորմը*.

$$\|A\|_F \equiv \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \tag{3.4.8}$$

(տե՛ս, օրինակ, [61]):

Ներկայացնենք մատրիցային նորմի տրման կարևորագույն եղանակներից մեկը:  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (կամ  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) մատրիցի *օպերատորային նորմը* սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\|A\| \equiv \max_{\|x\|=1} \|Ax\| : \tag{3.4.9}$$

Ասում են նաև, որ (3.4.9) մատրիցային նորմը *ստորադրված* է  $\|\cdot\|$  վեկտորական նորմին:

**Գիտողություն 3.4.1 :** *Օպերատորային նորմի (3.4.9) սահմանման մեջ լիովին արդարացված է  $\max$ -ի օգտագործումը  $\sup$ -ի փոխարեն, քանի որ  $\|Ax\|$ -ը, որպես ֆունկցիա  $x$ -ից, անընդհատ է  $S = \{x : \|x\| = 1\}$  միավոր սֆերայի վրա, որը փակ սահմանափակ բազմություն է  $n$ -չափանի վեկտորական տարածությունում (տե՛ս, օրինակ՝ [14, 67]):*

Օպերատորային նորմը կարելի է սահմանել մի այլ համարժեք եղանակով.

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \quad (3.4.10)$$

Մենք թողնում ենք (3.4.9) և (3.4.10) սահմանումների համարժեքության ապացույցը ընթերցողին որպես վարժություն:

Մատրիցի օպերատորային նորմը օժտված է հետևյալ երկու հատկություններով.

$$1. \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbf{C}^n, \quad (3.4.11)$$

$$2. \|I\| = 1 : \quad (3.4.12)$$

Նշենք, որ (3.4.8) Ֆրոբենիուսի նորմը օպերատորային նորմ չէ: Իրոք,  $\|I\|_F = \sqrt{n}$ , ինչը հակասում է (3.4.12) հատկությանը:

Ասում են, որ  $\|\cdot\|_M$  մատրիցային նորմը *համաձայնեցված է*  $\|\cdot\|_v$  վեկտորական նորմի հետ, եթե ցանկացած  $A$  մատրիցի և ցանկացած  $x$  վեկտորի համար տեղի ունի

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v \quad (3.4.13)$$

անհավասարությունը: Ապացուցված է, որ ցանկացած մատրիցային նորմ համաձայնեցված է մի որևէ վեկտորական նորմի հետ (տե՛ս, օրինակ՝ [67]):

Վերը սահմանվել են  $l_\infty$ -,  $l_1$ - և  $l_2$ - վեկտորական նորմերը ((3.4.2)–(3.4.4) բանաձևերը): Ստանանք այդ նորմերին ստորադրված մատրիցային նորմերը:

- $l_\infty$ -նորմ:

Ցանկացած  $x$  նորմավորված վեկտորի համար ( $\|x\|_\infty = 1$ ) ունենք

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| :$$

Այստեղից ստանում ենք  $\|A\|_\infty$  նորմի վերին գնահատականը.

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : \quad (3.4.14)$$

Դիցուք

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|, \quad 1 \leq i_0 \leq n :$$

Սահմանենք  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$  վեկտորի բաղադրիչները հետևյալ կերպ.

$$z_j = \begin{cases} |a_{i_0 j}| / a_{i_0 j}, & \text{երբ } a_{i_0 j} \neq 0, \\ 1, & \text{երբ } a_{i_0 j} = 0: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ  $\|z\|_\infty = 1$  : Հաշվի առնելով մատրիցի նորմի (3.4.9) սահմանումը կարող ենք գնահատել նորմը ներքևից.

$$\|A\|_\infty \geq \|Az\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} z_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : \quad (3.4.15)$$

Այսպիսով, (3.4.14) և (3.4.15) գնահատականներից ստանում ենք

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3.4.16)$$

արտահայտությունը:

- $l_1$ -նորմ:

Վերցնենք կամայական  $x$  նորմավորված վեկտոր ( $\|x\|_1 = 1$ ): Ունենք

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \end{aligned}$$

Վերջինից հետևում է  $\|A\|_1$  նորմի վերին գնահատականը.

$$\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \quad (3.4.17)$$

Մյուս կողմից, դիցուք

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{i j_0}|, \quad 1 \leq j_0 \leq n :$$

Ընտրենք  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$  վեկտորը հետևյալ կերպ.

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{երբ } j = j_0, \\ 0, & \text{երբ } j \neq j_0: \end{cases}$$

Պարզ է, որ  $\|z\|_1 = 1$ : Ելնելով մատրիցի նորմի (3.4.9) սահմանումից, կստանանք  $\|A\|_1$  նորմի ստորին գնահատականը.

$$\|A\|_1 \geq \|Az\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| = \sum_{i=1}^n |a_{i j_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : \quad (3.4.18)$$

Համեմատելով (3.4.17) և (3.4.18) գնահատականները, ստանում ենք

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (3.4.19)$$

արտահայտությունը:

- $l_2$ -նորմ:

Ըստ 3.3.4 և 3.3.8 լեմմաների՝  $A^T A$  մատրիցը սիմետրիկ է և դրական կիսատրոշյալ: Ուստի այդ մատրիցի սեփական արժեքները իրական են և ոչ բացասական (տե՛ս 3.3.2 և 3.3.6 լեմմաները): Հաշվի առնելով (3.4.5) առնչությունը, մատրիցի նորմի (3.4.10) սահմանումից կատանանք.

$$\|A\|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)} = \max_{x \neq 0} \frac{(A^T A x, x)}{(x, x)} = \lambda_{\max}(A^T A)$$

(տե՛ս (3.3.2) հավասարություններից երկրորդը): Այսպիսով,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} : \quad (3.4.20)$$

Եթե  $A$ -ն սիմետրիկ մատրից է, ապա

$$\lambda_{\max}(A^T A) = \lambda_{\max}(A^2) = (\max |\lambda(A)|)^2$$

(տե՛ս լեմմա 3.2.3): Ուստի

$$\|A\|_2 = \sqrt{(\max |\lambda(A)|)^2} = \max |\lambda(A)|$$

կամ

$$\|A\|_2 = \rho(A), \quad (3.4.21)$$

որտեղ  $\rho(A)$ -ն մատրիցի սպեկտրալ շառավիղն է (տե՛ս (3.2.8)-ը):

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.4.1 :** *Մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը չի գերազանցում այդ մատրիցի ցանկացած նորմը, այսինքն՝*

$$\rho(A) \leq \|A\| : \quad (3.4.22)$$

Ապացույց: Գիցուք  $\lambda$ -ն  $A$  մատրիցի սեփական արժեքն է.

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 : \quad (3.4.23)$$

Սահմանենք  $n \times n$  չափսի

$$B = [x \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]$$

մատրիցը ( $\mathbf{0}$ -ն՝ զրոյական վեկտոր-սյունակն է): Այդ դեպքում (3.4.23) հավասարությունը կարելի է գրել

$$AB = \lambda B$$

տեսքով: Այստեղից, օգտագործելով մատրիցային նորմի **MN2** և **MN4** հատկությունները (տե՛ս (3.4.7)-ը), կստանանք.

$$|\lambda| \|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \|B\| :$$

Իսկ քանի որ  $B \neq 0$ , ապա

$$|\lambda| \leq \|A\|,$$

որտեղից էլ անմիջապես հետևում է (3.4.22) անհավասարությունը:  $\square$

### 3.5 Զուգամիտությունն նորմավորված տարածություններում

Նորմավորված տարածությունների տեսության կարևորագույն հասկացություններից է նորմերի *համարժեքությունը*: Տանք այդ գաղափարը:

**Սահմանում 3.5.1 :**  $L$  գծային տարածության մեջ որոշված երկու  $\|\cdot\|_{(1)}$  և  $\|\cdot\|_{(2)}$  նորմերը կոչվում են *համարժեք*, եթե գոյություն ունեն  $c_1$  և  $c_2$  դրական հաստատուններ այնպիսիք, որ

$$c_1\|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)} \leq c_2\|x\|_{(1)} \quad \forall x \in L : \quad (3.5.1)$$

Հետևյալ պնդումը արձանագրում է վերջավոր չափանի տարածությունների կարևոր հատկությունը (տե՛ս, օրինակ՝ [29, 14]):

**Թեորեմ 3.5.1 :** *Կամայական վերջավոր չափանի տարածությունում ցանկացած երկու նորմ համարժեք են:*

Մեկ այլ կարևոր հասկացությունը *զուգամիտությունն* է:

**Սահմանում 3.5.2 :** Կասենք, որ  $\mathbb{C}^n$  տարածության  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  վեկտորների հաջորդականությունը *զուգամիտում* է  $x \in \mathbb{C}^n$  վեկտորին ըստ  $\|\cdot\|$  նորմի, եթե

$$\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Քանի որ  $\mathbb{C}^n$  վեկտորական տարածության մեջ սահմանված նորմերը համարժեք են, ապա ըստ որևէ մի նորմի զուգամիտությունից հետևում է զուգամիտություն ըստ մեկ այլ նորմի, և հակառակը: Նկատի ունենալով սա՝ վեկտորների հաջորդականության զուգամիտությունը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ ձևով.

**Սահմանում 3.5.3 :** Կասենք, որ  $\mathbb{C}^n$  տարածության  $\{x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T\}_{k=1}^{\infty}$  վեկտորների հաջորդականությունը զուգամիտում է  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$  վեկտորին, եթե

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Զուգամիտության այսպիսի սահմանումները տարածվում են նաև մատրիցների վրա:

**Սահմանում 3.5.4 :** Կասենք, որ  $\mathbb{C}^{n \times n}$  տարածության  $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  մատրիցների հաջորդականությունը *զուգամիտում* է  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցին, եթե մի որևէ  $\|\cdot\|$  մատրիցային նորմում

$$\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Զուգամիտության համարժեք սահմանումը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

**Սահմանում 3.5.5 :** Կասենք, որ  $\mathbb{C}^{n \times n}$  տարածության  $\{A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}\}_{k=1}^{\infty}$  մատրիցների հաջորդականությունը *զուգամիտում* է  $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցին, եթե

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n :$$

Այժմ դիտարկենք աստիճանային մատրիցային շարք

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad (3.5.2)$$

որն անվանում են նաև *Նեյմանի շարք*: Շարքը կոչվում է *գուգամետ*, եթե գուգամետ է նրա մասնական գումարների հաջորդականությունը.

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^m A^k, \quad m = 0, 1, 2, \dots :$$

Այդ դեպքում որպես շարքի գումար հասկացվում է մասնական գումարների հաջորդականության սահմանը.

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) : \quad (3.5.3)$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.5.2 :** *Որպեսզի Նեյմանի շարքը լինի գուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\rho(A) < 1$  : Ընդ որում՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} : \quad (3.5.4)$$

Ապացույց: Մատրիցների տեսությունում ապացուցվում է, որ կանայական  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրից նմանության ձևափոխությամբ կարելի է բերել *ժորդանյան կանոնական տեսքի* (տե՛ս, օրինակ՝ [16, 32, 33]): Այսինքն՝ գոյություն ունի  $T$  չվերասերված մատրից այնպիսին, որ

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix} : \quad (3.5.5)$$

Ընդ որում՝  $n_i \times n_i$  չափի  $J_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) *ժորդանյան վանդակը* համապատասխանում է  $A$  մատրիցի ինչ-որ  $\lambda_i$  սեփական արժեքի և ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} : \quad (3.5.6)$$

Նշենք, որ (3.5.5) ժորդանի կանոնական տեսքում ներկայացված են  $A$  մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները:

Քանի որ  $A = TJT^{-1}$ , ապա

$$S_m(A) = S_m(TJT^{-1}) = TS_m(J)T^{-1} :$$



Վերջինից հետևում է, որ  $S_m(A)$  հաջորդականության զուգամիտությունը հավասարագոր է  $S_m(J)$  հաջորդականության զուգամիտությանը: Համաձայն  $J$  մատրիցի (3.5.5) վանդակային կառուցվածքի՝

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_r^k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots :$$

Ուստի

$$S_m(J) = \begin{bmatrix} S_m(J_1) & & & \\ & S_m(J_2) & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & S_m(J_r) \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով,  $S_m(J)$  հաջորդականության զուգամիտությունը հավասարագոր է  $S_m(J_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$  հաջորդականությունների զուգամիտությանը:

Հաշվի առնելով  $J_i$  մատրիցի (3.5.6) տեսքը՝ ունենք

$$J_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}, \quad J_i^3 = \begin{bmatrix} \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i \\ 0 & & & & & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 \\ & & & & & & \lambda_i^3 \end{bmatrix},$$

և այսպես շարունակ: Կիրառելով ինդուկցիա՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ  $m > n_i$  դեպքում

$$J_i^m = \begin{bmatrix} \lambda_i^m & C_m^1 \lambda_i^{m-1} & C_m^2 \lambda_i^{m-2} & \dots & C_m^{n_i-1} \lambda_i^{m-n_i+1} \\ & \lambda_i^m & C_m^1 \lambda_i^{m-1} & \dots & C_m^{n_i-2} \lambda_i^{m-n_i+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \lambda_i^m & C_m^1 \lambda_i^{m-1} \\ & & & & \lambda_i^m \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով,

$$S_m(J_i) = \begin{bmatrix} S_m(\lambda_i) & S'_m(\lambda_i) & \frac{1}{2!} S''_m(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(n_i-1)!} S_m^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & S_m(\lambda_i) & S'_m(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(n_i-2)!} S_m^{(n_i-2)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & S_m(\lambda_i) & S'_m(\lambda_i) \\ & & & & S_m(\lambda_i) \end{bmatrix},$$

որտեղ

$$S_m(\lambda_i) = \sum_{k=0}^m \lambda_i^k :$$

Որպեսզի  $S_m(J_i)$  հաջորդականությունը զուգամիտի, երբ  $m \rightarrow \infty$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամիտեն

$$S_m(\lambda_i), S'_m(\lambda_i), \dots, S_m^{(n_i-1)}(\lambda_i)$$

հաջորդականությունները: Իսկ դա տեղի կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\lambda_i$  սեփական արժեքներն ընկած լինեն

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության շրջանի ներսում, այսինքն՝ երբ  $|\lambda_i| < 1$  (տե՛ս [62]): Գրանով թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Դիցուք (3.5.2) շարքը զուգամետ է: Ճիշտ է

$$(I - A)S_m(A) = I - A^{m+1}$$

հավասարությունը: Այստեղից

$$S_m(A) = (I - A)^{-1}(I - A^{m+1}) :$$

Անցնելով սահմանի, երբ  $m \rightarrow \infty$ , կստանանք

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) = (I - A)^{-1}(I - \lim_{m \rightarrow \infty} A^{m+1}) :$$

Քանի որ (3.5.2) շարքը զուգամետ է, ապա  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^{m+1} = 0$ : Հետևաբար՝

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(A) = (I - A)^{-1} :$$

Նշենք, որ  $(I - A)^{-1}$  մատրիցը գոյություն ունի, քանի որ  $\det(I - A) \neq 0$  (հակառակ դեպքում  $\lambda = 1$  թիվը կլիներ  $A$  մատրիցի սեփական արժեք, ինչը կհակասեր Նեյմանի շարքի զուգամիտությանը):  $\square$

Որպես 3.5.2 և 3.4.1 թեորեմների պարզ հետևանք ստանում ենք աստիճանային մատրիցային շարքի զուգամիտության հետևյալ բավարար պայմանը.

**Թեորեմ 3.5.3 :** Եթե  $A$  մատրիցի որևէ նորմ փոքր է մեկից, ապա Նեյմանի շարքը զուգամետ է:

Մասնավորապես, հետևյալ պայմաններից յուրաքանչյուրը բավարար է (3.5.2) շարքի զուգամիտության համար.

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, \quad (3.5.7)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1, \quad (3.5.8)$$

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < 1 : \quad (3.5.9)$$

Հաջորդ գլխում, գծային հավասարումների համակարգերի լուծման խտրացիոն մեթոդները ուսումնասիրելիս, մենք կտեսնենք, որ դրանց զուգամիտության հարցը, վերջին հաշվով, հանգում է համապատասխան աստիճանային մատրիցային շարքի զուգամիտությանը:

### Խնդիրներ և վարժություններ - 3

1. Դիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  և  $\text{rank } A = 1$ : Յույց տալ, որ այդ մատրիցը կարելի է ներկայացնել

$$A = ab^T$$

տեսքով, որտեղ  $a, b \in \mathbf{R}^n$ :

2. Ապացուցել, որ եթե  $\text{rank } A = 1$ , ապա  $A^2 = \text{tr } A \cdot A$ :
3. Ապացուցել, որ  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը զրոյական է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\text{tr}(AA^T) = 0$ :
4. Գտնելով համապատասխան  $3 \times 3$  չափսի  $A$  մատրից՝ ներկայացնել հետևյալ քառակուսային ձևերը  $x^T A x$  տեսքով.

ա)  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_1x_3,$

բ)  $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 4x_2x_3 - 6x_1x_3 :$

5. Գտնել

$$X = AX + B$$

հավասարման լուծումը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} :$$

6. Դիցուք  $A$  քառակուսի մատրիցը այնպիսին է, որ  $(I - A)$ -ն չվերասերված է: Ապացուցել, որ

$$A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A :$$

7. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել  $A^{300}$ :

8. Դիցուք  $A$ ,  $B$  և  $C$  համապատասխանաբար  $m \times m$ ,  $n \times n$  և  $m \times n$  չափի մատրիցներ են, ընդ որում  $A$  և  $B$  մատրիցները չվերասերված են: Յույց տալ, որ

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} :$$

9. Դիցուք  $M$  մատրիցը տրված է

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ  $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , իսկ  $I$ -ն միավոր մատրից է: Ապացուցել, որ եթե  $\det(A - BC) \neq 0$ , ապա  $M$  մատրիցը չվերասերված է:

10. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը:

11. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել  $B = A^2 - 3A + 2I$  մատրիցի սեփական արժեքները:

12.  $U \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են 1-ի: Գտնել այդ մատրիցի սեփական արժեքները:

13. Ապացուցել, ու կամայական  $A$  և  $B$  քառակուսի մատրիցների համար  $AB$  և  $BA$  մատրիցների սպեկտրները համընկնում են:
14. Յույց տալ, որ  $A$  և  $B$  սիմետրիկ մատրիցների արտադրյալը սիմետրիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $AB = BA$ :
15. Ապացուցել, որ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքների համար տեղի ունեն

$$\lambda_{max} \geq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, \quad \lambda_{min} \leq \min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$$

անհավասարությունները:

16.  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը կոչվում է *շեղսիմետրիկ*, եթե  $A^T = -A$ : Ապացուցել, որ կամայական  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրից կարելի է միարժեքորեն ներկայացնել սիմետրիկ և շեղսիմետրիկ մատրիցների գումարի տեսքով:
17. Ապացուցել, որ եթե  $A = A^T > 0$  և  $B = B^T$ , ապա  $AB$  մատրիցի սեփական արժեքներն իրական են:
18. Ապացուցել, որ եթե  $A = A^T > 0$  և  $B = B^T > 0$ , ապա  $AB$  մատրիցի սեփական արժեքները դրական են:
19. Գտնել  $a$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշյալ է:

20. Ապացուցել, որ

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2.5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 4.5 & 5 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & \frac{4n-3}{2} \end{bmatrix}$$

մատրիցը դրական որոշյալ է:

21.  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերը տրվում են  $a_{ij} = \min\{i, j\}$  բանաձևով: Ապացուցել, որ այդ մատրիցը դրական որոշյալ է:
22. Դիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը սիմետրիկ է: Ապացուցել, որ  $I + \varepsilon A$  մատրիցը բավականաչափ փոքր  $\varepsilon$  թվի համար դրական որոշյալ է:

23. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Ցույց տալ, որ  $(Ax, x) > 0$  ցանկացած  $x \neq 0$  վեկտորի համար, սակայն այդ մատրիցը ունի կոմպլեքս սեփական արժեքներ:

24. Դիցուք  $A = A^T \geq 0$ : Ապացուցել, որ եթե այդ մատրիցի որևէ անկյունագծային տարր հավասար է զրոյի, ապա զրոյական են համապատասխան տողի և սյունակի բոլոր տարրերը:

25. Գտնել օրթոգոնալ մատրից, որի առաջին երկու սյունակները հետևյալն են.

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

26. Ապացուցել, որ ցանկացած  $x, y \in \mathbb{C}^n$  վեկտորների համար ճիշտ է

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

անհավասարությունը:

27. Տրված են  $x$  և  $y \neq 0$  վեկտորները: Ցույց տալ, որ

$$\min_{\alpha} \|x - \alpha y\|_2 = \|x - \alpha_0 y\|_2,$$

որտեղ  $\alpha_0 = (x, y) / \|y\|_2$ , ընդ որում  $x - \alpha_0 y$  և  $y$  վեկտորները օրթոգոնալ են:

28. Ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

$$\text{ա) } \|x\|_{\infty} = \max_{\|y\|_1=1} |x^T y|,$$

$$\text{բ) } \|x\|_1 = \max_{\|y\|_{\infty}=1} |x^T y| :$$

29. Հետևյալ արտահայտություններից որո՞նք են առաջադրում վեկտորական նորմ  $\mathbb{C}^n$  տարածությունում.

$$\text{ա) } \max\{|x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\},$$

$$\text{բ) } \max\{|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|\},$$

$$\text{գ) } \sum_{i=1}^n |x_i|^3 :$$

30. Ցույց տալ, որ  $|x_1 - x_2| + |x_2|$  արտահայտությունը առաջադրում է նորմ  $\mathbb{R}^2$  տարածությունում: Պատկերել այդ նորմին համապատասխանող միավոր գունդը:

31. Ապացուցել, որ  $(2, 2), (-2, -2), (1, -1)$  և  $(-1, 1)$  գազաթներով զուգահեռագիծը միավոր գունդ է  $\mathbf{R}^2$  տարածության մի որոշ նորմում: Գտնել այդ նորմը:
32. Ապացուցել, որ  $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0), (1, 1)$  և  $(-1, -1)$  գազաթներով բազմանկյունը միավոր գունդ է  $\mathbf{R}^2$  տարածության մի որոշ նորմում: Գտնել այդ նորմը:
33. Գիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  դրական որոշյալ մատրից է: Ցույց տալ, որ

$$\|x\| = \sqrt{(Ax, x)}$$

իրոք նորմ է  $\mathbf{R}^n$  վեկտորական տարածությունում: Ի՞նչ է իրենից ներկայացնում միավոր գունդը այդ նորմում, երբ  $n = 2$ :

34. Տրված են  $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  թվերը: Ապացուցել, որ

$$\max_{1 \leq i \leq n} (d_i |x_i|)$$

արտահայտությունը  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$  վեկտորի նորմ է: Գտնել այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը:

35. Տրված են  $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  թվերը: Ապացուցել, որ

$$\sum_{i=1}^n d_i |x_i|$$

արտահայտությունը  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$  վեկտորի նորմ է: Գտնել այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը:

36. Տրված են  $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  թվերը: Ապացուցել, որ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i |x_i|^2}$$

արտահայտությունը  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$  վեկտորի նորմ է: Գտնել այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմը:

37. Ապացուցել, որ

$$n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

արտահայտությունը առաջադրում է նորմ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցների տարածությունում:

38. Ցույց տալ, որ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցների համար  $\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$  արտահայտությունը մատրիցային նորմ չէ:

39. Ապացուցել վեկտորական նորմների համարժեքության հետևյալ առնչությունները.

$$\text{ա) } \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty,$$

$$\text{բ) } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty,$$

$$\text{գ) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 :$$

40. Ապացուցել մատրիցային նորմների համարժեքության հետևյալ առնչությունները.

$$\text{ա) } \frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty, \quad \text{բ) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_F,$$

$$\text{գ) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad \text{դ) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F,$$

$$\text{ե) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad \text{զ) } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F :$$

41. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ :

42. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Հաշվել  $A^k$  և  $\rho(A^k)$ , երբ  $k \geq 2$ : Ցույց տալ, որ  $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ : Հետազոտել  $A^k$  մատրիցի տարրերի և  $\|A^k\|_\infty$ ,  $\|A^k\|_1$ ,  $\|A^k\|_2$  մեծությունների վարքը, երբ  $k \rightarrow \infty$ :

43. Ապացուցել, որ եթե որևէ օպերատորային նորմում  $\|A\| < 1$ , ապա

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} :$$

44. Դիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն այնպիսին է, որ

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

և  $a_{ij} < 0$ , եթե  $i \neq j$ : Ապացուցել, որ  $A^{-1}$  մատրիցի տարրերը դրական են:



## Գլուխ 4

# ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

### 4.1 Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգեր

Շատ գործնական խնդիրներ բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծմանը: Ամենայն վստահությամբ կարելի է ասել, որ գծային հանրահաշվական համակարգերի լուծումը հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն խնդիրներից է:

Դիտարկենք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Ենթադրվում է, որ համակարգի  $a_{ij}$  գործակիցները և  $b_i$  ազատ անդամները իրական թվեր են: Դիցուք

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում (4.1.1) համակարգը կարելի է գրել

$$Ax = b \quad (4.1.2)$$

հավասարման տեսքով: Հայտնի է, որ (4.1.2) հավասարումն ունի միակ լուծում ցանկացած  $b$  աջ մասի համար, այն է՝

$$x = A^{-1}b, \quad (4.1.3)$$

եթե  $A$  մատրիցը չվերասերված է (տե՛ս [11, 32]): Սակայն (4.1.3) բանաձևով թվային լուծում փնտրելը շատ անարդյունավետ մոտեցում է, քանի որ հակադարձ մատրից գտնելը անհամեմատ ավելի աշխատատար խնդիր է, քան գծային հավասարումների համակարգի լուծումը (տե՛ս ստորև 4.14 պարագրաֆը):

Գծային հանրահաշվի դասագրքերում արտաձվում է հակադարձ մատրիցի

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

տեսքը, որտեղ  $\Delta = \det A$ , իսկ  $A_{ij}$ -ն  $A$  մատրիցի  $a_{ij}$  տարրի հանրահաշվական լրացումն է (տե՛ս [11, 32]): Օգտվելով (4.1.4) ներկայացումից՝ (4.1.3)-ից կարելի է ստանալ (4.1.1) համակարգի անհայտների որոշման

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.5)$$

բանաձևը, որտեղ  $\Delta_i$ -ն այն որոշիչն է, որն ստացվում է  $\Delta$ -ից՝ նրա  $i$ -րդ սյունակը փոխարինելով ազատ անդամների սյունակով: (4.1.5) բանաձևը հայտնի է որպես *Կրամերի բանաձև*: Ընդգծենք, որ այդ բանաձևն ունի մեծ տեսական նշանակություն, սակայն գործնականում կիրառելի չէ, քանի որ պահանջում է հսկայական թվով թվաբանական գործողություններ: Իրոք, (4.1.5) բանաձևի օգտագործումը ենթադրում է  $n$ -րդ կարգի  $n + 1$  հատ որոշիչի հաշվում: Մեկ որոշիչի հաշվման համար, եթե ղեկավարվենք նրա սահմանումով, ծախսվում է  $A_{ops} \approx n \cdot n!$  թվաբանական գործողություն: Այսպես,  $n = 20$ -ի դեպքում այդ թիվը հավասար է  $20 \cdot 20!$ : Համակարգիչը, որը կատարում է  $10^9$  գործողություն վայրկյանում, կկարողանա հաշվել այդ որոշիչը **1.5 հազար տարում**: Այսպիսով, գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման համար անհրաժեշտ են անհամեմատ ավելի արդյունավետ մեթոդներ:

Գծային համակարգերի լուծման մեթոդները հիմնականում բաժանվում են երկու խմբերի՝ *ուղիղ* և *խտրացիոն մեթոդներ*: Սովորաբար *ուղիղ մեթոդ* անվանում են այն մեթոդը, որի օգնությամբ կարելի է ստանալ համակարգի ճշգրիտ լուծումը վերջավոր թվով թվաբանական գործողությունների կատարմամբ: Իհարկե, այն վերապահումով, որ բոլոր հաշվումները կատարվում են ճշգրիտ, առանց կլորացումների: Սակայն գործնականորեն դա անհնար է, և վերջնական արդյունքում սխալանքները անխուսափելի են: *Խտրացիոն մեթոդները* հաջորդական մոտարկումների մեթոդներն են: Խտրացիաները կատարվում են մինչև պահանջվող ճշտությամբ լուծում ստանալը:

Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման այս կամ այն մեթոդի ընտրությունը կախված է բազմաթիվ գործոններից՝ համակարգի կարգից, մատրիցի կառուցվածքից և այլն: Ուղիղ մեթոդները, որպես կանոն, հենվում են հետևյալ գաղափարի վրա. նախնական համակարգը վերածվում է հեշտությամբ լուծվող համարժեք համակարգի: Նկարագրենք այդպիսի համակարգերից մի քանիսը:

• **Անկյունագծային մատրիցով համակարգ.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} : \quad (4.1.6)$$

Ենթադրվում է, որ  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Ակնհայտ է, որ

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.1.7)$$

Ընդ որում՝  $A_{ops} = n$ :

• **Ստորին եռանկյուն մատրիցով համակարգ.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} : \quad (4.1.8)$$

Դիցուք  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Համակարգի անհայտները գտնվում են հաջորդաբար՝ *ուղիղ տեղադրությամբ*.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_i &= \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right) / a_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n : \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Ինչ վերաբերում է թվաբանական գործողությունների քանակին, ապա դժվար չէ հաշվել, որ  $A_{ops} = n^2$ :

• **Վերին եռանկյուն մատրիցով համակարգ.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} : \quad (4.1.10)$$

Այստեղ ևս ենթադրվում է, որ  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Անհայտները հաշվվում են *հակադարձ տեղադրությամբ*.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}, \\ x_i &= \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right) / a_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 : \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Ինչպես և ստորին եռանկյուն մատրիցների դեպքում՝  $A_{ops} = n^2$ :

## 4.2 Մատրիցի պայմանավորվածության թիվը

Միշտ չէ, որ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի գործակիցները և ազատ անդամները տրվում են ճշգրիտ: Օրինակ, որոշ դեպքերում համակարգի մուտքային տվյալները ստացվում են փորձից և այդ պատճառով պարունակում են անճշտություններ: Կամ, եթե նույնիսկ մուտքային ինֆորմացիան տրվում է անալիտիկ արտահայտություններով, համակարգչի հիշողության մեջ տվյալների գրառման ժամանակ որպես կանոն անխուսափելի են կլորացման սխալանքները: Այսպիսով, ծագում է հետևյալ հարցը. եթե համակարգի մուտքային տվյալներում թույլ են տրվում անճշտություններ, ապա որքանո՞վ է փոխվում լուծումը:

### 4.2.1 Պայմանավորվածության թվի սահմանումը և հատկությունները

Դիտարկենք

$$Ax = b \quad (4.2.1)$$

հավասարումների համակարգը, որտեղ  $\det A \neq 0$  և  $b \neq 0$ : Նախ ենթադրենք, որ  $A$  մատրիցը տրված է ճշգրիտ, իսկ  $b$ -ն ստացել է որոշակի  $\Delta b$  խտտորում: Այդ դեպքում  $\Delta x$  խտտորում կստանա նաև համակարգի լուծումը, այսինքն՝

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b : \quad (4.2.2)$$

Ինչպես հեշտ է տեսնել, (4.2.1) և (4.2.2) -ից հետևում է, որ

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b :$$

Այստեղից, ընտրելով ինչ-որ վեկտորական նորմ և ներմուծելով այդ նորմին ստորադրված մատրիցային նորմ, կստանանք

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

անհավասարությունը: Այնուհետև,

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\| :$$

Վերջին երկու անհավասարություններից կստանանք

$$\|b\| \|\Delta x\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \|x\| \|\Delta b\|$$

անհավասարությունը, որից հետևում է

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (4.2.3)$$

գնահատականը: Այժմ ներմուծենք հետևյալ հասկացությունը:

**Սահմանում 4.2.1 :**  $A$  մատրիցի *պայմանավորվածության թիվ* կոչվում է

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\| \quad (4.2.4)$$

մեծությունը:

Եթե  $A$ -ն վերասերված մատրից է, ապա ընդունում են, որ  $\kappa(A) = \infty$  :

Օգտագործելով 4.2.1 սահմանումը՝ (4.2.3) գնահատականը կգրվի

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (4.2.5)$$

տեսքով: Այստեղ  $\|\Delta b\|/\|b\|$  մեծությունը (4.2.1) հավասարման աջ մասի *հարաբերական խտտորումն է*, իսկ  $\|\Delta x\|/\|x\|$ -ը՝ լուծման *հարաբերական սխալանքը*, որն առաջացել է այդ խտտորումից:

Անկախ մատրիցային նորմի ընտրությունից՝ մատրիցի պայմանավորվածության թիվն ունի հետևյալ հեշտ ապացուցվող հատկությունները.

- $\kappa(A) \geq 1$ , (4.2.6)

- $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)$ , (4.2.7)

- $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ : (4.2.8)

Ապացուցենք, օրինակ, (4.2.6) անհավասարությունը: Համաձայն 3.4.1 թեորեմի՝

$$\|A\| \geq \max |\lambda_A| :$$

Քանի որ  $A$  և  $A^{-1}$  մատրիցների սեփական արժեքները փոխհակադարձ են (տես՝ 3.2.2), ապա

$$\|A^{-1}\| \geq \max \frac{1}{|\lambda_A|} = \frac{1}{\min |\lambda_A|} :$$

Ուստի

$$\kappa(A) \geq \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|} \geq 1 :$$

Մատրիցային  $l_p$ -նորմին համապատասխանող պայմանավորվածության թիվը այնուհետև կնշանակենք  $\kappa_p(A)$ -ով ( $p = \infty, 1$  կամ  $2$ ): Պարզվում է, որ  $\kappa_2(A)$  թիվն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

- եթե  $A = A^T$ , ապա  $\kappa_2(A) = \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|}$ , (4.2.9)

- եթե  $A = A^T > 0$ , ապա  $\kappa_2(A) = \frac{\max \lambda_A}{\min \lambda_A}$ , (4.2.10)

- եթե  $Q$ -ն օրթոգոնալ մատրից է, ապա  $\kappa_2(Q) = 1$ : (4.2.11)

Նշենք, որ (4.2.5) գնահատականը ճշգրիտ է այն իմաստով, որ անհավասարությունը որոշ դեպքերում կարող է վերածվել հավասարության: Դիցուք, օրինակ,  $A = A^T > 0$  և  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  այդ մատրիցի սեփական արժեքներն են, իսկ  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ՝ համապատասխան սեփական վեկտորները: Վերցնենք  $b = e_n$  և  $\Delta b = e_1$ : Դժվար չէ տեսնել, որ  $x = \lambda_n^{-1}e_n$ -ը (4.2.1) համակարգի ճշգրիտ լուծումն է, իսկ  $\Delta x = \lambda_1^{-1}e_1$ -ը՝ այդ լուծման խտտորումը: Այսպիսով, հաշվի առնելով (4.2.10)-ը, կստանանք

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\lambda_n \|e_1\|_2}{\lambda_1 \|e_n\|_2} = \kappa_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} :$$

Եթե մատրիցի պայմանավորվածության թիվը փոքր է, ապա սկզբնական տվյալների փոքր հարաբերական խտտորումները առաջացնում են լուծման ոչ մեծ հարաբերական փոփոխություններ: Իսկ եթե մատրիցի պայմանավորվածության թիվը մեծ է, ապա սկզբնական տվյալների փոքր խտտորումները *կարող են* բերել լուծման էական փոփոխության: Այն մատրիցները, որոնց պայմանավորվածության թիվը մեծ է, կոչվում են *վատ պայմանավորված*, իսկ եթե  $\kappa(A)$ -ն փոքր է, ապա ասում են, որ  $A$  մատրիցը *լավ պայմանավորված է*: Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը կհամարենք *լավ* կամ *վատ պայմանավորված*՝ կախված համակարգի մատրիցի *լավ* կամ *վատ* պայմանավորված լինելուց:

Պայմանավորվածության թիվը կարող է լինել շատ մեծ նույնիսկ չափազանց պարզ դեպքերում:

#### Օրինակ 4.2.1 : Դիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0$$

մատրիցը: Հակադարձ մատրիցն է՝

$$A^{-1} = \varepsilon^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 - \varepsilon \\ -1 + \varepsilon & 1 \end{bmatrix} :$$

Ունենք

$$\|A\|_{\infty} = 2 + \varepsilon, \quad \|A^{-1}\|_{\infty} = \varepsilon^{-2}(2 + \varepsilon) :$$

Հետևաբար՝

$$\kappa_{\infty}(A) = \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 :$$

Եթե վերցնենք, օրինակ,  $\varepsilon = 0.01$ , ապա կստանանք  $\kappa_{\infty}(A) = 40401$ : Ինչպես տեսնում ենք, մատրիցի պայմանավորվածության թիվը շատ մեծ է: Ուստի այդ մատրիցով համակարգերի լուծման ժամանակ պետք է սպասել վատ արդյունքների: Սա հաստատելու համար դիտարկենք

$$\begin{aligned} x_1 + 1.01 x_2 &= 2.01 \\ 0.99 x_1 + x_2 &= 1.99 \end{aligned}$$

համակարգը, որի լուծումն է  $x_1 = 1$  և  $x_2 = 1$ : Միաժամանակ  $x_1 = -1.01$  և  $x_2 = 2.99$  արժեքները բավարարում են

$$\begin{aligned} x_1 + 1.01 x_2 &= 2.0099 \\ 0.99 x_1 + x_2 &= 1.9901 \end{aligned}$$

համակարգին: Տեսնում ենք, որ աջ մասի  $\Delta b = [-0.0001, 0.0001]^T$  չնչին խտտորումը առաջացրել է լուծման  $\Delta x = [-2.01, 1.99]^T$  փոփոխություն: Հաշվենք հարաբերական սխալանքները.

$$\frac{\|\Delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{0.0001}{2.01} \approx 0.00005, \quad \frac{\|\Delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{2.01}{1} \approx 2.01 :$$

Այսպիսով, հարաբերական սխալանքն աճել է 40200 անգամ:  $\diamond$

**Գիտողություն 4.2.1 :** Գիտարկված օրինակում  $\det A = \varepsilon^2$  : Հաճախ ենթադրում են, որ մատրիցի վատ պայմանավորվածությունը նրա որոշիչի փոքր լինելու արդյունքն է: Ընդհանրապես, դա այդպես չէ: Օրինակ,

$$A = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad B = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

հոյակապ պայմանավորված են՝  $\kappa_2(A) = \kappa_2(B) = 1$ , թեև  $\det A = 10^{20}$ ,  $\det B = 10^{-20}$  :

Գիտարկենք վատ պայմանավորված մատրիցի ևս մեկ օրինակ:

**Օրինակ 4.2.2 :** Գիցուք տրված է

$$Ax = b$$

հավասարումների համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

Այս համակարգն ունի միակ լուծում՝  $x = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$  :

Ենթադրենք, որ համակարգի լուծման ընթացքում  $x_n = 1$ -ի փոխարեն սխալմամբ վերցվել է  $x_n^* = 1 + \varepsilon$ , որտեղ  $\varepsilon > 0$  փոքր մեծություն է: Այդ դեպքում ճշգրիտ լուծման փոխարեն կստանանք մեկ այլ լուծում՝  $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ , որտեղ

$$x_1^* = 2^{n-2}\varepsilon, \quad x_2^* = 2^{n-3}\varepsilon, \dots, \quad x_{n-2}^* = 2\varepsilon, \quad x_{n-1}^* = \varepsilon, \quad x_n^* = 1 + \varepsilon :$$

Այսպիսով,  $\Delta b = [0, 0, \dots, 0, \varepsilon]^T$  խտտորումը բերել է (3.4.11) համակարգի լուծման

$$\Delta x = [2^{n-2}\varepsilon, 2^{n-3}\varepsilon, \dots, 2\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]^T$$

խտտրմանը: Գիցուք  $n = 100$ , իսկ  $\varepsilon = 2^{-50}$ : Արդյունքում  $x_1 = 0$ -ի փոխարեն կստանանք  $x_1^* = 2^{48}$ : Ստացված հսկայական սխալանքի պատճառը  $A$  մատրիցի վատ պայմանավորվածությունն է: Իրոք, քանի որ

$$\|x\|_\infty = 1, \quad \|\Delta x\|_\infty = 2^{n-2}\varepsilon, \quad \|b\|_\infty = 1, \quad \|\Delta b\|_\infty = \varepsilon,$$

ապա համաձայն (4.2.5) անհավասարության կստանանք

$$\kappa_\infty(A) \geq \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \bigg/ \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 2^{n-2} :$$

Այսինքն,  $n$ -ի աճմանը զուգընթաց մատրիցի պայմանավորվածությունը շատ արագ վատանում է:  $\diamond$

Մինչ այժմ մենք ենթադրում էինք, որ (4.2.1) համակարգի մատրիցը տրված էր ճշգրիտ և խտտորում ստանում էր միայն աջ մասը: Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ  $A$  մատրիցը նույնպես տրվում է որոշակի սխալանքով:

Դիտարկենք

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b \quad (4.2.12)$$

խտտորված համակարգը: Ենթադրենք, որ մատրիցի  $\Delta A$  խտտորումն այնպիսին է, որ

$$\|A^{-1}\Delta A\| < 1 : \quad (4.2.13)$$

Նշենք, որ (4.2.13) պայմանը ապահովում է  $A + \Delta A$  մատրիցի չվերասերվածությունը: Իրոք, այդ պայմանից հետևում է, որ  $A^{-1}\Delta A$  մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով փոքր են մեկից (տե՛ս 3.4.1 թեորեմը): Ունենք՝

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A) : \quad (4.2.14)$$

Ակնհայտ է, որ  $\det(I + A^{-1}\Delta A) \neq 0$ , քանի որ հակառակ դեպքում  $\lambda = -1$  թիվը կլիներ  $A^{-1}\Delta A$  մատրիցի սեփական արժեք:

Ինչպես հետևում է (4.2.1) և (4.2.12)-ից՝

$$\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}(-\Delta A x + \Delta b) :$$

Այստեղից

$$\|\Delta x\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| (\|\Delta A\| \|x\| + \|\Delta b\|) ,$$

իսկ քանի որ

$$\|\Delta b\| = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|Ax\| \leq \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \|A\| \|x\| ,$$

ապա՝

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| \|A\| \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) : \quad (4.2.15)$$

Այնուհետև, (4.2.14)-ից ստանում ենք

$$(A + \Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1} \quad (4.2.16)$$

հավասարությունը: Ըստ 3.5.3 թեորեմի՝ (4.2.13) պայմանից հետևում է  $-A^{-1}\Delta A$  մատրիցի Նեյմանի շարքի զուգամիտությունը, ընդ որում՝

$$(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}\Delta A)^k \quad (4.2.17)$$

(տե՛ս (3.5.4) հավասարությունը): Ելնելով (4.2.16)-ից և հաշվի առնելով (4.2.17) շարքի վերլուծությունը՝ կստանանք

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{-1}\Delta A\|^k = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} :$$



Ի վերջո, (4.2.15) անհավասարությունից գալիս ենք հետևյալ գնահատականին.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) : \quad (4.2.18)$$

Նշենք, որ վերը ստացված (4.2.5) գնահատականը (4.2.18) գնահատականի մասնավոր դեպքն է, երբ  $\Delta A = \mathbf{0}$  :

### 4.2.2 Սխալանք և անհամաձայնություն

Հարաբերական սխալանքի (4.2.18) տիպի գնահատականը այսպես կոչված *սպրիորի* գնահատական է (լատիներեն *a priori* նշանակում է *փորձից անկախ, մինչփորձնական*): Այդ գնահատականում չի մասնակցում ոչ ստացված լուծումը, ոչ էլ այդ լուծման հետ կապված որևէ մեծություն: Այժմ ենթադրենք, որ մենք ստացել ենք (4.2.1) համակարգի որոշակի  $x^*$  մոտավոր լուծում: Պարզվում է, որ օգտագործելով

$$r \equiv b - Ax^*$$

վեկտորը, որը կոչվում է *անհամաձայնության վեկտոր*, կարելի է գնահատել  $x^*$  լուծման մերձավորությունը  $x$  ճշգրիտ լուծմանը:

Նշանակենք  $\Delta x$ -ով լուծման սխալանքը՝  $\Delta x = x - x^*$  : Հեշտ ստացվում են հետևյալ անհավասարությունները.

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} : \quad (4.2.19)$$

Իրոք, ակնհայտ է, որ

$$A\Delta x = r :$$

Ունենք՝

$$\|\Delta x\| \|b\| = \|A^{-1}r\| \|Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| \|A\| \|x\| = \kappa(A) \|r\| \|x\| ,$$

որից ստանում ենք (4.2.19)-ի աջ մասի անհավասարությունը: Նման ձևով ստացվում է նաև ձախ մասի անհավասարությունը.

$$\|r\| \|x\| = \|A\Delta x\| \|A^{-1}b\| \leq \|A\| \|\Delta x\| \|A^{-1}\| \|b\| = \kappa(A) \|\Delta x\| \|b\| :$$

Այսպիսով, լավ պայմանավորված մատրիցով համակարգի լուծման հարաբերական սխալանքը համեմատելի է  $\|r\|/\|b\|$  մեծության հետ: Նշենք, որ (4.2.19) տիպի գնահատականները կոչվում են *սպոստերիորի* գնահատականներ (լատիներեն *a posteriori* նշանակում է *փորձի հիման վրա, փորձից ելնելով*):

### 4.3 LU - մեթոդներ

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդների ուսումնասիրությունը սկսենք ուղիղ մեթոդների մի կարևորագույն դասից՝ *LU-մեթոդներից*: Այդ մեթոդների հիմքում ընկած է մատրիցի *LU-վերլուծությունը*:

**Թեորեմ 4.3.1** (*LU-վերլուծության մասին*): Դիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցի բոլոր անկյունային մինորները հավասար չեն գրոյի.

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n :$$

Այդ դեպքում  $A$  մատրիցը կարելի է միարժեքորեն ներկայացնել

$$A = LU \tag{4.3.1}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ  $L$ -ը ոչ գրոյական անկյունագծային տարրերով ստորին եռանկյուն մատրից է, իսկ  $U$ -ն վերին եռանկյուն մատրից է, որի անկյունագծային տարրերը հավասար են մեկի:

Ապացույց: Ապացույցը տանենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով՝ ըստ մատրիցի կարգի: Երբ  $n = 1$ , պնդումն ակնհայտ է: Իբրք,

$$a_{11} = l_{11} \cdot u_{11},$$

որտեղ  $l_{11} = a_{11}$ ,  $u_{11} = 1$ : Դիցուք թեորեմի պնդումը ճիշտ է  $(n - 1)$  կարգի մատրիցների համար: Ներկայացնենք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցը

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & a \\ b^T & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

վանդակային տեսքով, որտեղ  $\tilde{A} \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  և  $a, b \in \mathbf{R}^{n-1}$ : Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության՝  $\tilde{A}$  մատրիցի համար տեղի ունի

$$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$$

վերլուծությունը, որտեղ  $\tilde{L}$  և  $\tilde{U}$  մատրիցները համապատասխանաբար ստորին և վերին եռանկյուն մատրիցներ են՝ օժտված թեորեմում նշված հատկություններով: Փնտրենք  $A$  մատրիցի (4.3.1) վերլուծությունը

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ l^T & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

տեսքով, որտեղ  $l, u \in \mathbf{R}^{n-1}$  վեկտորները և  $l_{nn}$  թիվը առայժմ անհայտ են: Օգտվելով վանդակային մատրիցների բազմապատկման կանոնից, (4.3.2)-ից և (4.3.3)-ից գրենք հետևյալ հավասարումները.

$$\tilde{L}u = a, \tag{4.3.4}$$

$$l^T \tilde{U} = b^T, \quad (4.3.5)$$

$$l^T u + l_{nn} = a_{nn} : \quad (4.3.6)$$

Գրանով իսկ (4.3.4)-ից և (4.3.5)-ից կստանանք

$$u = \tilde{L}^{-1} a, \quad l^T = b^T \tilde{U}^{-1}$$

և, այնուհետև, (4.3.6)-ից՝

$$l_{nn} = a_{nn} - l^T u :$$

Մնում է ապացուցել, որ  $l_{nn} \neq 0$ : Իրոք, (4.3.3) վերլուծությունից ունենք

$$\det A = \det \tilde{L} \cdot l_{nn} \cdot \det \tilde{U} = \det \tilde{L} \cdot l_{nn}$$

հավասարությունը: Քանի որ  $\det A \neq 0$ , ապա  $l_{nn} \neq 0$ : Պահանջվող վերլուծության գոյությունը ապացուցվեց: Ինչ վերաբերում է (4.3.1) վերլուծության միակությանը, ապա այն ակնհայտորեն հետևում է ապացույցի ընթացքից:  $\square$

**Գիտողություն 4.3.1 :** *LU-վերլուծություն անվանումը ծագում է անգլերեն բառերից. lower՝ ստորին և upper՝ վերին:*

Ստորին և վերին եռանկյուն մատրիցների հետևյալ կարևոր հատկությունների ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

**Լեմմա 4.3.1 :** *Ստորին (վերին) եռանկյուն մատրիցների արտադրյալը ստորին (վերին) եռանկյուն մատրից է:*

**Լեմմա 4.3.2 :** *Ստորին (վերին) եռանկյուն մատրիցի հակադարձը ստորին (վերին) եռանկյուն մատրից է:*

Գիտարկենք

$$Ax = b \quad (4.3.7)$$

գծային հավասարումների համակարգը, որի մատրիցը բավարարում է 4.3.1 թեորեմի պայմաններին: Ենթադրենք, որ մենք արդեն գտել ենք  $A$  մատրիցի (4.3.1) վերլուծությունը: Այդ դեպքում (4.3.7) համակարգի լուծումը հանգում է եռանկյուն մատրիցներով հետևյալ երկու համակարգերի լուծմանը.

$$\bullet Ly = b, \quad (4.3.8)$$

$$\bullet Ux = y : \quad (4.3.9)$$

Այս համակարգերի լուծումը դժվարություն չի ներկայացնում և պահանջում է գումարային  $\sim 2n^2$  թվաբանական գործողություն (տես 4.1 պարագրաֆը): Այնպես որ հիմնական դժվարությունը մատրիցի (4.3.1) վերլուծությունը ստանալն է:

LU-վերլուծության վրա հիմնված մեթոդները կոչվում են LU-մեթոդներ:

Ստանանք  $L$  և  $U$  մատրիցների տարրերի որոշման հաշվարկային բանաձևերը: Դիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $L = [l_{ij}]_{n \times n}$  ( $l_{ij} = 0$ , երբ  $i < j$ ) և  $U = [u_{ij}]_{n \times n}$  ( $u_{ij} = 0$ , երբ  $i > j$ ,  $u_{ii} = 1$ ): Համաձայն (4.3.1) հավասարության, ունենք

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}u_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n :$$

Ֆիքսենք որևէ  $i$ -րդ տողը ( $1 \leq i \leq n$ ): Այդ դեպքում

$$\sum_{k=1}^j l_{ik}u_{kj} = a_{ij}, \quad \text{եթե } j \leq i,$$

$$\sum_{k=1}^i l_{ik}u_{kj} = a_{ij}, \quad \text{եթե } j > i :$$

Այստեղից՝

$$\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ij} = a_{ij}, \quad \text{եթե } j \leq i,$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ii}u_{ij} = a_{ij}, \quad \text{եթե } j > i,$$

և մենք ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, i,$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n :$$
(4.3.10)

Այսպիսով,  $L$  և  $U$  մատրիցների տարրերը կարող են հաշվվել ստորև բերվող ալգորիթմի միջոցով, որը կրում է *Կրոուտի ալգորիթմ* անունը.

#### Pseudocode CROUT

input  $n, (a_{ij})$

for  $i = 1, 2, \dots, n$  do

  for  $j = 1, 2, \dots, i$  do

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}$$

  end

$u_{ii} = 1$

  for  $j = i + 1, i + 2, \dots, n$  do

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{l_{ii}}$$

  end

end

output  $(l_{ij}), (u_{ij})$

Կռատուտի ալգորիթմով  $L$  և  $U$  մատրիցների տարրերը որոշելու համար անհրաժեշտ թվաբանական գործողությունների քանակը հետևյալն է.

$$A_{ops} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \sim \frac{2}{3}n^3 : \quad (4.3.11)$$

Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ Կռատուտի ալգորիթմը կարելի է օգտագործել միայն այն դեպքում, երբ նախապես հայտնի է, որ  $A$  մատրիցի բոլոր անկյունային միներները զրոյից տարբեր են: Օրինակ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

չվերասերված մատրիցի համար նշված ալգորիթմը կիրառելի չէ:

## 4.4 Գաուսի մեթոդը

Այս պարագրաֆում մենք կշարադրենք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման *Գաուսի մեթոդը*՝ հիմնված անհայտների հաջորդական արտաքսման գաղափարի վրա: Մեթոդն իր մեջ ներառում է մի քանի հաշվողական ալգորիթմ, որոնք տարբերվում են հաշվարկների կազմակերպման եղանակներով:

### 4.4.1 Հիմնական ալգորիթմը

Դիցուք տրված է

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots &= \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Ենթադրենք, որ  $a_{11} \neq 0$ : Բաժանելով համակարգի առաջին հավասարումը  $a_{11}$ -ի վրա՝ կստանանք

$$x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = y_1 \quad (4.4.2)$$

հավասարումը, որտեղ

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} : \quad (4.4.3)$$

Հաջորդաբար բազմապատկելով (4.4.2) հավասարումը  $a_{i1}$  գործակիցներով, որտեղ  $i = 2, 3, \dots, n$ , և հանելով այն (4.4.1) համակարգի  $i$ -րդ հավասարումից, կբերենք այդ համակարգը

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots &= \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

տեսքի, որտեղ

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - a_{i1}u_{1j}, & i, j &= 2, 3, \dots, n, \\ b_i^{(1)} &= b_i - a_{i1}y_1, & i &= 2, 3, \dots, n : \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Դրանով ավարտվում է ալգորիթմի առաջին քայլը:

Դիցուք  $(k-1)$ -րդ քայլից հետո նախնական համակարգը բերվել է հետևյալ տեսքի.

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1\ k-1}x_{k-1} + u_{1k}x_k + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ x_2 + \dots + u_{2\ k-1}x_{k-1} + u_{2k}x_k + \dots + u_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots &= \dots \\ x_{k-1} + u_{k-1\ k}x_k + \dots + u_{k-1\ n}x_n &= y_{k-1} \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \\ \dots &= \dots \\ a_{nk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{nn}^{(k-1)}x_n &= b_n^{(k-1)} : \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Ենթադրելով, որ  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ , բաժանենք (4.4.6) համակարգի  $k$ -րդ հավասարման երկու կողմը  $a_{kk}^{(k-1)}$  գործակցի վրա: Կստանանք

$$x_k + u_{k\ k+1}x_{k+1} + \dots + u_{kn}x_n = y_k$$

հավասարումը, որտեղ

$$u_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (j = k + 1, k + 2, \dots, n), \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} : \tag{4.4.7}$$

Այնուհետև (4.4.6) համակարգի մնացած հավասարումներից՝ սկսած  $(k + 1)$ -ից, արտաքսենք  $x_k$  անհայտը: Արդյունքում կստանանք

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1k}x_k + u_{1\ k+1}x_{k+1} + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ x_2 + \dots + u_{2k}x_k + u_{2\ k+1}x_{k+1} + \dots + u_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots &= \dots \\ x_k + u_{k\ k+1}x_{k+1} + \dots + u_{kn}x_n &= y_k \\ a_{k+1\ k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1\ n}^{(k)}x_n &= b_{k+1}^{(k)} \\ \dots &= \dots \\ a_{n\ k+1}^{(k+1)}x_{k+1} + \dots + a_{nn}^{(k)}x_n &= b_n^{(k)} \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

համակարգը, որտեղ

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}u_{kj}, & i, j &= k + 1, k + 2, \dots, n, \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, & i &= k + 1, k + 2, \dots, n : \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Արտաքսման ընթացքի  $k$ -րդ քայլն ավարտված է :

Այսպիսով,  $n$  քայլից հետո կատանանք նախնական համակարգին համարժեք վերին եռանկյուն մատրիցով համակարգ.

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= y_1 \\ x_2 + \dots + u_{2n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} + u_{n-1n}x_n &= y_{n-1} \\ x_n &= y_n \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Դրանով ավարտվում է ալգորիթմի առաջին փուլը՝ *ուղիղ արտաքսումը*: Ի մի բերելով (4.4.3), (4.4.5), (4.4.7) և (4.4.9) բանաձևերը՝ կարող ենք (4.4.10) համակարգի գործակիցների և աջ մասերի հաշվումը իրականացնել հետևյալ կանոնով.

$k = 0$  (նախնական տվյալներ).

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad b_i^{(0)} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) : \quad (4.4.11)$$

$k = 1, 2, \dots, n - 1$  արժեքների համար.

$$\begin{aligned} u_{kj} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (j = k + 1, k + 2, \dots, n), \quad y_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}u_{kj} \quad (i, j = k + 1, k + 2, \dots, n), \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k \quad (i = k + 1, k + 2, \dots, n) : \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

$k = n$  արժեքի համար.

$$y_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} : \quad (4.4.13)$$

Ալգորիթմի երկրորդ փուլը, որն անվանում են *հակադարձ տեղադրում*, (4.4.10) համակարգի անհայտների անմիջական որոշումն է: Բանաձևերն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} x_n &= y_n, \\ x_i &= y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j, \quad i = n - 1, n - 2, \dots, 1 : \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Այժմ հաշվենք ալգորիթմի իրականացման համար անհրաժեշտ թվաբանական գործողությունների քանակը: Ուղիղ արտաքսման փուլում կատարվում է

$$A_{ops}^{(1)} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$$

գործողություն: Հակադարձ տեղադրումը պահանջում է

$$A_{ops}^{(2)} = n^2 - n$$

գործողություն: Այսպիսով՝

$$A_{ops} = A_{ops}^{(1)} + A_{ops}^{(2)} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \sim \frac{2}{3}n^3 : \quad (4.4.15)$$

Ընդ որում, գործողությունների գերակշիռ մասը ծախսվում է համակարգը վերին եռանկյուն տեսքի բերելու ընթացքում:

Վերն ստացված (4.4.11)–(4.4.14) բանաձևերի հիման վրա գրենք Գաուսի մեթոդի հիմնական ալգորիթմը.

#### Pseudocode GAUSS

```

input  $n, (a_{ij}), (b_i)$ 
for  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  do
    for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
         $a_{kj} = a_{kj}/a_{kk}$ 
        for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
             $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 
        end
    end
     $b_k = b_k/a_{kk}$ 
    for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
         $b_i = b_i - a_{ik}b_k$ 
    end
end
 $b_n = b_n/a_{nn}$ 
 $x_n = b_n$ 
for  $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$  do
     $x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j$ 
end
output  $(x_i)$ 

```

Շարադրված մեթոդի հիմնական սահմանափակումն այն է, որ բոլոր  $a_{kk}^{(k-1)}$  գործակիցները, որոնց վրա կատարվում է բաժանում, չպետք է լինեն հավասար զրոյի: Այդ գործակիցները կոչվում են արտաքսման ընթացքի *գլխավոր տարրեր*:

Որոշ դեպքերում անհայտների արտաքսումը կարող է ընթանալ առանց բարդությունների (համեմայն դեպս՝ տեսականորեն), երբ արտաքսման յուրաքանչյուր քայլում  $a_{kk}^{(k-1)}$  գլխավոր տարրը կլինի զրոյից տարբեր:

**Սահմանում 4.4.1 :** Կասենք, որ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն ունի *խիստ անկյունագծային գերիշխում (ըստ տողերի)*, եթե

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.4.16)$$



Ենթադրենք, որ (4.4.1) համակարգի  $A$  մատրիցն օժտված է (4.4.16) հատկությամբ: Վերադառնանք ուղիղ արտաքսման ընթացքի առաջին քայլին: Քանի որ

$$|a_{11}| > \sum_{j=2}^n |a_{1j}|, \quad (4.4.17)$$

այս  $a_{11} \neq 0$ : Այնուհետև, (4.4.3) բանաձևերից և (4.4.17) անհավասարությունից կստանանք

$$\sum_{j=2}^n |u_{1j}| = \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| < 1 \quad (4.4.18)$$

անհավասարությունը, որը կօգտագործենք հետագայում:

Առաջին քայլն ավարտելուց հետո ստանում ենք (4.4.4) տեսքի համակարգ, որի մատրիցը հետևյալն է.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} & \dots & \dots \end{bmatrix} :$$

Ցույց տանք, որ առանձնացված «ակտիվ» ենթամատրիցը, որի նկատմամբ պետք է կատարվեն գործողություններ արտաքսման ընթացքի հաջորդ՝ երկրորդ քայլում, նույնպես ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում: Այսինքն, ապացուցենք, որ

$$|a_{ii}^{(1)}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}|, \quad i = 2, 3, \dots, n : \quad (4.4.19)$$

Օգտվելով (4.4.5) բանաձևերից և (4.4.16) անհավասարություններից՝ կատարենք հետևյալ գնահատականները.

$$\begin{aligned} |a_{ii}^{(1)}| &= |a_{ii} - a_{i1}u_{1i}| \geq |a_{ii}| - |a_{i1}| |u_{1i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| - |a_{i1}| |u_{1i}| = \\ & \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + |a_{i1}| - |a_{i1}| |u_{1i}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| + a_{i1}u_{1j} + |a_{i1}| - |a_{i1}| |u_{1i}| \geq \\ & \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{i1}| |u_{1j}| + |a_{i1}| - |a_{i1}| |u_{1i}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| + |a_{i1}| - \sum_{j=2}^n |a_{i1}| |u_{1j}| = \\ & \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| + |a_{i1}| \left( 1 - \sum_{j=2}^n |u_{1j}| \right) : \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (4.4.18) անհավասարությունը, հեշտությամբ հանգում ենք (4.4.19) անհավասարություններին: Դա նշանակում է, որ  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , և կարելի է իրականացնել արտաքսման ընթացքի երկրորդ քայլը: Շարունակելով համանման դատողությունները՝ կստանանք, որ  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ,  $k = 3, 4, \dots, n$ :

**4.4.2 Գաուսի մեթոդը որպես LU տիպի մեթոդ**

Վերը նկարագրված ալգորիթմի ուղիղ արտաքսումը

$$Ax = b \tag{4.4.20}$$

նախնական համակարգը ձևափոխում է

$$Ux = y \tag{4.4.21}$$

համարժեք համակարգի, որտեղ

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

(տե՛ս (4.4.10)-ը): Այդ ընթացքը կարելի է նկարագրել մատրիցային ձևափոխությունների միջոցով: Դիցուք  $A^{(0)} \equiv A$  և  $b^{(0)} \equiv b$ : Նշանակենք  $A^{(k)}$  և  $b^{(k)}$ -ով անհայտների ուղիղ արտաքսման  $k$ -րդ քայլից հետո ստացված համակարգի մատրիցը և, համապատասխանաբար, աջ մասը (տե՛ս (4.4.8)): Համաձայն ներմուծված նշանակումների (4.4.6) համակարգը կարելի է ներկայացնել

$$A^{(k-1)}x = b^{(k-1)} \tag{4.4.22}$$

տեսքով: Այդ համակարգի երկու կողմը ձախից բազմապատկենք

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & 0 \\ & & & & l_{kk}^{(k)} & & & & & \\ & & & & -l_{k+1k}^{(k)} & 1 & & & & \\ & & & 0 & -l_{k+2k}^{(k)} & & 1 & & & \\ & & & & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & -l_{nk}^{(k)} & & & & 1 & \end{bmatrix} \tag{4.4.23}$$

ստորին եռանկյուն մատրիցով, որտեղ

$$l_{kk}^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad l_{jk}^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = k + 1, k + 2, \dots, n :$$

Արդյունքում կստանանք

$$L_k A^{(k-1)}x = L_k b^{(k-1)} :$$

Շնորհիվ  $L_k$  մատրիցի ընտրության՝  $L_k A^{(k-1)} = A^{(k)}$  և  $L_k b^{(k-1)} = b^{(k)}$ : Այսպիսով, անհայտների ուղիղ արտաքսումը և (4.4.20) համակարգի բերումը (4.4.21) վերին եռանկյուն տեսքի կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$(Ux =) \quad L_n L_{n-1} \dots L_1 A x = L_n L_{n-1} \dots L_1 b \quad (= y) : \quad (4.4.24)$$

Այստեղից կստանանք

$$y = L^{-1} b, \quad (4.4.25)$$

որտեղ

$$L \equiv (L_n L_{n-1} \dots L_1)^{-1}$$

մատրիցը ստորին եռանկյուն տեսքի է (տե՛ս 4.3.1 և 4.3.2 լեմմաները): Տեղադրելով (4.4.21) հավասարման մեջ  $y$  վեկտորի (4.4.25) արտահայտությունը՝ հանգում ենք

$$LUx = b \quad (4.4.26)$$

հավասարմանը:

Համեմատելով (4.4.26) հավասարումը (4.4.20) նախնական հավասարման հետ եզրակացնում ենք, որ Գաուսի մեթոդը ըստ էության  $LU$ -մեթոդ է: Ուղիղ արտաքսման արդյունքում ստանում ենք  $U$  վերին եռանկյուն մատրիցը և  $y = L^{-1} b$  վեկտորը: Ինչ վերաբերում է  $L$  մատրիցի տարրերին, ապա դրանք անբացահայտորեն հաշվվում են ուղիղ արտաքսման ընթացքում և համակարգչի հիշողության մեջ չեն պահպանվում:

### 4.4.3 Գաուսի մեթոդում մատրիցների պայմանավորվածության մասին

Որոշ դեպքերում Գաուսի մեթոդի կիրառումը կարող է հանգեցնել նախնական համակարգի պայմանավորվածության կտրուկ վատթարացմանը: Այսինքն, ուղիղ արտաքսման արդյունքում ստացված  $U$  մատրիցի պայմանավորվածության թիվը կարող է զգալիորեն ավելի մեծ լինել  $A$  մատրիցի պայմանավորվածության թվից:

Որպես օրինակ դիտարկենք

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & +x_n & = & b_1 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_n & = & b_2 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & & +x_n & = & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & \dots & -x_{n-1} & +x_n & = & b_n \end{array} \quad (4.4.27)$$

համակարգը, որի մատրիցն է՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} : \quad (4.4.28)$$

ճիշտ է

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} - 1} \leq n \quad (4.4.29)$$

գնահատականը: Հակադարձ մատրիցի  $\|A^{-1}\|_2$  նորմի գնահատման նպատակով դիտարկենք միավոր վեկտորների հետևյալ համակարգը.

$$e^{(k)} = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T, \quad k = 1, 2, \dots, n :$$

Նշանակենք  $x^{(k)} = [x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)}]^T$ -ով (4.4.27) համակարգի լուծումը  $e^{(k)}$  աջ մասի դեպքում, այսինքն՝

$$Ax^{(k)} = e^{(k)} :$$

Անմիջական ստուգմամբ կարելի է համոզվել, որ

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -2^{-k}, \quad x_2^{(k)} = -2^{-k+1}, \quad \dots, \quad x_{k-1}^{(k)} = -2^{-2}, \quad x_k^{(k)} = 2^{-1}, \\ x_{k+1}^{(k)} &= \dots = x_{n-1}^{(k)} = 0, \quad x_n^{(k)} = 2^{-k}, \end{aligned}$$

երբ  $1 \leq k \leq n-1$ , և

$$x_1^{(n)} = -2^{-n+1}, \quad x_2^{(n)} = -2^{-n+2}, \quad \dots, \quad x_{n-2}^{(n)} = -2^{-2}, \quad x_{n-1}^{(n)} = -2^{-1}, \quad x_n^{(n)} = 2^{-n+1} :$$

Ակնհայտ է, որ (4.4.27) համակարգի լուծումը կամայական  $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T$  աջ մասի դեպքում կարելի է ներկայացնել

$$x = \sum_{k=1}^n b_k x^{(k)}$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_2 &= \max_{\|b\|_2=1} \|A^{-1}b\|_2 = \max_{\|b\|_2=1} \|x\|_2 = \max_{\|b\|_2=1} \left\| \sum_{k=1}^n b_k x^{(k)} \right\|_2 \leq \\ &\max_{\|b\|_2=1} \sum_{k=1}^n |b_k| \|x^{(k)}\|_2 \leq \max_{\|b\|_2=1} \|b\|_2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n \|x^{(k)}\|_2^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^n \|x^{(k)}\|_2^2 \right)^{1/2} : \end{aligned}$$

Քանի որ

$$\|x^{(k)}\|_2^2 = \frac{1 + 2^{-2k+1}}{3}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \|x^{(n)}\|_2^2 = \frac{1 + 2^{-2n+3}}{3},$$

այսպես

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + 2^{-2k+1}}{3} + \frac{1 + 2^{-2n+3}}{3} \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} :$$

Այսպիսով,

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \sqrt{n} : \quad (4.4.30)$$

Օգտվելով (4.4.29) և (4.4.30) գնահատականներից՝ կատանանք  $A$  մատրիցի պայմանավորվածության թվի գնահատականը՝

$$\kappa_2(A) \leq n\sqrt{n} : \quad (4.4.31)$$

Ուղիղ արտաքսման արդյունքում հանգում ենք

$$Ux = y$$

համակարգին, որի մատրիցն է՝

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 2^2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 2^{n-2} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} :$$

Ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.

$$\|U\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ux\|_2 \geq \|Ue^{(n)}\|_2 = \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{2k}\right)^{1/2} > 2^{n-2} :$$

Այնուհետև, անմիջական ստուգմամբ դժվար չէ համոզվել, որ

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & -2^2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -2^{n-2} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} :$$

Քանի որ

$$\|U^{-1}\|_2 = \|U\|_2 > 2^{n-2},$$

ապա

$$\kappa_2(U) = \|U\|_2 \|U^{-1}\|_2 > 4^{n-2} : \quad (4.4.32)$$

Համեմատելով (2.4.31) և (4.4.32) գնահատականները՝ տեսնում ենք, որ  $U$  մատրիցի պայմանավորվածության թիվն էապես գերազանցում է  $A$  նախնական մատրիցի պայմանավորվածության թիվը:

#### 4.4.4 Գլխավոր տարրի ընտրությամբ ալգորիթմները

Ինչպես արդեն ասվել է, Գ-աուսի մեթոդի հիմնական հաշվողական ալգորիթմն ունի մի էական թերություն: Այդ ալգորիթմը ենթադրում է գլխավոր տարրերի ոչ զրոյականություն: Եթե ուղիղ արտաքսման որևէ  $k$ -րդ քայլում  $a_{kk}^{(k-1)}$  գործակիցը հավասար լինի զրոյի, ապա ալգորիթմի աշխատանքը դառնում է անիմաստ: Բացի այդ, գլխավոր տարրերի զրոյից տարբեր լինելը ապահովում է մեթոդի կոռեկտությունը միայն տեսականորեն: Գործնականում եթե հաշվումների ընթացքում առաջանում են համեմատաբար փոքր գլխավոր տարրեր, ապա դրանք կարող են լուծման մեծ շեղման պատճառ դառնալ:

##### Օրինակ 4.4.1 : Գիտարկենք

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

համակարգը, որի լուծումն է

$$x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad x_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} :$$

Գժվար չէ նկատել, որ բավականաչափ փոքր  $\varepsilon$ -ի համար  $x_1 \approx 1$ ,  $x_2 \approx 1$ :

Ենթադրենք, որ համակարգի լուծումը իրականացվում է սահող կետով  $FL(10; p, 7)$  թվերի համակարգում: Վերցնենք  $\varepsilon = 10^{-8}$ : Ըստ հիմնական ալգորիթմի կստանանք՝

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|c} 10^{-8} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 10^8 & 10^8 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 10^8 & 10^8 \\ 0 & -10^8 & -10^8 \end{array} \right] \longrightarrow \\ \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 10^8 & 10^8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 : \end{aligned}$$

Ստացված  $x_1$ -ի արժեքը շատ հեռու է իրական արժեքից: Այժմ վերադասավորելով համակարգի տողերը՝ կստանանք հետևյալ արդյունքը.

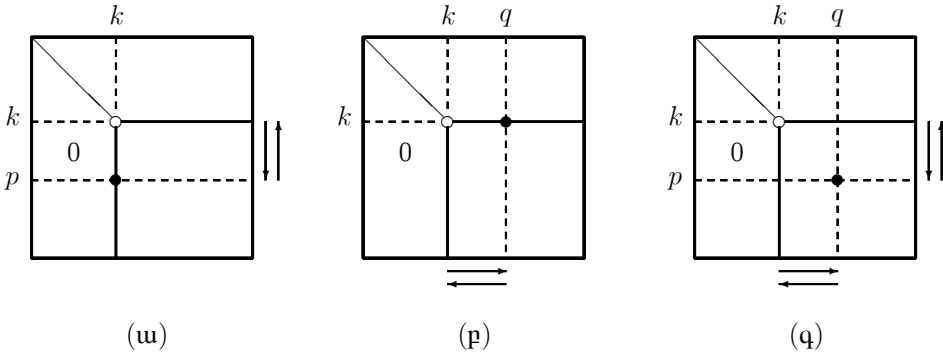
$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-8} & 1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow x_1 = 1, x_2 = 1 : \quad \diamond$$

Այսպիսով, այս օրինակը ցույց է տալիս, որ միայն զրոյական գլխավոր տարրերից խուսափելը բավարար չէ: Անհրաժեշտ է խուսափել նաև համեմատաբար փոքր գլխավոր տարրերից, ինչը հանգեցնում է Գ-աուսի մեթոդի *գլխավոր տարրի ընտրությամբ ալգորիթմներին*:

Գիտարկենք գլխավոր տարրի ընտրության երեք եղանակ.

- (ա) գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ սյունակի,
- (բ) գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ տողի,
- (գ) գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ մատրիցի:

Քուրը երեք եղանակները սխեմատիկորեն պատկերված են նկ.4.4.1-ում:



**Նկ. 4.4.1** Գլխավոր տարրի ընտրության եղանակները

Տանք նշված եղանակների համառոտ նկարագրությունը:

- *Գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ սյունակի:*

Անհայտների արտաքսման  $k$ -րդ քայլում  $a_{ik}^{(k-1)}$ ,  $i = k, k + 1, \dots, n$  տարրերից ընտրվում է բացարձակ արժեքով ամենամեծ տարրը.

$$|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}| :$$

Այնուհետև ընդլայնված մատրիցում, որի վերջին սյունակը համակարգի ազատ անդամների սյունակն է (տես նկ.4.4.1(ա)), փոխվում են տեղերով  $k$ -րդ և  $p$ -րդ տողերը: Տեղափոխության արդյունքում  $a_{pk}^{(k-1)}$  տարրը դառնում է անհայտների արտաքսման ընթացքի  $k$ -րդ քայլի գլխավոր տարրը:

Անհայտների արտաքսման այս տարբերակը կարելի է նկարագրել մատրիցային գործողություններով՝ ներգրավելով 3.3 պարագրաֆում սահմանված *տեղափոխության տարրական* մատրիցները: Ի տարբերություն վերը դիտարկված (4.4.24) դեպքի՝ այստեղ  $A$  մատրիցի բերումը  $U$  վերին եռանկյուն տեսքի կատարվում է

$$L_n P_n i_n \dots L_2 P_2 i_2 L_1 P_1 i_1 A = U \tag{4.4.33}$$

մատրիցային գործողությունների միջոցով, որտեղ  $P_{k i_k}$  մատրիցները ( $i_k \geq k$ ) տեղափոխության տարրական մատրիցներն են, իսկ  $L_k$  ստորին եռանկյուն մատրիցները սահմանված են (4.4.23)-ում : Դժվար չէ տեսնել, որ

$$L_n P_n i_n \dots L_2 P_2 i_2 L_1 P_1 i_1 A = L_n \dots L_2 L_1 P_n i_n \dots P_2 i_2 P_1 i_1 A : \tag{4.4.34}$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$L \equiv (L_n \dots L_2 L_1)^{-1}, \quad P \equiv P_n i_n \dots P_2 i_2 P_1 i_1 :$$

Այդ դեպքում (4.4.33) հավասարությունը, հաշվի առնելով (4.4.34)-ը, կարելի է գրել

$$L^{-1}PA = U$$

կամ

$$PA = LU$$

տեսքով: Արդյունքում

$$Ax = b \quad (4.4.35)$$

համակարգի լուծումը հանգում է եռանկյուն մատրիցներով

$$\begin{aligned} Ly &= Pb, \\ Ux &= y \end{aligned}$$

համակարգերի հաջորդական լուծմանը:

- *Գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ տողի:*

Անհայտների արտաքսման  $k$ -րդ քայլում  $a_{kj}^{(k-1)}$ ,  $j = k, k+1, \dots, n$  տարրերից ընտրվում է բացարձակ արժեքով ամենամեծ տարրը.

$$|a_{kq}^{(k-1)}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{kj}^{(k-1)}| :$$

Դրանից հետո ընդլայնված մատրիցի  $k$ -րդ և  $q$ -րդ սյունակները փոխվում են տեղերով (տես նկ.4.4.1(բ)): Արդյունքում  $a_{kq}^{(k-1)}$  տարրը դառնում է արտաքսման  $k$ -րդ քայլի գլխավոր տարրը: Հարկ է նշել, որ ալգորիթմի այս տարբերակում կատարվում է անհայտների վերահամարակալում՝  $x_k \leftrightarrow x_q$ :

Նախնական մատրիցի բերումը վերին եռանկյուն տեսքի կատարվում է հետևյալ կերպ.

$$L_n \dots L_2 L_1 A P_{1j_1} P_{2j_2} \dots P_{nj_n} = U, \quad (4.4.36)$$

որտեղ  $j_k \geq k$ : Եթե կատարենք

$$L \equiv (L_n \dots L_2 L_1)^{-1}, \quad P \equiv P_{1j_1} P_{2j_2} \dots P_{nj_n}$$

նշանակումները, ապա (4.4.36) հավասարությունը կգրվի

$$L^{-1}AP = U$$

կամ

$$AP = LU$$

տեսքով: Այդ դեպքում (4.4.35) համակարգի լուծման ընթացքը հետևյալն է.

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Uz &= y, \\ x &= Pz : \end{aligned}$$



Նշենք, որ  $x = Pz$  գործողությունը վերականգնում է անհայտների նախնական համարակալումը:

- *Գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ մատրիցի:*

Այս տարբերակում  $a_{ij}^{(k-1)}$ ,  $i, j = k, k+1, \dots, n$  տարրերից ընտրվում է բացարձակ արժեքով ամենամեծ տարրը.

$$|a_{pq}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k-1)}| :$$

Այնուհետև փոխվում են տեղերով ընդլայնված մատրիցի  $k$ -րդ և  $p$ -րդ տողերը, ինչպես նաև  $k$ -րդ և  $q$ -րդ սյունակները (տե՛ս նկ.4.4.1(զ)), ինչի արդյունքում  $a_{pq}^{(k-1)}$  տարրը դառնում է արտաքսման ընթացքի  $k$ -րդ քայլի գլխավոր տարրը: Ինչպես նախորդ դեպքում, կատարվում է անհայտների վերահամարակալում՝  $x_k \leftrightarrow x_q$ :

Գլխարկվող դեպքում ունենք

$$L_n P_{n i_n} \dots L_2 P_{2 i_2} L_1 P_{1 i_1} A P_{1 j_1} P_{2 j_2} \dots P_{n j_n} = U \quad (i_k, j_k \geq k)$$

կամ՝ հաշվի առնելով (4.4.34)-ը՝

$$L_n \dots L_2 L_1 P_{n i_n} \dots P_{2 i_2} P_{1 i_1} A P_{1 j_1} P_{2 j_2} \dots P_{n j_n} = U :$$

Նշանակենք

$$L \equiv (L_n \dots L_2 L_1)^{-1}, \quad P^{(1)} \equiv P_{n i_n} \dots P_{2 i_2} P_{1 i_1}, \quad P^{(2)} \equiv P_{1 j_1} P_{2 j_2} \dots P_{n j_n} :$$

Կստանանք

$$P^{(1)} A P^{(2)} = LU :$$

հավասարությունը: Հետևաբար (4.4.35) համակարգի լուծումը կառուցվում է հետևյալ հերթականությամբ.

$$\begin{aligned} Ly &= P^{(1)}b, \\ Uz &= y, \\ x &= P^{(2)}z : \end{aligned}$$

Նշենք, որ գլխավոր տարրի ընտրությունը պահանջում է լրացուցիչ հաշվողական աշխատանք: Գժվար չէ հաշվել, որ առաջին երկու տարբերակներում լրացուցիչ պետք է կատարել  $\sim n^2/2$  թվաբանական գործողություն, իսկ երրորդ տարբերակի դեպքում այդ թիվը  $\sim n^3/3$  է: Այսինքն, գլխավոր տարրի ընտրությունը ըստ ամբողջ մատրիցի գրեթե կրկնապատկում է Գ-առուսի մեթոդի հիմնական ալգորիթմի հաշվողական ծախսերը, սակայն այդ տարբերակը ավելի հուսալի է:

## 4.5 Խոլեսկու մեթոդը

Միմետրիկ դրական որոշյալ մատրիցով համակարգերի լուծման համար մշակված է անհայտների արտաքսման մեթոդի մի այլ տարբերակ, որը պահանջում է կրկնակի պակաս հաշվողական աշխատանք:

### 4.5.1 Մեթոդի ալգորիթմը

Ինչպես արդեն նշվել էր 4.3 պարագրաֆում, կամայական  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրից, որի բոլոր անկյունագծային միներները զրոյից տարբեր են, միարժեքորեն ներկայացվում է  $A = SV$  արտադրյալի տեսքով, որտեղ  $S$ -ը ոչ զրոյական անկյունագծային տարրերով ստորին եռանկյուն մատրից է, իսկ  $V$ -ն վերին եռանկյուն մատրից է, որի բոլոր անկյունագծային տարրերը հավասար են մեկի:

Եթե ներկայացնենք  $S$  մատրիցը երկու մատրիցների արտադրյալի տեսքով՝

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & & & \\ s_{21} & s_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ s_{21}/s_{11} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1}/s_{11} & s_{n2}/s_{22} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & & & \\ & s_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & s_{nn} \end{bmatrix},$$

ապա  $A$  մատրիցի համար կստանանք

$$A = LDV \quad (4.5.1)$$

միարժեք վերլուծություն, որտեղ

$L$ -ը միավոր անկյունագծային տարրերով ստորին եռանկյուն մատրից է,

$D$ -ն անկյունագծային մատրից է,

$V$ -ն միավոր անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:

Դիցուք  $A$ -ն սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրից է: Այդ դեպքում

$$LDV = A = A^T = V^T D L^T :$$

Այս հավասարությունից և (4.5.1) վերլուծության միարժեքությունից ստանում ենք, որ  $L = V^T$ : Արդյունքում (4.5.1) վերլուծությունը կընդունի

$$A = V^T D V \quad (4.5.2)$$

տեսքը:

Ինչպես հետևում է (4.5.2) վերլուծությունից,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix} = s_{11}s_{22} \dots s_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Այստեղից, օգտվելով Սիլվեստրի չափանիշից (տե՛ս 3.3.3 թեորեմը), ունենք.

$$s_{ii} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ 1 & 2 & \dots & i \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{pmatrix}} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Ներմուծենք

$$D^{1/2} \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & & & \\ & \sqrt{s_{22}} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sqrt{s_{nn}} \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Այդ դեպքում (4.5.2) վերլուծությունը կարելի է գրել

$$A = V^T D^{1/2} D^{1/2} V = U^T U$$

տեսքով, որտեղ

$$U \equiv D^{1/2} V$$

վերին եռանկյուն մատրից է  $\sqrt{s_{ii}}$  անկյունագծային տարրերով: Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.5.1 :** *Ցանկացած  $A$  դրական որոշյալ մատրիցը կարելի է միարժեքորեն ներկայացնել*

$$A = U^T U \tag{4.5.3}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ  $U$ -ն դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:

Ստացված (4.5.3) վերլուծությունը կոչվում է  $A$  մատրիցի *Խոլեսկու վերլուծություն*:

Այժմ արտածենք  $U$  մատրիցի տարրերի հաշվման բանաձևերը: Ելնելով

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i u_{ki} u_{kj} \quad (i \leq j)$$

կամ

$$\begin{aligned} u_{1i} u_{1j} + u_{2i} u_{2j} + \dots + u_{ii} u_{ij} &= a_{ij} \quad (i < j), \\ u_{1i}^2 + u_{2i}^2 + \dots + u_{ii}^2 &= a_{ii} \end{aligned}$$

հավասարություններից՝ հեշտությամբ ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}} \quad (j > i), \tag{4.5.4}$$

$$i = 1, 2, \dots, n :$$

Այսպիսով,  $U$  մատրիցի տարրերը գտնում ենք հաջորդաբար՝ տող առ տող:

```

Pseudocode  CHOLESKY
input  $n, (a_{ij})$ 
 $u_{11} = \sqrt{a_{11}}$ 
for  $j = 2, 3, \dots, n$  do
     $u_{1j} = a_{1j}/u_{11}$ 
end
for  $i = 2, 3, \dots, n$  do
     $u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$ 
    for  $j = i + 1, i + 2, \dots, n$  do
         $u_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj} \right) / u_{ii}$ 
    end
end
output  $(u_{ij})$ 

```

Պարզ հաշվարկները ցույց են տալիս, որ  $U$  մատրիցի տարրերի որոշումը պահանջում է

$$A_{ops} \sim \frac{1}{3}n^3$$

թվաբանական գործողություն: Երբ  $U$  մատրիցը որոշված է, ապա  $Ax = b$  նախնական համակարգի լուծումը հանգում է եռանկյուն մատրիցներով երկու համակարգերի հաջորդական լուծմանը.

$$\begin{aligned} U^T y &= b, \\ Ux &= y : \end{aligned}$$

Դրա համար կպահանջվի ևս  $2n^2$  թվաբանական գործողություն:

Դրական որոշյալ մատրիցով համակարգերի լուծման այս եղանակը կրում է *Խոլեսկու մեթոդ* անունը: Սեթոդի թվային իրականացումը պահանջում է  $\sim n^3/3$  թվաբանական գործողություն: Այսպիսով, բարձր կարգի համակարգերի դեպքում Խոլեսկու մեթոդը երկու անգամ ավելի արագ է Գաուսի մեթոդից:

## 4.5.2 $U$ մատրիցի պայմանավորվածության թվի մասին

Համարակալենք  $A$  մատրիցի սեփական արժեքները չնվազման կարգով.

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n :$$

Ըստ (4.2.10)-ի՝

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} : \quad (4.5.5)$$

Հաշվի առնելով (3.4.20) բանաձևը և (4.5.3) վերլուծությունը՝ ունենք

$$\|U\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(U^T U)} = \sqrt{\lambda_{\max}(A)} = \sqrt{\lambda_n} : \quad (4.5.6)$$

Այնուհետև,

$$\|U^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(U^{-1T} U^{-1})} = \sqrt{\lambda_{\max}((U U^T)^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(U U^T)}} : \quad (4.5.7)$$

Գժվար չէ նկատել, որ  $U U^T$  և  $U^T U$  մատրիցները նման են: Իրոք,

$$U^{-1}(U U^T)U = U^T U :$$

Իսկ դա նշանակում է, որ այդ մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են (տե՛ս 3.3.6 թեորեմը): Ուստի

$$\lambda_{\min}(U U^T) = \lambda_{\min}(U^T U) = \lambda_{\min}(A) = \lambda_1 ,$$

և (4.5.7)-ից կատանանք, որ

$$\|U^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} : \quad (4.5.8)$$

Այսպիսով, (4.5.6) և (4.5.8) հավասարություններից  $U$  մատրիցի պայմանավորվածության թվի համար ստանում ենք

$$\kappa_2(U) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} : \quad (4.5.9)$$

Բաղդատելով (4.5.5) և (4.5.9) արտահայտությունները՝ տեսնում ենք, որ

$$\kappa_2(U) = \sqrt{\kappa_2(A)} :$$

Վերջինը նշանակում է, որ  $U$  մատրիցի պայմանավորվածության թիվը նախնական մատրիցի պայմանավորվածության թվի համեմատ նվազել է: Այս հանգամանքը Խոլեսկու մեթոդի կարևոր հատկություններից է:

## 4.6 Երեքանկյունագծային համակարգեր

Որոշ դեպքերում գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի մատրիցը պարունակում է մեծ թվով զրոներ, որոնք տեղաբաշխված են ոչ թե անկանոն, այլ հոծ զանգվածներով նախապես հայտնի տեղերում: Այդպիսի համակարգերի համար հաշվումները կարելի է կազմակերպել այնպես, որ զրոյական տարրերը չներգրավեն հաշվարկային բանաձևերի մեջ, և արդյունքում կնվազեցվի ինչպես հաշվողական աշխատանքը, այնպես էլ պահանջվող համակարգչային հիշողության ծավալը:

Դիտարկենք

$$\begin{aligned} d_1 x_1 + b_1 x_2 &= r_1 \\ a_i x_{i-1} + d_i x_i + b_i x_{i+1} &= r_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ a_n x_{n-1} + d_n x_n &= r_n \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

գծային հավասարումների համակարգը, որտեղ  $n \geq 3$ : Այդ համակարգի մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը.

$$\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & & & \\ a_2 & d_2 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & a_n & d_n \end{bmatrix} :$$

Այս տեսքի մատրիցները անվանում են *երեքանկյունագծային*: Գրանք հանդիպում են տարբեր հաշվողական խնդիրներում և, մասնավորապես, դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման ժամանակ:

**Օրինակ 4.6.1** : Տրված է եզրային խնդիր երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար.

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0 : \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Վերցնենք  $[0, 1]$  հատվածում հավասարահեռ կետեր (*հանգույցներ*)

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad h = \frac{1}{n+1} :$$

Այդ հանգույցների բազմությունը կանվանենք *ցանց*: Նշանակենք  $v_i$ -ով մոտավոր լուծման արժեքը  $x_i$  հանգույցում: Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ կարելի է ցույց տալ, որ

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}$$

(տե՛ս ստորև 9.3 պարագրաֆը): Գրանով մոտավոր լուծման որոշումը հանգում է

$$-\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v_0 = v_{n+1} = 0$$

համակարգի լուծմանը: Արդյունքում ստանում ենք երեքանկյունագծային մատրիցով համակարգ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ h^2 f(x_n) \end{bmatrix} : \quad \diamond$$

Գիտարկվող (4.6.1) համակարգի լուծման մեթոդի հիմքում ընկած է մեզ արդեն հայտնի անհայտների հաջորդական արտաքսման սկզբունքը: Ալգորիթմը ներառում է երկու փուլ: Առաջին փուլում, որը կոչվում է *ուղիղ արտաքսում*, նախնական համակարգը բերվում է

$$\begin{aligned} x_i + \gamma_i x_{i+1} &= \rho_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_n &= \rho_n \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

համարժեք երկանկյունագծային համակարգի, որի գործակիցները և աջ մասերը հաշվվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\gamma_i = \frac{b_i}{d_i}, \quad \gamma_i = \frac{b_i}{d_i - \gamma_{i-1} a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (4.6.4)$$

$$\rho_1 = \frac{r_1}{d_1}, \quad \rho_i = \frac{r_i - \rho_{i-1} a_i}{d_i - \gamma_{i-1} a_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n :$$

Երկրորդ փուլում, որն անվանում են *հակադարձ տեղադրում*, անհայտները հաջորդաբար հաշվվում են (4.6.3) համակարգից.

$$\begin{aligned} x_n &= \rho_n, \\ x_i &= \rho_i - \gamma_i x_{i+1}, & i = n-1, n-2, \dots, 1 : \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Գրենք մեթոդի ալգորիթմը.

#### Pseudocode 3dSYSTEM

input  $n, (a_i), (d_i), (b_i), (r_i)$

$\gamma_1 = b_1/d_1$

$\rho_1 = r_1/d_1$

for  $i = 2, 3, \dots, n$  do

$\mu_i = d_i - \gamma_{i-1} a_i$

$\gamma_i = b_i/\mu_i$

$\rho_i = (r_i - \rho_{i-1} a_i)/\mu_i$

end

$x_n = \rho_n$

for  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  do

$x_i = \rho_i - \gamma_i x_{i+1}$

end

output  $(x_i)$

Հեշտ է հաշվարկել, որ ալգորիթմի իրականացումը պահանջում է

$$A_{ops} = 8n - 7 \quad (4.6.6)$$

թվաբանական գործողություն: Այսպիսով, մենք ունենք ըստ կարգի օպտիմալ մեթոդ:

**Գիտողություն 4.6.1 :** Մեր մեթոդը ըստ էության Գաուսի մեթոդի տարբերակ է: Դրա առանձնահատկությունը կայանում է համակարգի մատրիցի կառուցվածքի օգտագործման մեջ: Եթե (4.6.1) համակարգի լուծման համար կիրառենք Գաուսի մեթոդի հիման վրա գրված ծրագիրը, ապա կծախսենք  $\sim 2n^3/3$  գործողություն: Այդ թիվն իր մեջ ընդգրկում է  $\sim 8n$  բովանդակայից և  $\sim 2n^3/3$  անբովանդակ գործողություն (գրոյի բազմապատկում (բաժանում) մի այլ թվով և երկու գրոների գումարում (հանում)): Իսկ եթե (4.6.1) համակարգը լուծվում է **3dSYSTEM** ալգորիթմի հիման վրա գրված ծրագրով, ապա գործողությունների քանակը կլինի  $\sim 8n$  :

Այժմ անցնենք մեթոդի հիմնավորմանը: Վերը մենք արտածել ենք մեթոդի (4.6.4) հաշվարկային բանաձևերը՝ չդնելով որևէ պայման (4.6.1) համակարգի գործակիցների վրա: Սակայն այդ բանաձևերում կան, օրինակ, բաժանման գործողություններ  $d_i - \gamma_{i-1}a_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  արտահայտությունների վրա: Հետևաբար, առաջանում է հետևյալ հարցը. ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն (4.6.1) համակարգի գործակիցները, որպեսզի բացառվի բաժանում գրոյի վրա: Ստորև բերված պնդումը պատասխանում է այդ հարցին:

**Թեորեմ 4.6.1** Դիցուք (4.6.1) համակարգի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$1. d_1 \neq 0, d_n \neq 0, \tag{4.6.7}$$

$$2. a_i \neq 0, b_i \neq 0, 2 \leq i \leq n - 1, \tag{4.6.8}$$

$$3. (ա) |d_1| \geq |b_1|, \tag{4.6.9}$$

$$(բ) |d_i| \geq |a_i| + |b_i|, 2 \leq i \leq n - 1,$$

$$(գ) |d_n| \geq |a_n|,$$

ընդ որում, 3-րդ կետի պայմաններից գոնե մեկում անհավասարությունը խիստ է: Այդ դեպքում  $d_i - \gamma_{i-1}a_i \neq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  :

Ապացույց: Նախ և առաջ ցույց տանք, որ

$$|\gamma_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n - 1 : \tag{4.6.10}$$

Իրոք, համաձայն 3(ա) պայմանի՝

$$|\gamma_1| = \frac{|b_1|}{|d_1|} \leq 1 :$$

Հետագա դատողությունները կկատարվեն ինդուկցիայով: Դիցուք  $|\gamma_{i-1}| \leq 1$  որևէ  $i$ -ի համար, որտեղ  $2 \leq i \leq n - 1$  : Այդ դեպքում, հաշվի առնելով 3(բ) պայմանը, կունենանք

$$|d_i - \gamma_{i-1}a_i| \geq |d_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| \geq |a_i| + |b_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| = \tag{4.6.11}$$

$$(1 - |\gamma_{i-1}|) |a_i| + |b_i| \geq |b_i| :$$



Ուստի

$$|\gamma_i| = \frac{|b_i|}{|d_i - \gamma_{i-1}a_i|} \leq 1 :$$

Այսպիսով, (4.6.10) անհավասարություններն ապացուցված են: Ավելին, (4.6.11)-ից կստանանք՝

$$|d_i - \gamma_{i-1}a_i| \geq |b_i| > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 :$$

Այսինքն,  $d_i - \gamma_{i-1}a_i \neq 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-1$ :

Մնում է ապացուցել, որ  $d_n - \gamma_{n-1}a_n \neq 0$ : Սկզբում ապացուցենք երկու օժանդակ պնդում:

**Պնդում Ա:** Եթե  $|\gamma_{i-1}| < 1$  որևէ  $i$ -ի համար,  $2 \leq i \leq n-1$ , ապա  $|\gamma_{n-1}| < 1$ :

Իրոք,

$$\begin{aligned} |d_i - \gamma_{i-1}a_i| &\geq |d_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| \geq |a_i| + |b_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| = \\ &(1 - |\gamma_{i-1}|)|a_i| + |b_i| > |b_i| \end{aligned}$$

Հետևաբար,

$$|\gamma_i| = \frac{|b_i|}{|d_i - \gamma_{i-1}a_i|} < 1 :$$

Դա նշանակում է, որ եթե  $|\gamma_{i-1}| < 1$  որևէ  $i$ -ի համար,  $2 \leq i \leq n-1$ , ապա բոլոր հաջորդ  $\gamma_i$  մեծությունները բացարձակ արժեքով նույնպես կլինեն մեկից փոքր և, մասնավորաբար,  $|\gamma_{n-1}| < 1$ : Պնդումն ապացուցվեց:

**Պնդում Բ:** Եթե  $|\gamma_{n-1}| < 1$ , ապա  $d_n - \gamma_{n-1}a_n \neq 0$ :

Հակառակը՝ ենթադրենք, որ  $d_n - \gamma_{n-1}a_n = 0$ : Այդ դեպքում

$$|\gamma_{n-1}| = \frac{|d_n|}{|a_n|} \geq 1,$$

ինչը բերում է հակասության: Այսպիսով, պնդումն ապացուցված է:

Շարունակենք հիմնական ապացույցը: Օգտվենք թեորեմի այն ենթադրությունից, որ 3-րդ կետի պայմաններից գոնե մեկում տեղի ունի խիստ անհավասարություն: Բննարկենք բոլոր հնարավոր տարբերակները:

3(ա): Դիցուք  $|d_1| > |b_1|$ : Ուստի

$$|\gamma_1| = \frac{|b_1|}{|d_1|} < 1 :$$

Հետևաբար,  $|\gamma_{n-1}| < 1$  (պնդում Ա) և  $d_n - \gamma_{n-1}a_n \neq 0$  (պնդում Բ):

3(բ): Դիցուք  $|d_i| > |a_i| + |b_i|$  ինչ-որ  $i$ -ի համար, որտեղ  $2 \leq i \leq n-1$ : Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} |d_i - \gamma_{i-1}a_i| &\geq |d_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| > |a_i| + |b_i| - |\gamma_{i-1}| |a_i| = \\ &(1 - |\gamma_{i-1}|)|a_i| + |b_i| \geq |b_i| \end{aligned}$$

անհավասարությունից կստանանք՝

$$|\gamma_i| = \frac{|b_i|}{|d_i - \gamma_{i-1}a_i|} < 1 :$$

Դրանով  $|\gamma_{n-1}| < 1$  (պնդում Ա) և  $d_n - \gamma_{n-1}a_n \neq 0$  (պնդում Բ):

3(գ): Դիցուք  $|d_n| > |a_n|$ : Այստեղից հետևում է, որ  $d_n - \gamma_{n-1}a_n \neq 0$ , քանի որ հակառակ դեպքում կունենանք

$$|\gamma_{n-1}| = \frac{|d_n|}{|a_n|} > 1,$$

ինչը հակասում է վերն ստացված (4.6.10) անհավասարությանը:  $\square$

Այսպիսով, թեորենում ձևակերպված մատրիցի անկյունագծային տարրերի գերիշխումը ապահովում է մեթոդի կոռեկտությունը: Բացի այդ, թեորենի ապացույցի ընթացքում ստացված (4.6.10) անհավասարությունները բացառում են (4.6.5) հակադարձ տեղադրման ժամանակ կլորացման սխալանքների կուտակումը: Դիտարկենք պարզեցված դեպքը: Ենթադրենք, որ  $\gamma_i$  և  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  գործակիցները հաշվված են ճշգրիտ, իսկ  $x_n$ -ի հաշվման ժամանակ թույլ է տրված  $\varepsilon$  սխալանք, այսինքն՝ իրականում ունենք  $x_n^* = x_n + \varepsilon$ -ը: Այդ սխալանքը կազդի մնացած  $x_i$ -երի հաշվման վրա, և մենք կունենանք

$$x_i^* = \rho_i - \gamma_i x_{i+1}^*, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 :$$

Ակնհայտ է, որ  $\varepsilon_i \equiv x_i^* - x_i$  սխալանքները բավարարում են

$$\varepsilon_n = \varepsilon, \quad \varepsilon_i = -\gamma_i \varepsilon_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

անդրադարձ առնչություններին: Այստեղից, ըստ (4.6.10) անհավասարությունների՝

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 :$$

Այսինքն, սխալանքները չեն աճում:

Վերջում նշենք, որ 4.6.1 օրինակում բերված հավասարումների համակարգի մատրիցը բավարարում է 4.6.1 թեորենի պայմաններին:

## 4.7 Իտերացիոն մեթոդներ

Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ մեթոդների համար այլընտրանքային են *իտերացիոն մեթոդները*, որոնց միջոցով արտադրվում է համակարգի ճշգրիտ լուծմանը ձգտող  $x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  վեկտորների հաջորդականություն: Այդ  $x^k$  վեկտորները դիտարկվում են որպես ճշգրիտ լուծման *մոտարկումներ* և հաշվվում են այս կամ այն օրենքով: Օրինակ,

$$Ax = b \tag{4.7.1}$$

համակարգը կարելի է փորձել լուծել

$$x^{k+1} = x^k - \tau (Ax^k - b), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.7.2)$$

մեթոդով, որում մասնակցում է ոչ գրոյական  $\tau$  պարամետրը: Ավելորդ չէ հիշեցնել, որ պետք է կառուցվեն միայն զուգամետ իտերացիոն մեթոդներ, հակառակ դեպքում դրանց օգտագործումը անիմաստ է:

Կամայական (4.7.1) տեսքի համակարգ կարելի է ներկայացնել

$$x = Bx + c \quad (4.7.3)$$

համարժեք տեսքով: Օրինակ, (4.7.2) դեպքում  $B = I - \tau A$  և  $c = \tau b$ : Գիտարկենք (4.7.3) համակարգի լուծման

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.7.4)$$

իտերացիոն մեթոդը, որտեղ  $x^0$ -ն ցանկացած սկզբնական մոտարկում է:

**Գիտողություն 4.7.1 :** Եթե (4.7.4) եղանակով ստացվող վեկտորների հաջորդականությունը զուգամիտում է, ապա այն զուգամիտում է (4.7.3) համակարգի լուծմանը: Իրոք, եթե  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ , ապա անցնելով (4.7.4) հավասարությունում սահմանի, երբ  $k \rightarrow \infty$ , կստանանք՝

$$x^* = Bx^* + c :$$

Չնակերպենք (4.7.4) իտերացիոն մեթոդի զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

**Թեորեմ 4.7.1 :** (4.7.4) իտերացիոն մեթոդը զուգամիտում է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\rho(B) < 1$ , այսինքն՝ երբ  $B$  մատրիցի սեփական արժեքները մոդուլով փոքր են մեկից:

**Ապացույց:** Ունենք՝

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= Bx^k + c = B(Bx^{k-1} + c) + c = B^2x^{k-1} + (B + I)c \\ &= B^2(Bx^{k-2} + c) + (B + I)c = B^3x^{k-2} + (B^2 + B + I)c \\ &= \dots = B^{k+1}x^0 + \left( \sum_{m=0}^k B^m \right) c : \end{aligned}$$

Այստեղից հետևում է, որ  $\{x^k\}_{k=0}^\infty$  հաջորդականությունն ունի սահման այն և միայն այն դեպքում, երբ զուգամիտում է

$$\sum_{m=0}^\infty B^m$$

Նեյմանի շարքը: Իսկ այդ շարքի զուգամիտության համար, համաձայն 3.5.2 թեորեմի, անհրաժեշտ է և բավարար  $\rho(B) < 1$  պայմանը:  $\square$

Իտերացիոն մեթոդի զուգամիտությունը պարզելու համար հաճախ հարմար է օգտվել հետևյալ բավարար պայմանից:

**Թեորեմ 4.7.2 :** Եթե  $B$  մատրիցի որևէ նորմ փոքր է մեկից, ապա (4.7.4) խտրացիոն մեթոդը զուգամետ է:

Ապացույցը անմիջապես հետևում է 3.4.1 և 4.7.1 թեորեմներից:

Օգտվելով վերջին թեորեմից և 3.4 պարագրաֆում մատրիցների տարբեր նորմերի համար ստացված արտահայտություններից՝ կստանանք (4.7.4) խտրացիոն մեթոդի զուգամիտության հետևյալ բավարար պայմանները.

$$\|B\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1, \quad (4.7.5)$$

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1, \quad (4.7.6)$$

$$\|B\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 < 1 : \quad (4.7.7)$$

Գնահատենք (4.7.3) համակարգի ճշգրիտ լուծման  $k$ -րդ մոտարկման սխալանքը: Այնուհետև մենք կօգտագործենք միայն համաձայնեցված մատրիցային և վեկտորական նորմերը (տե՛ս (3.4.13)-ը):

**Թեորեմ 4.7.3 :** Դիցուք  $\|B\| < 1$ : Այդ դեպքում (4.7.4) մեթոդը զուգամիտում է, և ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.

$$\|x - x^k\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^1 - x^0\|, \quad k = 1, 2, \dots : \quad (4.7.8)$$

Ապացույց: Ինչպես հետևում է (4.7.3) և (4.7.4)-ից՝

$$x - x^k = B(x - x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots :$$

Ուստի

$$\|x - x^k\| \leq \|B\| \|x - x^{k-1}\|, \quad k = 1, 2, \dots :$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է, որ

$$\|x - x^k\| \leq \|B\|^k \|x - x^0\|, \quad k = 1, 2, \dots : \quad (4.7.9)$$

Գնահատենք  $\|x - x^0\|$  նորմը.

$$\|x - x^0\| \leq \|x - x^1\| + \|x^1 - x^0\| \leq \|B\| \|x - x^0\| + \|x^1 - x^0\|,$$

$$\|x - x^0\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|x^1 - x^0\| :$$

Վերջին անհավասարությունից և (4.7.9)-ից ստանում ենք (4.7.8) գնահատականը:  $\square$

Պարզենք հետևյալ հարցը. քանի՞ իտերացիա պետք է կատարել մոտավոր լուծումը  $\varepsilon > 0$  ճշտությամբ ստանալու համար: Այսինքն, պահանջվում է գտնել այնպիսի  $k$ , որի համար

$$\|x - x^k\| < \varepsilon :$$

Օգտվենք (4.7.8) գնահատականից: Գրենք այն

$$\|x - x^k\| \leq C \|B\|^k$$

տեսքով, որտեղ  $C \equiv \|x^1 - x^0\|/(1 - \|B\|)$ : Այժմ

$$C \|B\|^k < \varepsilon$$

պայմանից կստանանք, որ

$$k > \frac{\ln(C/\varepsilon)}{\ln(1/\|B\|)} :$$

Հաջորդ պարագրաֆներում մենք կդիտարկենք մի քանի կարևորագույն իտերացիոն մեթոդներ:

## 4.8 Յակոբիի մեթոդը

Դիցուք տրված է

$$Ax = b \tag{4.8.1}$$

համակարգը, որտեղ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի անկյունագծային տարրերը հավասար չեն զրոյի, այսինքն՝  $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ :

Ներկայացնենք  $A$  մատրիցը երեք մատրիցների գումարի տեսքով.

$$A = L + D + U, \tag{4.8.2}$$

որտեղ

$$L \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U \equiv \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n-1n} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8.3}$$

$$D \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում (4.8.1) համակարգը կարելի է գրել

$$Dx = -(L + U)x + b$$

կամ

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (4.8.4)$$

տեսքով: Այստեղից ստանում ենք

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.8.5)$$

իտերացիոն մեթոդը, որը կոչվում է *Յակոբիի մեթոդ*: Օգտվելով (4.8.3)-ում տրված  $L, U$  և  $D$  մատրիցների տեսքից՝ կստանանք  $-D^{-1}(L + U)$  մատրիցը.

$$-D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -\frac{a_{n-1\ n-2}}{a_{n-1\ n-1}} & 0 & -\frac{a_{n-1\ n}}{a_{n-1\ n-1}} \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} : \quad (4.8.6)$$

Գրենք Յակոբիի մեթոդը ըստ բաղադրիչների: Դիցուք

$$x^k = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

վեկտորները հաջորդական մոտարկումներ են, որոնք հաշվվում են (4.8.5) օրենքով: Ելնելով  $-D^{-1}(L + U)$  մատրիցի (4.8.6) տեսքից՝ կարող ենք գրել, որ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.8.7)$$

Նախորդ պարագրաֆում մենք ապացուցել ենք (4.7.4) իտերացիոն մեթոդի զուգամիտության վերաբերյալ 4.7.1 թեորեմը: Որպես այդ թեորեմի հետևանք կստանանք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.8.1 :** *Յակոբիի մեթոդը զուգամիտում է այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$\rho(-D^{-1}(L + U)) < 1 : \quad (4.8.8)$$

Ընդհանուր տեսքի իտերացիոն մեթոդի զուգամիտության (4.7.5)–(4.7.7) բավարար պայմաններից և  $-D^{-1}(L + U)$  մատրիցի (4.8.6) տեսքից ստանում ենք Յակորբի մեթոդի զուգամիտության հետևյալ բավարար պայմանները.

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (4.8.9)$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (4.8.10)$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1 : \quad (4.8.11)$$

Այսպիսով, եթե համակարգի մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում ըստ տողի կամ ըստ սյունակի, ապա Յակորբի մեթոդը զուգամիտում է: Ձևակերպենք և ապացուցենք համապատասխան պնդումները:

**Թեորեմ 4.8.2 :** *Դիցուք գոյություն ունի այնպիսի  $0 < q < 1$  հաստատուն, որ*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq q|a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.8.12)$$

*Այդ դեպքում Յակորբի մեթոդը զուգամիտում է, և տեղի ունի*

$$\|x - x^k\|_\infty \leq q^k \|x - x^0\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8.13)$$

*գնահատականը:*

**Ապացույց:** Համաձայն (4.8.4) և (4.8.5) բանաձևերի ունենք

$$x - x^k = -D^{-1}(L + U)(x - x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots : \quad (4.8.14)$$

Վերջինից հետևում է

$$\|x - x^k\|_\infty \leq \|D^{-1}(L + U)\|_\infty \|x - x^{k-1}\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

անհավասարությունը: Ելնելով  $-D^{-1}(L + U)$  մատրիցի (4.8.6) տեսքից և հաշվի առնելով (4.8.12) պայմանները՝ գնահատենք  $D^{-1}(L + U)$  մատրիցի նորմը.

$$\|D^{-1}(L + U)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq q :$$

Այսպիսով, հանգում ենք

$$\|x - x^k\|_\infty \leq q \|x - x^{k-1}\|_\infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8.15)$$

անդրադարձ անհավասարություններին, որոնցից անմիջապես հետևում է (4.8.13) գնահատականը:  $\square$

**Թեորեմ 4.8.3 :** Դիցուք զոյություն ունի այնպիսի  $0 < q < 1$  հաստատուն, որ

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \leq q|a_{jj}|, \quad j = 1, 2, \dots, n : \quad (4.8.16)$$

Այդ դեպքում Յակոբիի մեթոդը զուգամիտում է, և ճիշտ է

$$\|x - x^k\|_1 \leq C q^k \|x - x^0\|_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8.17)$$

գնահատականը, որտեղ  $C \equiv \max_{1 \leq j \leq n} |a_{jj}| / \min_{1 \leq j \leq n} |a_{jj}| :$

Ապացույց: Գրենք վերն ստացված (4.8.14) առնչությունը

$$D(x - x^k) = -(L + U)(x - x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

տեսքով: Ինչպես հետևում է  $A$  մատրիցի (4.8.2) վերլուծությունից,

$$-(L + U) = D - A = (I - AD^{-1})D :$$

Հետևաբար,

$$D(x - x^k) = (I - AD^{-1})D(x - x^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

որտեղից էլ ստանում ենք

$$\|D(x - x^k)\|_1 \leq \|I - AD^{-1}\|_1 \|D(x - x^{k-1})\|_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8.18)$$

անհավասարությունը: Քանի որ

$$I - AD^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

ապա օգտագործելով (4.8.16) պայմանները, կարող ենք գնահատել այդ մատրիցի նորմը.

$$\|I - AD^{-1}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \leq q : \quad (4.8.19)$$

Այսպիսով, (4.8.18)-ից և (4.8.19)-ից ստանում ենք

$$\|D(x - x^k)\|_1 \leq q \|D(x - x^{k-1})\|_1, \quad k = 1, 2, \dots$$



անդրադարձ անհավասարությունները և, որպես հետևանք՝

$$\|D(x - x^k)\|_1 \leq q^k \|D(x - x^0)\|_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8.20)$$

գնահատականը:

Դժվար չէ ապացուցել, որ կամայական  $z$  վեկտորի համար ճիշտ են

$$\min_{1 \leq j \leq n} |a_{jj}| \cdot \|z\|_1 \leq \|Dz\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} |a_{jj}| \cdot \|z\|_1$$

անհավասարությունները: Օգտագործելով այդ անհավասարությունները՝ (4.8.20)-ից կստանանք (4.8.17) գնահատականը:  $\square$

**Դիտողություն 4.8.1 :** *Համակարգի մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխումը՝ ըստ տողի կամ ըստ սյունակի, անհրաժեշտ պայման չէ Յակոբիի մեթոդի զուգամիտության համար: Իրոք,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+a \\ 1-a & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < a < 1$$

մատրիցը չունի անկյունագծային գերիշխում, բայց Յակոբիի մեթոդը զուգամետ է, որովհետև

$$-D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -1-a \\ -1+a & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցի  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  սեփական արժեքները բացարձակ արժեքով փոքր են մեկից՝

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1-a^2} < 1 :$$

## 4.9 Գաուս-Չեյդելի մեթոդը

Յակոբիի մեթոդի հետ մեկտեղ գործնականում լայն կիրառություն ունի մեկ այլ իտերացիոն մեթոդ՝ *Գաուս-Չեյդելի մեթոդը*:

Դիտարկենք

$$Ax = b \quad (4.9.1)$$

գծային հավասարումների համակարգը, որտեղ  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն այնպիսին է, որ  $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ : Յակոբիի մեթոդում հաջորդական մոտարկումների բաղադրիչները հաշվվում են (4.8.7) բանաձևերով, այն է՝

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9.2)$$

տեսքով: Եթե ընդունենք, որ  $(k+1)$ -րդ մոտարկման բաղադրիչները հաշվվում են հաջորդաբար՝ դրանց համարների աճման կարգով, ապա  $x_i^{(k+1)}$ -ի հաշվման ժամանակ

արդեն ունենք հաշված  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$  բաղադրիչները: Տեղադրելով (4.9.2)-ում այդ արժեքները  $x_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, i-1$  արժեքների փոխարեն՝ կստանանք *Գաուս-Չեյդելի մեթոդի* բանաձևերը.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.9.3)$$

Այնուհետև, օգտվելով  $A$  մատրիցի (4.8.2) վերլուծությունից, մեթոդը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ.

$$x^{k+1} = -(L + D)^{-1} U x^k + (L + D)^{-1} b, \quad k = 0, 1, \dots : \quad (4.9.4)$$

Գրելով մեթոդը (4.9.4) տեսքով, որպես 4.7.1 ընդհանուր թեորեմի հետևանք ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.9.1 :** *Գաուս-Չեյդելի մեթոդի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է  $L$  բավարար, որ*

$$\rho(-(L + D)^{-1} U) < 1 : \quad (4.9.5)$$

Ինչպես  $L$  Յակոբիի մեթոդում, եթե համակարգի մատրիցն ունի անկյունագծային գերիշխում, ապա Գաուս-Չեյդելի մեթոդը զուգամիտում է:

**Թեորեմ 4.9.2 :** *Դիցուք զոյություն ունի այնպիսի  $0 < q < 1$  հաստատուն, որ*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq q |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.9.6)$$

*Այդ դեպքում Գաուս-Չեյդելի մեթոդը զուգամիտում է, և տեղի ունի*

$$\|x - x^k\|_{\infty} \leq q^k \|x - x^0\|_{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.9.7)$$

*զնահատականը:*

Ապացույց: Գրենք (4.9.1) հավասարումների համակարգը

$$x_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9.8)$$

տեսքով: Դիցուք

$$z^k = \begin{bmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{bmatrix},$$

որտեղ  $z_i^{(k)} \equiv x_i - x_i^{(k)}$ -ն խտրացիայի  $k$ -րդ քայլի սխալանքն է, այսինքն՝  $z^k = x - x^{(k)}$  : Այդ դեպքում (4.9.3)-ից և (4.9.8)-ից կունենանք

$$z_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.9.9)$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} |z_i^{(k+1)}| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |z_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |z_j^{(k)}| \\ &\leq \|z^{k+1}\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| + \|z^k\|_\infty \cdot \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n : \end{aligned} \quad (7.9.10)$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$p_1 \equiv 0, \quad p_i \equiv \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$r_i \equiv \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad r_n \equiv 0 :$$

Ըստ այդմ, (4.9.10)-ից կստանանք

$$|z_i^{(k+1)}| \leq p_i \|z^{k+1}\|_\infty + r_i \|z^k\|_\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

անհավասարությունները: Գիցուք  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq n$  այնպիսին է, որ

$$\|z^{k+1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i^{(k+1)}| = |z_{i_0}^{(k+1)}| \leq p_{i_0} \|z^{k+1}\|_\infty + r_{i_0} \|z^k\|_\infty :$$

Հետևաբար

$$\|z^{k+1}\|_\infty \leq \frac{r_{i_0}}{1 - p_{i_0}} \|z^k\|_\infty : \quad (4.9.11)$$

Քանի որ, համաձայն (4.9.6) պայմանների,

$$p_{i_0} + r_{i_0} \leq q,$$

ապա

$$\frac{r_{i_0}}{1 - p_{i_0}} \leq q : \quad (4.9.12)$$

Համատեղելով (4.9.11)-ը և (4.9.12)-ը ստանում ենք

$$\|z^{k+1}\|_\infty \leq q \|z^k\|_\infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

անհավասարությունները, որոնցից անմիջապես հետևում է (4.9.7) գնահատականը:  $\square$

**Թեորեմ 4.9.3 :** Դիցուք զոյություն ունի այնպիսի  $0 < q < 1$  հաստատուն, որ

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \leq q|a_{jj}|, \quad j = 1, 2, \dots, n : \tag{4.9.13}$$

Այդ դեպքում Գաուս-Չեյդեյի մեթոդը զուգամիտում է, և ծիշտ է

$$\|x - x^k\|_1 \leq C q^k \|x - x^0\|_1, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.9.14}$$

զնահատականը, որտեղ  $C \equiv \max_{1 \leq j \leq n} (1 - r_j)|a_{jj}| / \min_{1 \leq j \leq n} (1 - r_j)|a_{jj}| :$

Ապացույց: Վերադառնանք նախորդ թեորեմի ապացուցման ընթացքում ստացված (4.9.9) առնչություններին: Գրենք այդ առնչությունները

$$a_{ii}z_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jj} z_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jj} z_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{4.9.15}$$

տեսքով: Ներմուծենք

$$w^k \equiv D z^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

վեկտորները: Քանի որ  $D$ -ն անկյունագծային մատրից է, ապա

$$w^k = \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ \vdots \\ w_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \text{որտեղ } w_j^{(k)} = a_{jj} z_j^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n : \tag{4.9.16}$$

Այդ դեպքում (4.9.15) առնչությունները կգրվեն հետևյալ կերպ.

$$w_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} w_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{jj}} w_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Այստեղից նախ ստանում ենք

$$|w_i^{(k+1)}| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| |w_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| |w_j^{(k)}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

անհավասարությունները, որոնցից բխում է

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |w_i^{(k+1)}| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| |w_j^{(k+1)}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| |w_j^{(k)}| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} |w_j^{(k+1)}| \sum_{i=j+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| + \sum_{j=2}^n |w_j^{(k)}| \sum_{i=1}^{j-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| : \end{aligned} \tag{4.9.17}$$

անհավասարությունը: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$p_1 \equiv 0, \quad p_j \equiv \sum_{i=1}^{j-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

$$r_j \equiv \sum_{i=j+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad r_n \equiv 0 :$$

Օգտագործելով այս նշանակումները՝ (4.9.17)-ից կստանանք

$$\sum_{i=1}^n |w_i^{(k+1)}| \leq \sum_{j=1}^n (r_j |w_j^{(k+1)}| + p_j |w_j^{(k)}|)$$

անհավասարությունը, որից, իր հերթին, հետևում է

$$\sum_{j=1}^n (1 - r_j) |w_j^{(k+1)}| \leq \sum_{j=1}^n p_j |w_j^{(k)}| \quad (4.9.18)$$

անհավասարությունը: Քանի որ համակարգի մատրիցն ունի անկյունագծային գերիշխում (տե՛ս (4.9.13)-ը), ապա

$$p_j \leq q(1 - r_j), \quad j = 1, 2, \dots, n :$$

Հետևաբար (4.9.18)-ից կստանանք

$$\sum_{j=1}^n (1 - r_j) |w_j^{(k+1)}| \leq q \sum_{j=1}^n (1 - r_j) |w_j^{(k)}|, \quad k = 0, 1, \dots$$

անհավասարությունները, որոնց հիման վրա հեշտությամբ դուրս է բերվում

$$\sum_{j=1}^n (1 - r_j) |w_j^{(k)}| \leq q^k \sum_{j=1}^n (1 - r_j) |w_j^{(0)}|, \quad k = 1, 2, \dots$$

գնահատականը: Հաշվի առնելով (4.9.16) նշանակումները՝ վերջին գնահատականը կարելի է գրել

$$\sum_{j=1}^n (1 - r_j) |a_{jj}| |z_j^{(k)}| \leq q^k \sum_{j=1}^n (1 - r_j) |a_{jj}| |z_j^{(0)}|, \quad k = 1, 2, \dots$$

տեսքով: Այստեղից ստանում ենք

$$\min_{1 \leq j \leq n} (1 - r_j) |a_{jj}| \cdot \|z^k\|_1 \leq q^k \max_{1 \leq j \leq n} (1 - r_j) |a_{jj}| \cdot \|z^0\|_1$$

անհավասարությունը, որից անմիջապես հետևում է (4.9.14) գնահատականը:  $\square$

**Գիտողություն 4.9.1 :** Ըստ տողի կամ ըստ սյունակի անկյունագծային գերիշխումը անհրաժեշտ պայմանն է *Գաուս-Չեյդելի մեթոդի* զուգամիտության համար: Իրոք,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

մատրիցն անկյունագծային գերիշխում չունի, բայց քանի որ

$$-(L + D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

մատրիցի

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{9 - i\sqrt{15}}{24}, \quad \lambda_3 = \frac{9 + i\sqrt{15}}{24}$$

սեփական արժեքները բացարձակ արժեքով փոքր են մեկից, ապա *Գաուս-Չեյդելի մեթոդը* կզուգամիտի:

Այժմ ապացուցենք մեկ կարևոր պնդում:

**Թեորեմ 4.9.4 :** Դրական որոշյալ մատրիցով համակարգերի համար *Գաուս-Չեյդելի մեթոդը* զուգամիտում է:

Ապացույց: Դիցուք  $\lambda$ -ն  $(L + D)^{-1}U$  մատրիցի սեփական արժեքն է, այսինքն՝

$$(L + D)^{-1}Ue = \lambda e,$$

որտեղ  $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ -ն համապատասխան սեփական վեկտորն է: Վերջին հավասարության երկու կողմը ձախից բազմապատկելով  $(L + D)$  մատրիցով՝ կստանանք

$$Ue = \lambda(L + D)e :$$

հավասարությունը: Այստեղից՝

$$(Ue, e) = \lambda(Le, e) + \lambda(De, e) = \lambda(e, Ue) + \lambda(De, e) \quad (4.9.19)$$

(համակարգի  $A$  մատրիցը սիմետրիկ է, ուստի  $L^T = U$ ): Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$(Ue, e) \equiv \gamma = \alpha + i\beta, \quad (De, e) = \sum_{i=1}^n a_{ii}|e_i|^2 \equiv \sigma > 0$$

(տե՛ս լեմմա 3.3.5): Քանի որ  $(e, Ue) = \overline{(Ue, e)} = \overline{\gamma}$ , ապա (4.9.19)-ից կստանանք

$$\gamma = \lambda \bar{\gamma} + \lambda \sigma$$

հավասարությունը, որտեղից էլ

$$\lambda = \frac{\gamma}{\bar{\gamma} + \sigma} : \quad (4.9.20)$$

Ապացուցենք, որ  $|\lambda| < 1$ : Ինչպես հետևում է (4.9.20)-ից,

$$|\lambda| = \frac{|\gamma|}{|\bar{\gamma} + \sigma|} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha + \sigma)^2 + \beta^2}} :$$

Բավական է ցույց տալ, որ ճիշտ է

$$\alpha^2 + \beta^2 < (\alpha + \sigma)^2 + \beta^2$$

անհավասարությունը կամ, ինչը նույնն է՝

$$2\alpha + \sigma > 0$$

անհավասարությունը: Իրոք, մատրիցի

$$A = L + D + U = U^T + D + U$$

վերլուծությունից ունենք

$$\begin{aligned} (Ae, e) &= (U^T e, e) + (De, e) + (Ue, e) = (e, Ue) + (De, e) + (Ue, e) \\ &= \overline{(Ue, e)} + (De, e) + (Ue, e) = \bar{\gamma} + \sigma + \gamma = 2\alpha + \sigma > 0 \end{aligned}$$

(քանի որ  $e \neq 0$ , ապա  $(Ae, e) > 0$ ):  $\square$

Վերջում նշենք, որ Գաուս-Չեյդելի մեթոդը և նրա ընդհանրացումները հաճախ կիրառվում են մեծ չափի գծային հանրահաշվական համակարգերը լուծելիս: Այդպիսի համակարգեր առաջանում են, մասնավորապես, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների թվային լուծման ժամանակ:

## 4.10 Յակոբիի և Գաուս-Չեյդելի մեթոդների համեմատումը

Յակոբիի և Գաուս-Չեյդելի մեթոդների զուգամիտության պայմանները, ընդհանրապես ասած, չեն համընկնում: Այլ կերպ ասած, գոյություն ունեն համակարգեր, որոնց համար Գաուս-Չեյդելի մեթոդը զուգամետ է, իսկ Յակոբիի մեթոդը՝ տարամետ, և հակառակը: Բերենք օրինակներ:

**Օրինակ 4.10.1 :**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցով համակարգերի համար ինչպես Յակոբիի, այնպես էլ Գաուս-Չեյդելի մեթոդները զուգամետ են (անկյունագծային գերիշխում):  $\diamond$

**Օրինակ 4.10.2 :**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} :$$

Այս դեպքում  $L$  Յակոբիի,  $U$  Գաուս-Չեյդելի մեթոդները տարամետ են:  $\diamond$

**Օրինակ 4.10.3 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} :$$

Գաուս-Չեյդելի մեթոդը զուգամետ է, իսկ Յակոբիի մեթոդը՝ տարամետ:  $\diamond$

**Օրինակ 4.10.4 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} :$$

Յակոբիի մեթոդը զուգամետ է, իսկ Գաուս-Չեյդելի մեթոդը՝ տարամետ:  $\diamond$

Թեև երկրորդ կարգի համակարգերը սովորաբար իտերացիոն մեթոդներով չեն լուծում, ցույց տանք, որ  $n = 2$ -ի դեպքում Յակոբիի և Գաուս-Չեյդելի մեթոդների զուգամիտության պայմանները համընկնում են, այսինքն՝ նրանք զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ: Դիցուք

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (a_{11}, a_{22} \neq 0) :$$

Յակոբիի մեթոդում իտերացիաները կատարող մատրիցն է՝

$$B_J \equiv -D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցի սեփական արժեքները

$$\lambda^2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$



հավասարման արմատներն են: Ուստի

$$\rho(B_J) = \sqrt{\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right|} : \quad (4.10.1)$$

Գաուս-Չեյդելի մեթոդում իտերացիաները կատարող մատրիցը հետևյալն է՝

$$B_{GS} \equiv -(L + D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix} :$$

Այս մատրիցի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}},$$

ուստի

$$\rho(B_{GS}) = \left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| : \quad (4.10.2)$$

Այսպիսով, (4.10.1)-ից և (4.10.2)-ից ստանում ենք, որ  $\rho^2(B_J) = \rho(B_{GS})$ : Այսինքն՝  $n = 2$  դեպքում Յակոբիի և Գաուս-Չեյդելի մեթոդների զուգամիտության պայմանները համընկնում են:

Հաճախ անփորձ հաշվարկ կատարողը ունենում է սխալ կարծիք, թե Գաուս-Չեյդելի մեթոդը զուգամիտում է ավելի արագ, քան Յակոբիի մեթոդը: Ինչպես ցույց է տալիս 4.10.4 օրինակը, դա ամենևին էլ այդպես չէ: Այդ մոլորության աղբյուրներից մեկն այն է, որ անկյունագծային գերիշխումով մատրիցների դեպքում Գաուս-Չեյդելի մեթոդը իրոք զուգամիտում է ավելի արագ, քան Յակոբիի մեթոդը (տես, օրինակ՝ [47]):

**Օրինակ 4.10.5 :** Դիտարկենք

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 31 \\ 26 \\ 19 \end{bmatrix}$$

համակարգը, որի ճշգրիտ լուծումը  $x = [4, 3, 2, 1]^T$  վեկտորն է: Ընդունելով  $x^{(0)} = 0$  սկզբնական մոտարկումը՝ Յակոբիի մեթոդով 10, 20 և 30 իտերացիաներից հետո համապատասխանորեն կտանանք

$$x^{(10)} = \begin{bmatrix} 3.902 \\ 2.899 \\ 1.914 \\ 0.935 \end{bmatrix}, \quad x^{(20)} = \begin{bmatrix} 3.9965 \\ 2.9965 \\ 1.9970 \\ 0.9977 \end{bmatrix}, \quad x^{(30)} = \begin{bmatrix} 3.99988 \\ 2.99987 \\ 1.99989 \\ 0.99992 \end{bmatrix} :$$

Գաուս-Չեյդելի մեթոդը կիրառելիս ստանում ենք

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 4.00131 \\ 2.99929 \\ 1.99990 \\ 0.99995 \end{bmatrix}, \quad x^{(10)} = \begin{bmatrix} 4.00000142 \\ 2.999999878 \\ 2.000000018 \\ 0.999999993 \end{bmatrix} :$$

Համեմատությունը խոսում է Գաուս-Չեյդելի մեթոդի օգտին:  $\diamond$

Յակոբիի մեթոդի նկատմամբ Գաուս-Չեյդելի մեթոդի առավելություններից է այն, որ  $i$ -րդ բաղադրիչի հաշված նոր արժեքը կարող է գրվել համակարգի հիշողության մեջ հին արժեքի տեղում, այսինքն՝  $x_i^{(k+1)}$ -ը գրվում է  $x_i^{(k)}$ -ի փոխարեն: Գա հեշտացնում է ծրագրավորումը և խնայում է համակարգի հիշողությունը:

Մյուս կողմից, Յակոբիի մեթոդն ունի այն առավելությունը, որ բոլոր բաղադրիչների շտկումները կարող են կատարվել միաժամանակ, և այդ պատճառով հաշվման ընթացքը ակնհայտորեն զուգահեռացվում է: Սակայն որոշ դեպքերում հաշվողական ընթացքի զուգահեռացման կարելի է հասնել նաև Գաուս-Չեյդելի մեթոդում (տե՛ս, օրինակ, [7, 42]):

## 4.11 Ռելաքսացիայի մեթոդը

Վերադառնանք 4.9 պարագրաֆում դիտարկված Գաուս-Չեյդելի մեթոդին: Գրենք մեթոդի (4.9.3) հաշվարկային բանաձևերը հետևյալ տեսքով.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left( - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.11.1)$$

Այս բանաձևերի փակագծերի ներսում գրված

$$- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

արտահայտությունը  $Ax = b$  համակարգի  $i$ -րդ հավասարման ձախ և աջ մասերի *անհամաձայնությունն է*, երբ այդ համակարգի մեջ տեղադրվում է ընթացիկ մոտավոր լուծումը: Ինչպես հեշտ է տեսնել (4.11.1)-ից, համակարգի  $i$ -րդ անհայտի  $x_i^{(k+1)}$  մոտարկումը ստացվում է  $x_i^{(k)}$  նախորդ մոտարկումից՝ վերջինին գումարելով  $a_{ii}$  գործակցի վրա բաժանված անհամաձայնությունը:

Գաուս-Չեյդելի մեթոդի զուգամիտությունը արագացնելու նպատակով (4.11.1) խտրացիոն սխեմայի մեջ ներմուծվում է  $\omega$  պարամետր այնպես, որ

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (4.11.2)$$

Ստացված (4.11.2) մեթոդը անվանում են *ռելաքսացիայի մեթոդ* (լատիներեն *relaxatio* նշանակում է նվազում, թուլացում): Այս ամենի իմաստն այն է, որ  $\omega$  պարամետրի ընտրության շնորհիվ կատարվում է անհամաձայնության նվազեցում:

Օգտվելով  $A$  մատրիցի (4.8.2) վերլուծությունից՝ (4.11.2) մեթոդը կարելի է գրել նաև

$$x^{k+1} = (\omega L + D)^{-1} ((1 - \omega)D - \omega U) x^k + \omega(\omega L + D)^{-1} b \quad (4.11.3)$$

տեսքով: Ընդգծենք, որ  $\Omega$ -աուս-Չեյդելի մեթոդը ռելաքսացիայի մեթոդի մասնավոր դեպքն է, երբ  $\omega = 1$ :

Այժմ անցնենք ռելաքսացիայի մեթոդի զուգամիտության հարցի քննարկմանը:

Պարզվում է, որ մեթոդի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է, որ  $\omega \in (0, 2)$  (տե՛ս [52, 65] մենագրությունները): Իսկ որոշ դասի համակարգերի դեպքում ռելաքսացիայի պարամետրի նկատմամբ այդ պայմանը նաև բավարար է: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.11.1 :** *Երե համակարգի մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա ռելաքսացիայի մեթոդի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\omega \in (0, 2)$ :*

Ապացույց: Գրենք (4.11.3) ռելաքսացիայի մեթոդը

$$x^{k+1} = (I - \omega(\omega L + D)^{-1} A) x^k + \omega(\omega L + D)^{-1} b \quad (4.11.4)$$

համարժեք տեսքով: Ըստ 4.7.1 թեորեմի՝ (4.11.4) իտերացիոն մեթոդի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$G \equiv I - \omega(\omega L + D)^{-1} A$$

մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը փոքր լինի մեկից: Եթե ներմուծենք

$$Q \equiv L + \frac{1}{\omega} D \quad (4.11.5)$$

մատրիցը, ապա

$$G = I - Q^{-1} A : \quad (4.11.6)$$

Գիցուք  $\lambda$ -ն  $G$  մատրիցի սեփական արժեք է և

$$Gx = \lambda x, \quad (4.11.7)$$

որտեղ  $x \neq 0$ : Գիտարկենք

$$y \equiv (I - G)x \quad (4.11.8)$$

վեկտորը: Ինչպես բխում է (4.11.7)-ից,

$$y = (1 - \lambda)x : \quad (4.11.9)$$

Այնուհետև, (4.11.6)-ից և (4.11.8)-ից հետևում է, որ

$$Qy = Ax : \quad (4.11.10)$$

Հաշվի առնելով  $Q$  մատրիցի (4.11.5) սահմանումը՝ կստանանք

$$(Ax, y) = (Qy, y) = (Ly, y) + \frac{1}{\omega}(Dy, y) : \quad (4.11.11)$$

Այժմ դիտարկենք  $(Q - A)y$  վեկտորը: Օգտվելով (4.11.5)-ից և  $A$  մատրիցի (4.8.2) վերլուծությունից, ունենք

$$(Q - A)y = \left( \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D - U \right) y : \quad (4.11.12)$$

Մյուս կողմից, ըստ (4.11.10) հավասարության

$$(Q - A)y = A(x - y),$$

իսկ քանի որ  $x - y = \lambda x$  (տե՛ս (4.11.9)-ը), ապա

$$(Q - A)y = A(\lambda x) = AGx : \quad (4.11.13)$$

Համեմատելով (4.11.12) և (4.11.13) հավասարությունները, գալիս ենք

$$AGx = \left( \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D - U \right) y$$

հավասարությանը: Այնուհետև, հիշելով, որ  $A$  մատրիցը սիմետրիկ է, կստանանք

$$(y, AGx) = \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) (y, Dy) - (y, Uy) = \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) (Dy, y) - (Ly, y) : \quad (4.11.14)$$

Այսպիսով, (4.11.11) և (4.11.14) հավասարություններից ունենք

$$(Ax, y) + (y, AGx) = \left( \frac{2}{\omega} - 1 \right) (Dy, y) :$$

Ձևափոխենք ստացված հավասարության ձախ մասը: Օգտվելով (4.11.7)-ից և (4.11.9)-ից, կստանանք

$$(Ax, y) + (y, AGx) = (Ax, (1 - \lambda)x) + ((1 - \lambda)x, A(\lambda x)) = (1 - |\lambda|^2)(Ax, x) :$$

Ուստի

$$(1 - |\lambda|^2)(Ax, x) = \left( \frac{2}{\omega} - 1 \right) (Dy, y) : \quad (4.11.15)$$

Անցնենք ապացուցման վերջին փուլին: Նախ նշենք, որ (4.11.8)-ում որաշված  $y$  վեկտորը զրոյական չէ: Իրոք, հակառակ դեպքում (4.11.10) հավասարությունից կհետևեր, որ  $Ax = 0$ , ինչը հնարավոր չէ, քանի որ  $x \neq 0$ : Պարզ է, որ  $(Ax, x) > 0$ : Քանի որ դրական որոշյալ  $A$  մատրիցի անկյունագծային տարրերը դրական են (լե՛մնա 3.3.5), ապա

$$(Dy, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii}|y_i|^2 > 0 :$$

Այսպիսով, (4.11.15) հավասարությունից գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը.

ա) եթե  $|\lambda| < 1$ , ապա  $\frac{2}{\omega} - 1 > 0$ , այսինքն՝  $0 < \omega < 2$ ,

բ) եթե  $0 < \omega < 2$ , ապա  $\frac{2}{\omega} - 1 > 0$ , իսկ դա նշանակում է, որ  $|\lambda| < 1$ :  $\square$

Ընդհանուր դեպքում ռելաքսացիայի պարամետրի  $\omega = \omega_{opt}$  օպտիմալ արժեքի որոշման խնդիրը լուծված չէ: Գործնականում այդ պարամետրը գտնում են փորձնականորեն: Սակայն հարկ է նշել, որ  $\omega_{opt} \in (1, 2)$  (տե՛ս, օրինակ, [52, 80]): Եթե  $\omega \in (1, 2)$ , ապա (4.11.2) մեթոդը անվանում են *հաջորդական վերին ռելաքսացիայի մեթոդ* կամ *SOR-մեթոդ* (անգլերեն *successive over relaxation method* անունից): Երբ  $\omega \in (0, 1)$ , մեթոդը հաճախ անվանում են *ստորին ռելաքսացիայի մեթոդ*: Բայց քանի որ այդ դեպքում մեթոդի արդյունավետությունը ցածր է, *SOR-մեթոդ* անունը վերջերս վերագրում են (4.11.2) մեթոդների ամբողջ ընտանիքին, այսինքն, երբ  $\omega \in (0, 2)$ :

Պարզ ձևափոխությունների օգնությամբ (4.11.4) ռելաքսացիայի մեթոդը կարելի է ներկայացնել նաև

$$(\omega L + D) \frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} = -Ax^k + b \quad (4.11.16)$$

տեսքով:

## 4.12 Ռիչարդսոնի մեթոդը

Գիցուք ունենք դրական որոշյալ մատրիցով

$$Ax = b \quad (4.12.1)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Այդ համակարգի լուծման համար դիտարկենք

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} = -Ax^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12.2)$$

խտրացիոն մեթոդը, որտեղ  $\tau$ -ն դրական պարամետր է (ստորև մենք կքննարկենք այդ պարամետրի ընտրության հարցը): Մեթոդը կարելի է գրել նաև

$$x^{k+1} = (I - \tau A)x^k + \tau b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12.3)$$

կանոնական տեսքով:

Գիցուք  $z^k$ -ն խտրացիայի  $k$ -րդ քայլում ստացված սխալանքն է՝  $z^k \equiv x - x^k$ : Ինչպես հետևում է (4.12.1)-ից և (4.12.3)-ից, սխալանքները բավարարում են

$$z^{k+1} = (I - \tau A)z^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12.4)$$

առնչություններին: Այնուհետև բոլոր գնահատականները կկատարենք վեկտորական և, համապատասխանորեն, մատրիցային  $l_2$ -նորմում: Վերը նշված (4.12.4) առնչություններից կստանանք

$$\|z^{k+1}\| \leq \|I - \tau A\| \|z^k\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

անդրադարձ անհավասարությունները, որոնցից հետևում է

$$\|z^k\| \leq \|I - \tau A\|^k \|z^0\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.12.5)$$

գնահատականը:

Այժմ գնահատենք  $I - \tau A$  սիմետրիկ մատրիցի նորմը: Քանի որ  $A$  մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա դրա  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  սեփական արժեքները դրական են.

$$0 < \lambda_{\min} \equiv \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \equiv \lambda_{\max} :$$

Հետադարձ կարելի է համոզվել, որ

$$\mu_i \equiv 1 - \tau \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

թվերը  $I - \tau A$  մատրիցի սեփական արժեքներն են, ընդ որում

$$1 - \tau \lambda_{\max} \leq \mu_i \leq 1 - \tau \lambda_{\min}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Այս գնահատականների հիման վրա, օգտվելով սիմետրիկ մատրիցի նորմի համար ստացված (3.4.21) արտահայտությունից, կարող ենք եզրակացնել, որ

$$\|I - \tau A\| = \max(|1 - \tau \lambda_{\min}|, |1 - \tau \lambda_{\max}|) : \quad (4.12.6)$$

Ինչպես երևում է (4.12.5) գնահատականից, մեթոդը զուգամիտում է, եթե  $\|I - \tau A\| < 1$ : Համաձայն (4.12.6)-ի, ընտրելով  $\tau$  պարամետրը

$$\max(|1 - \tau \lambda_{\min}|, |1 - \tau \lambda_{\max}|) < 1$$

պայմանից, հանգում ենք հետևյալ պնդմանը:

**Թեորեմ 4.12.1 :** *Եթե*

$$\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad (4.12.7)$$

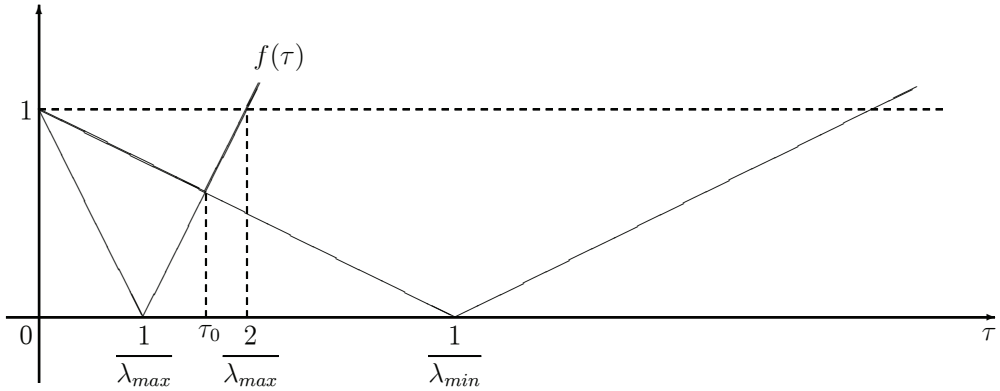
*ապա (4.12.2) մեթոդը զուգամետ է:*

Այժմ քննարկենք (4.12.2) իտերացիոն մեթոդում  $\tau$  պարամետրի օպտիմալ արժեքի որոշման հարցը: Դնենք հետևյալ խնդիրը.

*գտնել պարամետրի  $\tau = \tau_0$  արժեքը, որի համար*

$$\|I - \tau_0 A\| = \min_{\tau > 0} \|I - \tau A\| :$$

Նկ.4.12.1-ում բերված է  $f(\tau) \equiv \max(|1 - \tau\lambda_{min}|, |1 - \tau\lambda_{max}|)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:



**Նկ. 4.12.1**  $f(\tau) = \max(|1 - \tau\lambda_{min}|, |1 - \tau\lambda_{max}|)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Գժվար չէ տեսնել, որ պարամետրի  $\tau_0$  օպտիմալ արժեքը որոշվում է

$$1 - \tau\lambda_{min} = -1 + \tau\lambda_{max}$$

հավասարումից, այսինքն`

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} : \tag{4.12.8}$$

Այդ դեպքում

$$\|I - \tau_0 A\| = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \tag{4.12.9}$$

և (4.12.5) գնահատականը կգրվի

$$\|z^k\| \leq \left( \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^k \|z^0\|, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.12.10}$$

տեսքով:

**Գիտողություն 4.12.1 :** Գործնականում  $\lambda_{min}$  և  $\lambda_{max}$  սեփական արժեքների փոխարեն հաճախ հայտնի են լինում դրանց գնահատականները.

$$m \leq \lambda_{min}, \quad \lambda_{max} \leq M :$$

Այդ դեպքում (4.12.8)-ի փոխարեն, բնականաբար, վերցնում են

$$\tau_0 = \frac{2}{M + m} :$$

Համապատասխանաբար`

$$\|I - \tau_0 A\| = \frac{M - m}{M + m} :$$

Օպտիմալ պարամետրի ընտրությամբ (4.12.2) իտերացիոն մեթոդը կրում է Ռիչարդսոնի մեթոդ անունը:

Վերջում քննարկենք հետևյալ հարցը.

*քանի՞ իտերացիա պետք է կատարել Ռիչարդսոնի մեթոդում, որպեսզի*

$$\|z^k\| < \varepsilon \|z^0\|,$$

*որտեղ  $\varepsilon$ -ը բավականաչափ փոքր դրական թիվ է:*

Օգտվելով (4.12.10) գնահատականից՝ որոշենք  $k$  թիվը

$$\left( \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^k < \varepsilon \quad (4.12.11)$$

պայմանից: Նշանակենք

$$c \equiv \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$$

և գրենք (4.12.11) անհավասարությունը

$$\left( \frac{1-c}{1+c} \right)^k < \varepsilon$$

տեսքով: Լոգարիթմելով անհավասարության երկու կողմը՝ կստատանք

$$k \ln \left( \frac{1-c}{1+c} \right) < \ln \varepsilon \quad (4.12.12)$$

անհավասարությունը:

Ակնհայտ է, որ  $c \leq 1$ : Սակայն  $c = 1$  դեպքը հետաքրքիր չէ, որովհետև համաձայն (4.12.9)-ի հավասարությունը կնշանակեր, որ  $\|I - \tau_0 A\| = 0$ : Ենթադրենք, որ  $c < 1$ : Բնական լոգարիթմի վերլուծությունից ունենք

$$\ln(1+c) = c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^4}{4} + \dots,$$

$$\ln(1-c) = -c - \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3} - \frac{c^4}{4} - \dots$$

(տե՛ս, օրինակ՝ [62]): Հետևաբար,

$$\ln \left( \frac{1-c}{1+c} \right) = -2 \left( c + \frac{c^3}{3} + \frac{c^5}{5} + \dots \right) < -2c :$$

Հաշվի առնելով վերջին անհավասարությունը՝ (4.12.12)-ից կստանանք

$$-2kc < \ln \varepsilon$$

պայմանը, որից հետևում է

$$k > \frac{1}{2c} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

գնահատականը: Իսկ քանի որ  $\kappa_2(A) = c^{-1}$  (տե՛ս (4.2.10) հատկությունը), ապա

$$k > \frac{\kappa_2(A)}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.12.13)$$

Այսպիսով, որքան մեծ է մատրիցի պայմանավորվածության թիվը, այնքան շատ իտերացիաներ պետք է կատարվեն նույն ճշտությունը ստանալու համար:



### 4.13 Իտերացիոն մեթոդների վարքը «ոչ ստանդարտ» դեպքերում

Ինչպես բացահայտվել է 4.7 պարագրաֆում,

$$x = Bx + c \quad (4.13.1)$$

համակարգի վրա կիրառած

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13.2)$$

իտերացիոն մեթոդը զուգամիտում է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\rho(B) < 1$  (թեորեմ 4.7): Դա հայտնի տեսական դրույթ է: Սակայն որոշ դեպքերում մեթոդի զուգամիտությունը կարող է ունենալ անսովոր բնույթ:

Որպես օրինակ դիտարկենք

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (4.13.3)$$

մատրիցը, որտեղ  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta \gg 1$ : Մատրիցի սեփական արժեքները համընկնում են՝  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ : Քանի որ  $\rho(B) = \alpha < 1$ , ապա (4.13.2) մեթոդը զուգամետ է: Ընդ որում,

$$\rho(B) \ll \|B\|_\infty = \beta + \alpha :$$

Հատուկ նշենք, որ  $\|B\|_\infty \gg 1$ :

Հետազոտենք իտերացիոն մեթոդի  $z^k \equiv x - x^k$  սխալանքի վարքը՝ իտերացիաների քվի մեծացմանը զուգընթաց: Ունենք

$$z^{k+1} = Bz^k \quad (4.13.4)$$

առնչությունը, որն անմիջապես բխում է (4.13.1)-ից և (4.13.2)-ից: Ուստի

$$z^k = B^k z^0, \quad k = 1, 2, \dots :$$

Այստեղից ստանում ենք, որ

$$\|z^k\|_\infty = \|B^k z^0\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty \|z^0\|_\infty :$$

Այս գնահատականը ունենալուց հետո հետաքրքիր է ուսումնասիրել  $\|B^k\|_\infty$  նորմի վարքը, երբ  $k \rightarrow \infty$ : Մատրիցի  $k$ -րդ աստիճանը ունի հետևյալ տեսքը.

$$B^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\beta\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{bmatrix} :$$

Այդ դեպքում

$$\|B^k\|_\infty = \alpha^k + k\beta\alpha^{k-1} \sim \frac{\beta}{\alpha} k\alpha^k :$$

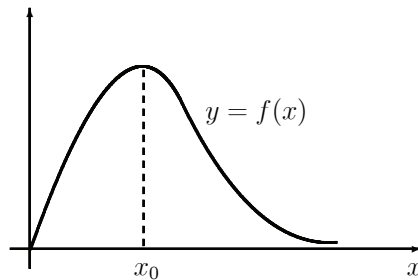
Դժվար չէ տեսնել, որ  $\frac{\beta}{\alpha} k \alpha^k$  մեծությունը  $k$ -ի աճմանը զուգընթաց մախ աճում է, իսկ հետո սկսում է մոնոտոն նվազել: Իրոք, դա կարելի է տեսնել

$$f(x) = Cx\alpha^x, \quad C = const > 0$$

Ֆունկցիայի վարքից (նկ. 4.13.1): Այդ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը

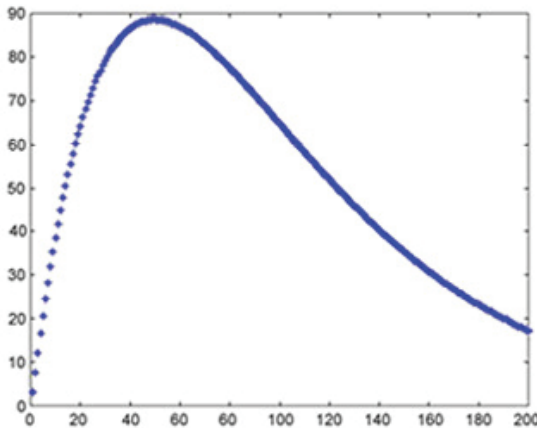
$$x_0 = -\frac{1}{\ln \alpha} \approx \frac{1}{1 - \alpha}$$

կետում: Ընդ որում՝ երբ  $\alpha$ -ն մոտենում է մեկին,  $x_0$ -ն մեծանում է:



**Նկ. 4.13.1**  $f(x) = Cx\alpha^x$  ֆունկցիայի գրաֆիկը

Վերցնենք  $\alpha = 0.98$  և  $\beta = 16$ : Կատարենք (4.13.4) իտերացիաները՝ վերցնելով  $z^0 = [1.7, -0.3]^T$ : Նկ. 4.13.2-ում տրված են  $\|z^k\|$  նորմի արժեքները 200 իտերացիա կատարելուց հետո: Ինչպես տեսնում ենք, 50-րդ իտերացիայում սխալանքի նորմը հասնում է համարյա 90-ի, այնուհետև մոնոտոն նվազում է: Նորից նշենք, որ  $\rho(B) < 1$  պայմանը ապահովում է մեթոդի *ասիմպտոտիկ* զուգամիտությունը, թեև իտերացիոն ընթացքի սկզբնական փուլում կարող է նկատվել սխալանքի մեծ աճ:



**Նկ. 4.13.2**  $\|z^k\|$  նորմի արժեքները  $\alpha = 0.98$  և  $\beta = 16$  դեպքում

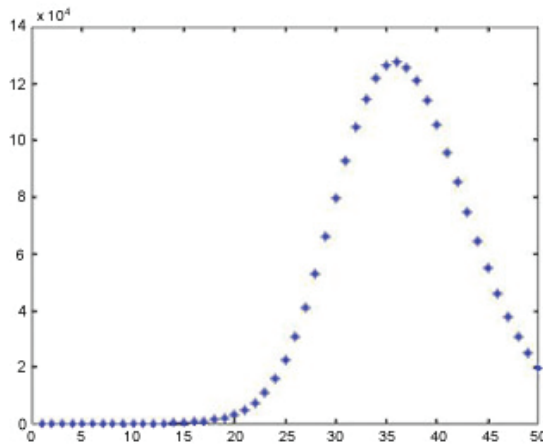
Բարձր կարգի մատրիցների համար սխալանքի սկզբնական աճը կարող է աղետաբեր լինել: Դիտարկենք, օրինակ,

$$z^{k+1} = Bz^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.13.5}$$

իտերացիաները, որտեղ  $B$ -ն  $20 \times 20$  չափի հետևյալ երկանկույնագծային մատրիցն է

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & & & \\ & 0.5 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0.5 & 1 \\ & & & & 0.5 \end{bmatrix} :$$

Քանի որ  $\rho(B) = 0.5$ , ապա (4.13.5) իտերացիաները պետք է զուգամիտեն  $z = Bz$  համակարգի ճշգրիտ լուծմանը՝  $z = 0$  վեկտորին: Որպես սկզբնական մոտարկում վերցնենք  $z^0 = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ : Սխալանքի իրական վարքը տրված է նկ. 4.13.3-ում:



**Նկ. 4.13.3**  $\|z^k\|$  նորմի արժեքները (4.13.5) իտերացիաների համար

Ինչպես հայտնի է, Գաուս-Չեյդելի մեթոդը, երբ համակարգի մատրիցը դրական որոշյալ է, զուգամետ է (թեորեմ 4.9.4): Սակայն զուգամիտությունը, երբ մատրիցը վատ է պայմանավորված, կարող է լինել չափազանց դանդաղ: Դիտարկենք

$$\begin{aligned} 0.96326 x_1 + 0.81321 x_2 &= 0.88824 \\ 0.81321 x_1 + 0.68654 x_2 &= 0.79988 \end{aligned} \tag{4.13.6}$$

համակարգը, որի ճշգրիտ լուծումը՝ ութ նիշի ճշտությամբ, հետևյալն է.

$$x_1 = 0.39472766, \quad x_2 = 0.62470289 :$$

Վերցնենք որպես սկզբնական մոտարկում

$$x_1^{(0)} = 0.33116000, \quad x_2^{(0)} = 0.70000000$$

արժեքները: Կատարելով 10 000 խտրացիա՝ կստանանք

$$x_1^{(10000)} = 0.33668711, \quad x_2^{(10000)} = 0.69345220 :$$

Տեսնում ենք, որ մոտավոր լուծումը էապես չի փոխվել: Պատճառն այն է, որ (4.13.6) համակարգի մատրիցի պայմանավորվածության թիվը շատ մեծ է: Հաշվելով այդ մատրիցի սեփական արժեքները՝ կստանանք

$$\lambda_1 = 1.64979635330749, \quad \lambda_2 = 0.00000364669251$$

և, հետևաբար,

$$\kappa_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \approx 452\,410 :$$

Այսպիսով, բերված օրինակների հիման վրա գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը. «ոչ ստանդարտ» համակարգեր լուծելիս պետք է կիրառել հատուկ եղանակներ:

## 4.14 Հակադարձ մատրիցի հաշվումը

Գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման խնդրի համեմատ՝ մատրիցի հակադարձման խնդիրը գործնականում ավելի քիչ է հանդիպում: Չնայած դրան, այդ խնդիրը որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում:

Դիցուք տրված է  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  չվերասերված մատրիցը:  $X = [x_{ij}]_{n \times n}$  հակադարձ մատրիցը կարելի է գտնել

$$AX = I \quad (4.14.1)$$

մատրիցային հավասարումից, որտեղ  $I$ -ն միավոր մատրից է: Գժվար չէ համոզվել, որ (4.14.1) հավասարումը տրոհվում է  $n$  անկախ համակարգի՝

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.14.2)$$

որտեղ  $x^{(j)} = [x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{nj}]^T$  և  $\delta^{(j)} = [\delta_{1j} \ \delta_{2j} \ \dots \ \delta_{nj}]^T$  ( $\delta_{ij}$ -ն Կրոնեկերի նշանն է, այսինքն՝  $\delta_{ii} = 1$  և  $\delta_{ij} = 0$ , երբ  $i \neq j$ ) վեկտորները համապատասխանաբար  $X$  և  $I$  մատրիցների  $j$ -րդ սյունակներն են: Գոյություն ունեն (4.14.2) համակարգերի լուծման տարբեր հաշվողական սխեմաներ: Շարադրենք դրանցից մեկը:

### 4.14.1 $LU$ -վերլուծության վրա հիմնված ալգորիթմը

Ենթադրենք հայտնի է  $A$  մատրիցի  $LU$ -վերլուծությունը, որը կարելի է ստանալ, օրինակ, Կռաուտի ալգորիթմի միջոցով (տես 4.3 պարագրաֆը): Դրա համար, համաձայն (4.3.11) հաշվարկի, պահանջվում է

$$A_{ops}^{(LU)} \sim \frac{2}{3}n^3 \quad (4.14.3)$$

քվաբանական գործողություն: Եթե  $L$  և  $U$  մատրիցները որոշված են, ապա (4.14.2)-ից  $j$ -րդ համակարգի լուծումը հանգում է

$$Ly^{(j)} = \delta^{(j)}, \tag{4.14.4}$$

$$Ux^{(j)} = y^{(j)} \tag{4.14.5}$$

համակարգերի հաջորդական լուծմանը:

Նախ քննարկենք (4.14.4) համակարգի լուծման ընթացքը: Կատարենք  $L$  ստորին եռանկյուն մատրիցի հետևյալ տրոհումը.

$$L = \left[ \begin{array}{cccc|cc} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ l_{j-1,1} & l_{j-1,2} & \dots & l_{j-1,j-1} & & \\ \hline l_{j1} & l_{j2} & \dots & l_{jj} & & \\ l_{j+1,1} & l_{j+1,2} & \dots & l_{j+1,j} & l_{j+1,j+1} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nj} & l_{n,j+1} & \dots & l_{nn} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} L_{11}^{(j)} & 0 \\ L_{21}^{(j)} & L_{22}^{(j)} \end{array} \right] :$$

Համապատասխանաբար տրոհենք ենթավեկտորների  $y^{(j)}$  և  $\delta^{(j)}$  վեկտորները.

$$y^{(j)} = \begin{bmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \delta^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2^{(j)} \end{bmatrix} :$$

Դրանով (4.14.4) համակարգը կգրվի

$$\begin{bmatrix} L_{11}^{(j)} & 0 \\ L_{21}^{(j)} & L_{22}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

կամ

$$\begin{aligned} L_{11}^{(j)} y_1^{(j)} &= 0 \\ L_{21}^{(j)} y_1^{(j)} + L_{22}^{(j)} y_2^{(j)} &= \delta_2^{(j)} \end{aligned}$$

տեսքով: Այստեղից կստանանք, որ  $y_1^{(j)} = 0$ , իսկ  $y_2^{(j)} = 0$  վեկտորը գտնելու համար պետք է լուծել

$$L_{22}^{(j)} y_2^{(j)} = \delta_2^{(j)} \tag{4.14.6}$$

համակարգը, որտեղ  $\delta_2^{(j)} = [10 \dots 0]^T$ : Գիմեղով 4.1 պարագրաֆին՝ կարող ենք ասել, որ (4.14.6) ստորին եռանկյուն մատրիցով համակարգի լուծումը պահանջում է ոչ ավելի, քան  $(n - j + 1)^2$  քվաբանական գործողություն:

Ստանալով (4.14.4) համակարգի

$$y^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

լուծումը՝ արդեն կարող ենք լուծել վերին եռանկյուն մատրիցով (4.14.5) համակարգը: Այստեղ թվաբանական գործողությունների քանակը չի գերազանցում  $n^2$ -ն (տե՛ս 4.1 պարագրաֆը):

Ամփոփելով, հանգում ենք, որ ֆիքսած  $j$ -ի համար (4.14.4) և (4.14.5) համակարգերի լուծումը պահանջում է

$$A_{ops}^{(j)} \leq (n - j + 1)^2 + n^2$$

թվաբանական գործողություն: Հաշվի առնելով նաև (4.14.3) գնահատականը՝ ստանում ենք մատրիցի հակադարձման համար ծախսվող թվաբանական գործողությունների քանակը.

$$A_{ops} = A_{ops}^{(LU)} + \sum_{j=1}^n A_{ops}^{(j)} \sim \frac{2}{3}n^3 + \frac{4}{3}n^3 = 2n^3 :$$

Այսպիսով, հակադարձ մատրիցի հաշվումը պահանջում է մոտավորապես երեք անգամ ավելի շատ թվաբանական գործողություն, քան նույն կարգի համակարգի լուծումը:

#### 4.14.2 Հակադարձ մատրիցի տարրերի ճշգրտումը

Որպես կանոն, թվային ալգորիթմները չեն տալիս հակադարձ մատրիցի տարրերի ճշգրիտ արժեքները՝ հաշվումների անխուսափելի սխալանքների պատճառով: Դիցուք  $X_0$ -ն  $A^{-1}$  հակադարձ մատրիցի մոտարկում է՝  $X_0 \approx A^{-1}$ : Ենթադրենք, որ

$$F_0 = I - AX_0 \quad (4.14.7)$$

մատրիցն այնպիսին է, որ

$$\|F_0\| \leq q < 1 : \quad (4.14.8)$$

Դիտարկելով  $X_0$ -ն որպես սկզբնական մոտարկում՝ կատարենք հետևյալ տեսքի խտրացիոն քայլերը.

$$X_k = X_{k-1}(I + F_{k-1}), \quad F_k = I - AX_k, \quad k = 1, 2, \dots : \quad (4.14.9)$$

Ցույց տանք, որ  $X_k$  մատրիցների հաջորդականությունը ձգտում  $A^{-1}$  մատրիցին: Ունենք՝

$$\begin{aligned} F_k &= I - AX_k = I - AX_{k-1}(I + F_{k-1}) = \\ &= I - (I - F_{k-1})(I + F_{k-1}) = F_{k-1}^2 = \dots = F_0^{2^k} : \end{aligned}$$

Այնուհետև,

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(I - AX_k) = A^{-1}F_k = A^{-1}F_0^{2^k} :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (4.14.8) ենթադրությունը, կստանանք

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \|A^{-1}\| \|F_0\|^{2^k} \leq \|A^{-1}\| q^{2^k} \quad (4.14.10)$$

գնահատականը, որից հետևում է (4.14.9) խտրացիոն ընթացքի զուգամիտությունը:

Այժմ գնահատենք  $A^{-1}$  մատրիցի նորմը: Ըստ  $F_0$  մատրիցի (4.14.7) սահմանման կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը.

$$A^{-1} = X_0(AX_0)^{-1} = X_0(I - F_0)^{-1} = X_0 \sum_{k=0}^{\infty} F_0^k :$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք Նեյմանի շարքի զուգամիտությունից՝ հաշվի առնելով (4.14.8) պայմանը (տե՛ս 3.5.2 և 3.5.3 թեորեմները): Վերջին հավասարությունից կստանանք՝

$$\|A^{-1}\| \leq \|X_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \|F_0\|^k \leq \|X_0\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{\|X_0\|}{1 - q} : \quad (4.14.11)$$

Այսպիսով, (4.14.10) և (4.14.11)-ից հետևում է

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \|X_0\| \frac{q^{2^k}}{1 - q} \quad (4.14.12)$$

գնահատականը:

**Գիտողություն 4.14.1 :** Եթե  $A$  մատրիցը սիմետրիկ է և որպես  $X_0$  սկզբնական մոտարկում վերցված է սիմետրիկ մատրից, ապա բոլոր հաջորդ մոտարկումները նույնպես կլինեն սիմետրիկ մատրիցներ: Իրոք, (4.14.9)-ից ունենք

$$X_k = X_{k-1} + X_{k-1}F_{k-1} = X_{k-1} + X_{k-1}(I - AX_{k-1}) = 2X_{k-1} - X_{k-1}AX_{k-1},$$

և եթե ենթադրենք, որ  $X_{k-1}^T = X_{k-1}$ , ապա ստացված հավասարությունից կստանանք

$$X_k^T = 2X_{k-1}^T - X_{k-1}^T A^T X_{k-1}^T = 2X_{k-1} - X_{k-1}AX_{k-1} = X_k :$$

## Խնդիրներ և վարժություններ - 4

1. Համակարգի  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերը հետևյալ են.  $a_{ij} = 0$ , երբ  $j > i$  և  $j < i - 1$ : Գրել այդ համակարգի լուծման ալգորիթմը: Գնահատել թվաբանական գործողությունների քանակը:
2. Համակարգի  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերը հավասար են զրոյի, երբ  $i + j \leq n$ : Գրել այդ համակարգի լուծման ալգորիթմը: Գնահատել թվաբանական գործողությունների քանակը:

3. Համակարգի  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերը հավասար են զրոյի, երբ  $i + j > n + 1$ : Գրել այդ համակարգի լուծման ալգորիթմը: Գնահատել թվաբանական գործողությունների քանակը:
4. Հաշվել  $\kappa_\infty(A)$ ,  $\kappa_1(A)$  և  $\kappa_2(A)$  պայմանավորվածության թվերը հետևյալ մատրիցների համար.

$$\text{ա) } A = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \text{բ) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{գ) } A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} :$$

5. Ապացուցել, որ  $n$ -րդ կարգի  $A$  մատրիցի համար ճիշտ են հետևյալ անհավասարությունները.

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\kappa_\infty(A)}{\kappa_2(A)} \leq n :$$

6. Դիցուք  $A = A^T > 0$ : Ապացուցել, որ  $f(\alpha) \equiv \kappa_2(A + \alpha I)$  ֆունկցիան  $\alpha > 0$  արժեքների համար մոնոտոն նվազող է (ենթադրվում է, որ  $A \neq \beta I$ ,  $\beta = \text{const}$ ):

7. Հաշվել  $\kappa_\infty(A)$  պայմանավորվածության թիվը

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

երկանկյունագծային մատրիցի համար:

8. Ապացուցել, որ

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$$

մատրիցը ունի ամենամեծ  $\kappa_2(A)$  պայմանավորվածության թիվը բոլոր երկրորդ կարգի չվերասերված մատրիցների մեջ, որոնց տարրերը 101-ից փոքր բնական թվեր են:

9. Դիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերն այնպիսին են, որ  $a_{ij} = 0$ , երբ  $i > j + 1$ : Գրել Գաուսի մեթոդի տարրերակը այդ մատրիցով համակարգի լուծման համար: Գնահատել թվաբանական գործողությունների քանակը:
10. Դիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն ունի հետևյալ կառուցվածքը. նրա բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, բացառությամբ այն  $a_{ij}$  տարրերի, որոնց համար  $|i - j| \leq 1$ , ինչպես նաև  $a_{1n}$  և  $a_{n1}$  տարրերի: Մշակել այդ մատրիցով համակարգի լուծման ալգորիթմը: Գնահատել թվաբանական գործողությունների քանակը:



11. Տրված է

$$\begin{aligned} d_1 x_1 - b_1 x_2 &= r_1 \\ -a_i x_{i-1} + d_i x_i - b_i x_{i+1} &= r_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ -a_n x_{n-1} + d_n x_n &= r_n \end{aligned}$$

համակարգը, որի գործակիցները բավարարում են

$$|d_i| > |b_{i-1}| + |a_{i+1}|, \quad 1 \leq i \leq n \quad (b_0 = 0, a_{n+1} = 0)$$

պայմաններին (*խիստ անկյունագծային գերիշխում ըստ սյունակների*): Ֆույց տալ, որ այս դեպքում անհայտների ուղիղ արտաքսման ժամանակ զրոյի վրա բաժանում չի առաջանում:

12. Կառուցել  $A$  սիմետրիկ դրական որոշյալ երեքանկյունագծային մատրիցի Խոլեսկու վերլուծությունը՝  $A = U^T U$ : Հաշվել  $U$  մատրիցի տարրերը գտնելու համար անհրաժեշտ թվաբանական գործողությունների քանակը:

13. Դիտարկվում է երկու իտերացիոն մեթոդ.

$$x^{k+1} = (I - \tau AB)x^k + \tau b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

և

$$x^{k+1} = (I - \tau BA)x^k + \tau b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

որտեղ  $A$  և  $B$  մատրիցներից գոնե մեկը չվերասերված է: Ապացուցել, որ այդ երկու մեթոդները զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

14. Տրված է  $Ax = b$  համակարգը: Հայտնի է, որ  $A$  մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները իրական են և պատկանում են  $[\alpha, \beta]$  միջակայքին, որտեղ  $\alpha > 0$ : Ապացուցել, որ

$$\left(I + \frac{\tau}{2}A\right)x^{k+1} = \left(I - \frac{\tau}{2}A\right)x^k + \tau b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

իտերացիոն մեթոդը զուգամետ է ցանկացած  $\tau > 0$ -ի դեպքում:

15. Դիտարկվում է

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

իտերացիոն մեթոդը, որտեղ

$$B = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad 0 < a < 1 :$$

Ֆույց տալ, որ սխալանքի  $l_\infty$  նորմը իտերացիայի ինչ-որ  $k_0$  համարից սկսած մոնոտոն նվազում է:

16. Տրված է  $Ax = b$  համակարգը, որտեղ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} :$$

Այդ համակարգի լուծման համար դիտարկվում է

$$x^{k+1} = B(t)x^k + g(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

խտերացիոն մեթոդը, որտեղ

$$B(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2t^2 + 2t + 1 & -2t^2 + 2t + 1 \\ -2t^2 + 2t + 1 & 2t^2 + 2t + 1 \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - t \\ 0.5 - t \end{bmatrix} :$$

Որոշել  $t$  պարամետրի այն արժեքները, որոնց համար մեթոդը կլինի զուգամետ:

17. Տրված է

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & 0 & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

մատրիցը: Գտնել Գաուս-Չեյդելի մեթոդում խտերացիաները իրականացնող  $-(L + D)^{-1}U$  մատրիցը:

18. Որոշել  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցների այն դասը, որոնց համար Գաուս-Չեյդելի մեթոդի մեկ քայլը, սկսած  $x_0 = 0$  սկզբնական մոտարկումից, տալիս է  $Ax = b$  համակարգի ճշգրիտ լուծումը:

## Գլուխ 5

# ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

### 5.1 Ներածական մաս

Մատրիցի սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների որոշումը հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն խնդիրներից է:

Համաձայն 3.2.1 թեորեմի՝  $A$  մատրիցի սեփական արժեքները կարելի է ստանալ լուծելով

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (5.1.1)$$

*բնութագրիչ հավասարումը*: Իսկ համապատասխան սեփական վեկտորները

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (5.1.2)$$

համասեռ համակարգի ոչ զրոյական լուծումներն են:

**Օրինակ 5.1.1** : Գտնենք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները և սեփական վեկտորները:

Կազմենք մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ -2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda^2 + \lambda + 2) :$$

Այս բազմանդամի արմատները

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

թվերն են: Ամեն մի սեփական արժեքի համար լուծելով (5.1.2) համակարգը՝ կստանանք

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} + \frac{7\sqrt{7}i}{16} \\ -\frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{7}i}{8} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} - \frac{7\sqrt{7}i}{16} \\ -\frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{7}i}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

սեփական վեկտորները:  $\diamond$

Սեփական արժեքների հաշվման մեթոդները, որոնց հիմքում ընկած է բնութագրիչ բազմանդամի նախնական որոշումը, կրում են *ուղիղ մեթոդներ* անունը: Սակայն մեծ չափի մատրիցների համար այդ մեթոդները գործնականորեն կիրառելի չեն: Հիմնական պատճառն այն է, որ բազմանդամի արմատները շատ զգայուն են նրա գործակիցների փոփոխման նկատմամբ: Հաշվողական սխալանքներ բնութագրիչ բազմանդամի գործակիցները ստանալու ընթացքում կարող են բերել բազմանդամի արմատների զգալի աղավաղման (տե՛ս 1.4.1 օրինակը):

Մատրիցի բոլոր սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների հաշվման խնդիրը կոչվում է *սեփական արժեքների լրիվ խնդիր*: Այդ խնդիրը բավականին ծանր է: Սակայն հաճախ պետք է լինում գտնել ոչ թե բոլոր սեփական արժեքները, այլ դրանցից մի քանիսը: Մեկ կամ մի քանի սեփական արժեքների և դրանց համապատասխան սեփական վեկտորների որոշման խնդիրը անվանում են *սեփական արժեքների մասնակի խնդիր* (օրինակ, մեծագույն սեփական արժեքի որոշումը): Այդ խնդրի լուծման համար մշակված են հատուկ մեթոդներ, որոնք ավելի պարզ են, քան լրիվ խնդրի լուծման մեթոդները և պահանջում են ավելի փոքր ծավալի հաշվողական աշխատանք:

## 5.2 Աստիճանային մեթոդը

Մույն պարագրաֆում մենք կշարադրենք սեփական արժեքների մասնակի խնդրի լուծման պարզագույն մեթոդը:

### 5.2.1 Մոդուլով ամենամեծ սեփական արժեքի հաշվումը

Դիցուք  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցի մասին հայտնի է, որ նա ունի  $n$  հատ գծորեն անկախ սեփական վեկտոր: Այդպիսի մատրիցներն անվանում են *պարզ կառուցվածքի մատրիցներ*: Օրինակ, սիմետրիկ մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են (տե՛ս [16, 32, 33]): Ենթադրենք, որ մատրիցի մոդուլով ամենամեծ սեփական արժեքը միակն է.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| : \quad (5.2.1)$$

Նշենք, որ այդ դեպքում  $\lambda_1$ -ը իրական թիվ է (տե՛ս, օրինակ, [32]): Համապատասխան գծորեն անկախ սեփական վեկտորները

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad (5.2.2)$$

համարակալված են այնպես, որ

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Վերցնենք  $x^{(0)}$  կամայական ոչ գրոյական վեկտոր և հաջորդաբար հաշվենք

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

վեկտորները: Պարզ է, որ

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots : \quad (5.2.3)$$

Վերլուծենք  $x^{(0)}$  վեկտորը ըստ (5.2.2) սեփական վեկտորների .

$$x^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n : \quad (5.2.4)$$

Ենթադրենք, որ  $\alpha_1 \neq 0$ : Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք համարել, որ

$$x^{(0)} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \dots + \hat{e}_n, \quad (5.2.5)$$

որտեղ  $\hat{e}_1$ -ը  $\lambda_1$  սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է, իսկ  $\hat{e}_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  վեկտորներն այնպիսին են, որ  $A\hat{e}_i = \lambda_i \hat{e}_i$ : Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (5.2.3)-ից և (5.2.5)-ից`

$$x^{(k)} = A^k \hat{e}_1 + A^k \hat{e}_2 + \dots + A^k \hat{e}_n = \lambda_1^k \hat{e}_1 + \lambda_2^k \hat{e}_2 + \dots + \lambda_n^k \hat{e}_n : \quad (5.2.6)$$

Վերջին հավասարությունը գրենք

$$x^{(k)} = \lambda_1^k (\hat{e}_1 + \varepsilon^{(k)}) \quad (5.2.7)$$

տեսքով, որտեղ

$$\varepsilon^{(k)} \equiv \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \hat{e}_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \hat{e}_n : \quad (5.2.8)$$

Համաձայն (5.2.1) ենթադրության`  $\varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$ , երբ  $k \rightarrow \infty$ : Այսպիսով, բավականաչափ մեծ  $k$ -ի համար  $x^{(k)}$  վեկտորը կարելի է դիտարկել որպես  $\lambda_1$  սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորի մոտարկում:

Դիցուք

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_m = \begin{bmatrix} e_1^{(m)} \\ e_2^{(m)} \\ \vdots \\ e_n^{(m)} \end{bmatrix} : \quad (5.2.9)$$

Ընտրենք որոշակի ինդեքս  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  և կազմենք

$$r_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}$$

հարաբերությունը: Օգտագործելով (5.2.9) նշանակումները՝ (5.2.7)-ից կստանանք

$$r_i^{(k)} = \lambda_1 \frac{e_i^{(1)} + \varepsilon_i^{(k+1)}}{e_i^{(1)} + \varepsilon_i^{(k)}} = \lambda_1 \left[ 1 + \frac{\varepsilon_i^{(k+1)} - \varepsilon_i^{(k)}}{e_i^{(1)} + \varepsilon_i^{(k)}} \right] \quad (5.2.10)$$

հավասարությունը: Ինչպես հետևում է (5.2.8)-ից՝

$$\varepsilon_i^{(k)} = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k e_i^{(2)} + \dots + \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k e_i^{(n)} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Ուստի

$$\varepsilon_i^{(k+1)} - \varepsilon_i^{(k)} = \gamma_i^{(2)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k + \dots + \gamma_i^{(n)} \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k,$$

որտեղ

$$\gamma_i^{(m)} \equiv \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_1} - 1 \right) e_i^{(m)}, \quad m = 2, 3, \dots, n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (5.2.1) ենթադրությունը, կարող ենք պնդել, որ

$$\varepsilon_i^{(k+1)} - \varepsilon_i^{(k)} = O \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) : \quad (5.2.11)$$

Եթե ենթադրենք, որ  $e_i^{(1)} \neq 0$ , ապա (5.2.10)-ից և (5.2.11)-ից կստանանք

$$r_i^{(k)} = \lambda_1 \left( 1 + O \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) \right) \quad (5.2.12)$$

հավասարությունը: Այսպիսով, (5.2.12)-ից հետևում է, որ

$$r_i^{(k)} \rightarrow \lambda_1, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Մատրիցի մոդուլով ամենամեծ սեփական արժեքի հաշվման նկարագրված մեթոդը կրում է *աստիճանային մեթոդ* անունը: Ամփոփելով, գրենք այդ մեթոդի հիմնական հաշվողական մոդուլը:

#### Pseudocode POWER

```

input  $n, A, x, N$ 
for  $k = 1, 2, \dots, N$  do
     $y = Ax$ 
     $r = y_i/x_i$ 
     $x = y$ 
output  $k, x, r$ 
end
```

**Գիտողություն 5.2.1 :** Մեթոդի շարադրման ընթացքում ենթադրվում էր, որ (5.2.4) վերլուծության մեջ  $\alpha_1$  գործակիցը զրո չէ: Նշենք, որ  $x^{(0)}$  սկզբնական մոտարկումը ընտրելիս  $\alpha_1 = 0$  դեպքի հավանականությունը շատ փոքր է: Ավելին, գործնականում խորհուրդ է տրվում վերցնել մի քանի սկզբնական մոտարկում և կատարել զուգահեռ հաշվումներ:

**Գիտողություն 5.2.2 :** Ենթադրվում էր, որ  $\hat{e}_1$  սեփական վեկտորի  $i$ -րդ բաղադրիչը զրոյից տարբեր է: Բաղադրիչն ընտրելիս պետք է օգտագործել մատչելի ինֆորմացիա այդ վեկտորի մասին: Հակառակ դեպքում խորհուրդ է տրվում կատարել զուգահեռ հաշվումներ տարբեր բաղադրիչներ ընտրելով:

**Գիտողություն 5.2.3 :** Եթե  $|\lambda_1| > 1$ , ապա  $\|x^{(k)}\| \rightarrow \infty$ , երբ  $k \rightarrow \infty$  (դա պարզ երևում է (5.2.7)-ից): Իսկ եթե  $|\lambda_1| < 1$ , ապա  $\|x^{(k)}\| \rightarrow 0$ : Տարամիտության երևույթից խուսափելու համար հաշվումների ընթացքում խորհուրդ է տրվում ժամանակ առ ժամանակ  $x^{(k)}$  վեկտորը նորմալիզել:

## 5.2.2 Սիմետրիկ մատրիցի դեպքը

Սիմետրիկ մատրիցների համար աստիճանային մեթոդի զուգամիտությունը կարելի է էապես արագացնել:

Ինչպես հայտնի է, սիմետրիկ մատրիցն ունի սեփական վեկտորների լրիվ օրթոգոնալ համակարգ (տե՛ս 3.3.1 թեորեմը): Ուստի սեփական վեկտորների (5.2.2) համակարգը կարելի է համարել օրթոգոնալ: Այսպիսով,  $x^{(0)}$  վեկտորի (5.2.5) վերլուծության մեջ

$$(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = 0, \quad i \neq j :$$

Հաշվի առնելով այդ հանգամանքը՝ (5.2.6)-ից կստանանք

$$(x^{(k)}, x^{(k)}) = d_1 \lambda_1^{2k} + d_2 \lambda_2^{2k} + \dots + d_n \lambda_n^{2k} \quad (5.2.13)$$

և

$$(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = d_1 \lambda_1^{2k+1} + d_2 \lambda_2^{2k+1} + \dots + d_n \lambda_n^{2k+1} \quad (5.2.14)$$

հավասարությունները, որտեղ

$$d_i \equiv (\hat{e}_i, \hat{e}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Նկատենք, որ  $d_1 \neq 0$ : Կազմենք

$$r^{(k)} = \frac{(x^{(k+1)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})}$$

հարաբերությունը: Ելնելով (5.2.13) և (5.2.14) հավասարություններից՝ կստանանք

$$r^{(k)} = \lambda_1 \frac{d_1 + \mu^{(k)}}{d_1 + \varepsilon^{(k)}} = \lambda_1 \left[ 1 + \frac{\mu^{(k)} - \varepsilon^{(k)}}{d_1 + \varepsilon^{(k)}} \right] \quad (5.2.15)$$

հավասարությունը, որտեղ

$$\varepsilon^{(k)} = d_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} + \dots + d_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2k},$$

$$\mu^{(k)} = d_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k+1} + \dots + d_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2k+1} :$$

Այնուհետև,

$$\mu^{(k)} - \varepsilon^{(k)} = \gamma_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} + \dots + \gamma_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2k},$$

որտեղ

$$\gamma_m \equiv \left( \frac{\lambda_m}{\lambda_1} - 1 \right) d_m, \quad m = 2, 3, \dots, n :$$

Ըստ (5.2.1) ենթադրության  $\varepsilon^{(k)} \rightarrow 0$ , երբ  $k \rightarrow \infty$ , և

$$\mu^{(k)} - \varepsilon^{(k)} = O \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k} \right) : \quad (5.2.16)$$

Այսպիսով, (5.2.15) և (5.2.16)-ից կստանանք, որ

$$r^{(k)} = \lambda_1 \left( 1 + O \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k} \right) \right) : \quad (5.2.17)$$

Վերջինը նշանակում է, որ

$$r^{(k)} \rightarrow \lambda_1, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Գրենք աստիճանային մեթոդի այս տարբերակի ալգորիթմը:

#### Pseudocode POWER/SYMM

```

input  $n, A, x, N$ 
for  $k = 1, 2, \dots, N$  do
     $y = Ax$ 
     $r = (y, x)/(x, x)$ 
     $x = y$ 
output  $k, x, r$ 
end

```



### 5.2.3 Մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի հաշվումը

Աստիճանային մեթոդը կարելի է կիրառել նաև մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքի հաշվման համար:

Ենթադրենք, որ  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  մատրիցը չվերասերված է և նրա մոդուլով ամենափոքր սեփական արժեքը միակն է.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0 :$$

Այդ դեպքում  $\lambda_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  թվերը  $A^{-1}$  մատրիցի սեփական արժեքներն են (տե՛ս 3.2.2 լեմման) և

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq \dots \geq |\lambda_1^{-1}| > 0 :$$

Հետևաբար, կիրառելով  $A^{-1}$  մատրիցի համար մոդուլով ամենամեծ սեփական արժեքի հաշվման գաղափարը, կարող ենք գտնել  $\lambda_n^{-1}$ -ը: Նշենք միայն, որ այս դեպքում  $x^{(k+1)} = A^{-1}x^{(k)}$  գործողությունը համարժեք է

$$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Աստիճանային մեթոդի նկարագրված տարբերակը անվանում են *հակադարձ աստիճանային մեթոդ*: Ստորև բերված է ալգորիթմի հիմնական հաշվողական մոդուլը:

#### Pseudocode INVERSE POWER

```
input  $n, A, x, N$ 
for  $k = 1, 2, \dots, N$  do
    solve  $Ay = x$ 
     $r = x_i / y_i$ 
     $x = y$ 
output  $k, x, r$ 
end
```

## 5.3 Պատման մեթոդը

Գիտարկենք իտերացիոն մեթոդ, որի միջոցով կարելի է լուծել սեփական արժեքների լրիվ խնդիրը սիմետրիկ մատրիցների համար:

### 5.3.1 Մեթոդի գաղափարը

Պարզվում է, որ ցանկացած սիմետրիկ մատրից օրթոգոնալ ձևափոխությամբ բերվում է անկյունագծային տեսքի (տե՛ս, օրինակ, [12, 16, 67]): Շճգրիտ, տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 5.3.1 :** Կամայական  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  սիմետրիկ մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի  $U$  օրթոգոնալ մատրից, որ

$$U^T A U = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} : \quad (5.3.1)$$

Ապացույց: Դիցուք (5.3.1) ձևափոխությունը տեղի ունի: Նկատենք, որ այս ձևափոխությունը մնանության ձևափոխություն է, քանի որ  $U^T = U^{-1}$ : Ուստի  $A$  և  $\Lambda$  մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են (դրանք  $\Lambda$  մատրիցի անկյունագծային տարրերն են): Իսկ  $A$  մատրիցի սեփական վեկտորները  $U$  մատրիցի սյունակներն են: Հեշտ է տեսնել, որ  $\Lambda$  մատրիցի  $\lambda_i$  սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորը հետևյալն է.

$$e_i = [0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0]^T,$$

այսինքն՝

$$\Lambda e_i = \lambda_i e_i :$$

Այդ դեպքում ունենք

$$U^T A U e_i = \lambda_i e_i,$$

$$A(U e_i) = \lambda_i (U e_i) :$$

Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ  $U e_i$  վեկտորը  $A$  մատրիցի  $\lambda_i$  սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորն է: Իսկ  $U e_i$  վեկտորը  $U$  մատրիցի  $i$ -րդ սյունակն է:

Կատարված դատողությունները փաստորեն ցույց են տալիս թեորեմի ապացուցման ճանապարհը: Դիցուք  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  թվերը  $A$  մատրիցի սեփական արժեքներն են (դրանք ըստ 3.3.2 լեմմայի իրական են), իսկ  $u_1, u_2, \dots, u_n$  համապատասխան սեփական վեկտորները կազմում են օրթոնորմալ համակարգ (թեորեմ 3.3.1): Այսպիսով,

$$A u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (5.3.2)$$

Կառուցենք

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

մատրիցները: Ակնհայտ է, որ  $U$ -ն օրթոգոնալ մատրից է (թեորեմ 3.3.4): Այնուհետև, դժվար չէ համոզվել, որ

$$A U = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ A u_1 & A u_2 & \dots & A u_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}, \quad U \Lambda = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (5.3.2)-ը, կստանանք

$$AU = U\Lambda$$

հավասարությունը, որից անմիջապես հետևում է (5.3.1)-ը:  $\square$

Այսպիսով, սիմետրիկ մատրիցի համար սեփական արժեքների լրիվ խնդրի լուծումը հանգում է այդ մատրիցը անկյունագծային տեսքի բերող օրթոգոնալ մատրիցի որոշմանը:

Ստորև շարադրվող *պտտման մեթոդում* այդ օրթոգոնալ մատրիցը կառուցվում է որպես պտտման մատրիցների արտադրյալների սահման:

**5.3.2 Ալգորիթմի քայլի նկարագրությունը**

Նշանակենք  $A \equiv A^{(0)} = [a_{ij}^{(0)}]_{n \times n}$ : Առաջնորդվելով որոշակի չափանիշով (այդ հարցը մենք կքննարկենք ստորև), ընտրենք  $A^{(0)}$  մատրիցի որևէ գրոյից տարբեր ոչ անկյունագծային տարր  $a_{i_0 j_0}^{(0)}$  ( $i_0 < j_0$ ): Այդ տարրը կանվանենք առաջին քայլի *գլխավոր տարր*: Ունենք

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \vdots & & & & \\ & \ddots & & & \vdots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & a_{i_0 j_0}^{(0)} & \dots & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & & \vdots & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \\ j_0 \\ \\ \end{matrix} :$$

Վերցնենք համապատասխան պտտման մատրիցը

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & c_0 & \dots & -s_0 & & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ & & & s_0 & \dots & c_0 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i_0 \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

որտեղ  $c_0 = \cos \varphi_0, s_0 = \sin \varphi_0$  (տե՛ս (3.3.5) -ը): Ընդ որում,  $\varphi_0$  անկյունն ընտրվում է այնպես, որ

$$A^{(1)} = U_0^T A^{(0)} U_0 = [a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$$

մատրիցի  $a_{i_0 j_0}^{(1)}$  տարրը վերածվի գրոյի:

$A^{(1)}$  մատրիցի կառուցումը ընդգրկում է երկու փուլ:

1-ին փուլ: Հաշվվում է  $B = A^{(0)}U_0$  մատրիցը:  $A^{(0)}$  և  $B$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  համարներ ունեցող սյունակներով: Ընդ որում՝

$$\left. \begin{aligned} b_{i_0} &= a_{i_0 i_0}^{(0)} c_0 + a_{i_0 j_0}^{(0)} s_0 \\ b_{j_0} &= -a_{i_0 i_0}^{(0)} s_0 + a_{i_0 j_0}^{(0)} c_0 \\ b_{ij} &= a_{ij}^{(0)}, \quad j \neq i_0, j_0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (5.3.3)$$

2-րդ փուլ: Հաշվվում է  $A^{(1)} = U_0^T B$  մատրիցը:  $B$  և  $A^{(1)}$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  համարներ ունեցող տողերով: Ընդ որում՝

$$\left. \begin{aligned} a_{i_0 j}^{(1)} &= b_{i_0 j} c_0 + b_{j_0 j} s_0 \\ a_{j_0 j}^{(1)} &= -b_{i_0 j} s_0 + b_{j_0 j} c_0 \\ a_{ij}^{(1)} &= b_{ij}, \quad i \neq i_0, j_0 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n : \quad (5.3.4)$$

Այսպիսով,  $A^{(0)}$  և  $A^{(1)}$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  համարներ ունեցող տողերով և սյունակներով:

Ստանանք արտահայտություն  $a_{i_0 j_0}^{(1)}$  տարրի համար.

$$\begin{aligned} a_{i_0 j_0}^{(1)} &= b_{i_0 j_0} c_0 + b_{j_0 j_0} s_0 = (-a_{i_0 i_0}^{(0)} s_0 + a_{i_0 j_0}^{(0)} c_0) c_0 + (-a_{j_0 i_0}^{(0)} s_0 + a_{j_0 j_0}^{(0)} c_0) s_0 = \\ &= (a_{j_0 j_0}^{(0)} - a_{i_0 i_0}^{(0)}) s_0 c_0 + a_{i_0 j_0}^{(0)} (c_0^2 - s_0^2) = \frac{1}{2} (a_{j_0 j_0}^{(0)} - a_{i_0 i_0}^{(0)}) \sin 2\varphi_0 + a_{i_0 j_0}^{(0)} \cos 2\varphi_0 : \end{aligned}$$

Ենթադրենք, որ  $a_{i_0 i_0}^{(0)} \neq a_{j_0 j_0}^{(0)}$ : Ելնելով  $a_{i_0 j_0}^{(1)} = 0$  պահանջից կստանանք

$$\mu_0 \equiv \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2a_{i_0 j_0}^{(0)}}{a_{i_0 i_0}^{(0)} - a_{j_0 j_0}^{(0)}}, \quad |2\varphi_0| < \frac{\pi}{2} : \quad (5.3.5)$$

Նկատենք, որ  $U_0$  մատրիցը կառուցելու համար մեզ իրականում պետք է ոչ թե  $\varphi_0$  անկյունը, այլ  $c_0$  և  $s_0$  մեծությունները: Ունենք

$$1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0 = \frac{1}{\cos^2 2\varphi_0} \implies \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} \quad (5.3.6)$$

և

$$c_0 = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi_0}{2}}, \quad s_0 = \operatorname{sign}(\mu_0) \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi_0}{2}} : \quad (5.3.7)$$

Եթե  $a_{i_0 i_0}^{(0)} = a_{j_0 j_0}^{(0)}$ , ապա համարում ենք  $\varphi_0 = \pi/4$  և, համապատասխանաբար,

$$c_0 = s_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} : \quad (5.3.8)$$

Ամփոփելով, տանք պտտման մեթոդի առաջին քայլի ալգորիթմը:

#### Algorithm ROTATION (step)

1. Ընտրվում է  $a_{i_0 j_0}^{(0)}$  ( $i_0 < j_0$ ) տարրը:
2. Հաշվվում է  $\mu_0$  մեծությունն ըստ (5.3.5) բանաձևի (եթե  $a_{i_0 i_0}^{(0)} \neq a_{j_0 j_0}^{(0)}$ ):
3. Հաշվվում են  $c_0$  և  $s_0$  մեծությունները ըստ (5.3.6) և (5.3.7) կամ (5.3.8) բանաձևերի:
4. Օգտագործելով (5.3.3) և (5.3.4) բանաձևերը հաշվվում են  $A^{(1)}$  մատրիցի տարրերը.

$$\begin{cases} a_{i_0 j}^{(1)} = a_{i_0 j}^{(0)} c_0 + a_{j_0 j}^{(0)} s_0, & j \neq i_0, j_0, \\ a_{i_0 i_0}^{(1)} = 2a_{i_0 j_0}^{(0)} c_0 s_0 + a_{i_0 i_0}^{(0)} c_0^2 + a_{j_0 j_0}^{(0)} s_0^2, \\ a_{i_0 j_0}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{j_0 j}^{(1)} = -a_{i_0 j}^{(0)} s_0 + a_{j_0 j}^{(0)} c_0, & j \neq i_0, j_0, \\ a_{j_0 j_0}^{(1)} = -2a_{i_0 j_0}^{(0)} c_0 s_0 + a_{i_0 i_0}^{(0)} s_0^2 + a_{j_0 j_0}^{(0)} c_0^2, \\ a_{j_0 i_0}^{(1)} = 0, \end{cases}$$

$$a_{i i_0}^{(1)} = a_{i_0 i}^{(1)}, \quad a_{i j_0}^{(1)} = a_{j_0 i}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq i_0, j_0,$$

$$a_{i j}^{(1)} = a_{i j}^{(0)}, \quad i, j \neq i_0, j_0 :$$

end

Այսպիսով, ալգորիթմի առաջին քայլն ավարտված է: Այնուհետև, համանմանորեն կառուցվում են  $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$  մատրիցները:

### 5.3.3 Մեթոդի հիմնավորումը

Նախ ապացուցենք երկու օժանդակ պնդում:

**Լեմմա 5.3.1 :** *Կամայական մատրից ձախից օրթոգոնալ մատրիցով բազմապատկելիս ոչ մի սյունակում տարրերի քառակուսիների գումարը չի փոխվում:*

Ապացույց: Գիցուք  $B = UA$ , որտեղ  $U$ -ն օրթոգոնալ մատրից է: Նշանակենք  $a^{(j)}$  և  $b^{(j)}$ -ով համապատասխանաբար  $A$  և  $B$  մատրիցների  $j$ -րդ սյունակները: Այդ դեպքում

$$\sum_{i=1}^n b_{ij}^2 = (b^{(j)}, b^{(j)}) = (Ua^{(j)}, Ua^{(j)}) = (a^{(j)}, U^T U a^{(j)}) = (a^{(j)}, a^{(j)}) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 :$$

Լեմման ապացուցված է:  $\square$

**Լեմմա 5.3.2 :** Կամայական մատրից աջից օրթոգոնալ մատրիցով բազմապատկելիս ոչ մի տողում տարրերի քառակուսիների գումարը չի փոխվում:

Ապացույց: Պնդումը փաստորեն նախորդ լեմմայի հետևանք է: Իրոք, դիցուք  $C = AU$ , որտեղ  $U$ -ն օրթոգոնալ մատրից է: Քանի որ  $C^T = U^T A^T$ , ապա  $A$  և  $C$  մատրիցների տողերը համապատասխանաբար  $A^T$  և  $C^T$  մատրիցների սյունակներ են:  $\square$

- *Ոչ անկյունազածային տարրերի քառակուսիների գումարի փոփոխումը:*

Առաջին փուլում  $A^{(0)}$  մատրիցից մենք ստանում ենք  $B = A^{(0)}U_0$  մատրիցը: Համաձայն 5.3.2 լեմմայի՝  $A^{(0)}$  և  $B$  մատրիցների համապատասխան տողերում տարրերի քառակուսիների գումարը նույնն է: Մյուս կողմից,  $A^{(0)}$  և  $B$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  սյունակներով: Ուստի

$$(a_{i_0 i_0}^{(0)})^2 + (a_{i_0 j_0}^{(0)})^2 = b_{i_0 i_0}^2 + b_{i_0 j_0}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Ակներևության համար բերենք հետևյալ սխեման.

$$\left[ \begin{array}{cccccc} & & | & & | & \\ \dots & \dots & \bullet & \dots & \dots & \dots \\ & & | & & | & \end{array} \right] \quad i :$$

$i_0 \qquad j_0$

Այնուհետև, եթե  $i \neq i_0, j_0$ , ապա  $b_{i i_0} = a_{i i_0}^{(1)}$  և  $b_{i j_0} = a_{i j_0}^{(1)}$  (տե՛ս (5.3.4) բանաձևերը): Հետևաբար

$$(a_{i i_0}^{(0)})^2 + (a_{i j_0}^{(0)})^2 = (a_{i i_0}^{(1)})^2 + (a_{i j_0}^{(1)})^2, \quad i \neq i_0, j_0 : \tag{5.3.9}$$

Երկրորդ փուլում ստանում ենք  $A^{(1)} = U_0^T B$  մատրիցը: Համաձայն 5.3.1 լեմմայի  $B$  և  $A^{(1)}$  մատրիցների համապատասխան սյունակներում տարրերի քառակուսիների գումարը մնում է նույնը: Միաժամանակ  $B$  և  $A^{(1)}$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  տողերով: Գա նշանակում է, որ

$$b_{i_0 j}^2 + b_{j_0 j}^2 = (a_{i_0 j}^{(1)})^2 + (a_{j_0 j}^{(1)})^2, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(տե՛ս ստորև բերվող սխեման)

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \text{---} & \bullet & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \bullet & \text{---} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{matrix} i_0 \\ \vdots \\ j_0 \\ j \end{matrix}$$

Եթե  $j \neq i_0, j_0$ , ապա  $b_{i_0 j} = a_{i_0 j}^{(0)}$  և  $b_{j_0 j} = a_{j_0 j}^{(0)}$  (տե՛ս (5.3.3) բանաձևերը): Հետևաբար

$$(a_{i_0 j}^{(0)})^2 + (a_{j_0 j}^{(0)})^2 = (a_{i_0 j}^{(1)})^2 + (a_{j_0 j}^{(1)})^2, \quad j \neq i_0, j_0 : \tag{5.3.10}$$

Գիցուք

$$S_0 \equiv \sum_{i \neq j} (a_{ij}^{(0)})^2, \quad S_1 \equiv \sum_{i \neq j} (a_{ij}^{(1)})^2 :$$

Պարզ ձևափոխություններով այդ գումարները ներկայացնենք հետևյալ կերպ.

$$S_0 = 2(a_{i_0 j_0}^{(0)})^2 + \sum_{j \neq i_0, j_0} [(a_{i_0 j}^{(0)})^2 + (a_{j_0 j}^{(0)})^2] + \sum_{i \neq i_0, j_0} [(a_{i i_0}^{(0)})^2 + (a_{i j_0}^{(0)})^2] + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq i_0, j_0}} (a_{ij}^{(0)})^2,$$

$$S_1 = \sum_{j \neq i_0, j_0} [(a_{i_0 j}^{(1)})^2 + (a_{j_0 j}^{(1)})^2] + \sum_{i \neq i_0, j_0} [(a_{i i_0}^{(1)})^2 + (a_{i j_0}^{(1)})^2] + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \neq i_0, j_0}} (a_{ij}^{(1)})^2 :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (5.3.9) և (5.3.10) հավասարությունները, ինչպես նաև այն փաստը, որ  $A^{(0)}$  և  $A^{(1)}$  մատրիցները տարբերվում են միայն  $i_0$  և  $j_0$  համարներ ունեցող տողերով և սյունակներով, կստանանք

$$S_0 - S_1 = 2(a_{i_0 j_0}^{(0)})^2 \tag{5.3.11}$$

հավասարությունը:

- *Գլխավոր տարրի ընտրությունը:*

Քննարկենք գլխավոր տարրի ընտրության երկու եղանակ:

*Եղանակ 1.* Որպես  $a_{i_0 j_0}^{(0)}$  ընտրվում է  $A^{(0)}$  մատրիցի մոդուլով ամենամեծ ոչ անկյունագծային տարրը.

$$|a_{i_0 j_0}^{(0)}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^{(0)}| \quad (i_0 < j_0) :$$

Այդպիսի տարրի ընտրությունը, հաշվի առնելով  $A^{(0)}$  մատրիցի սիմետրիկությունը, յուրաքանչյուր քայլում պահանջում է  $\sim n^2/2$  թվաբանական գործողություն:

*Եղանակ 2.* Նախ հաշվվում են

$$\sigma_i^{(0)} = \sum_{j \neq i} (a_{ij}^{(0)})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

մեծությունները: Այնուհետև ընտրվում է  $i_0$ -րդ տողը հետևյալ պայմանից.

$$\sigma_{i_0}^{(0)} = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^{(0)} :$$

Վերջապես, ընտրվում է  $j_0$ -րդ սյունակը այնպես, որ

$$|a_{i_0 j_0}^{(0)}| = \max_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}^{(0)}| :$$

Նշենք, որ  $A^{(0)}$  մատրիցի սիմետրիկության հաշվին կարող ենք ենթադրել, որ  $i_0 < j_0$  :

Պարզ հաշվարկները ցույց են տալիս, որ դիտարկվող դեպքում ալգորիթմի առաջին քայլում գլխավոր տարրի ընտրության համար պահանջվում է ոչ ավելի, քան  $\sim 4n^2$  թվաբանական գործողություն, այսինքն՝ նախորդ դեպքի համեմատ մոտավորապես չորս անգամ ավելի: Սակայն հաջորդ քայլերում այդ մեծությունը էապես կնվազի: Համաձայն ընտրված եղանակի՝ երկրորդ քայլում պետք է հաշվել

$$\sigma_i^{(1)} = \sum_{j \neq i} (a_{ij}^{(1)})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

մեծությունները: Դժվար չէ նկատել, որ  $\sigma_i^{(1)} = \sigma_i^{(0)}$ , եթե  $i \neq i_0, j_0$ : Իրոք, հաշվի առնելով (5.3.9) հավասարությունները, կունենանք

$$\sigma_i^{(1)} = (a_{i i_0}^{(1)})^2 + (a_{i j_0}^{(1)})^2 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq i_0, j_0}} (a_{ij}^{(1)})^2 = (a_{i i_0}^{(0)})^2 + (a_{i j_0}^{(0)})^2 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq i_0, j_0}} (a_{ij}^{(0)})^2 = \sigma_i^{(0)} :$$

Այսպիսով, հաջորդ քայլում պետք է վերահաշվել միայն  $\sigma_{i_0}^{(1)}$  և  $\sigma_{j_0}^{(1)}$  մեծությունները: Այսինքն, գլխավոր տարրի ընտրության համար կծախսվի  $\sim 6n$  թվաբանական գործողություն: Փաստորեն, զիջելով առաջին քայլում, էապես կշահենք հաջորդ քայլերում:

- *Մեթոդի զուգամիտության մասին:*

Հեշտ է համոզվել, որ գլխավոր տարրի ընտրության ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ եղանակի դեպքում

$$S_0 \leq n(n-1) (a_{i_0 j_0}^{(0)})^2 :$$

Ոստի

$$(a_{i_0 j_0}^{(0)})^2 \geq \frac{S_0}{n(n-1)} :$$



Հաշվի առնելով վերջինը՝ (5.3.11)-ից կստանանք

$$S_0 - S_1 \geq \frac{2S_0}{n(n-1)}$$

կամ

$$S_1 \leq q S_0 \quad (5.3.12)$$

անհավասարությունը, որտեղ

$$q \equiv 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1 :$$

Ավորիթմի աշխատանքի արդյունքում ստանում ենք  $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  մատրիցների հաջորդականություն, ընդ որում

$$A^{(k)} = U_{k-1}^T \dots U_1^T U_0^T A U_0 U_1 \dots U_{k-1} :$$

Եթե  $S_k$ -ով նշանակենք  $A^{(k)}$  մատրիցի ոչ անկյունագծային տարրերի քառակուսիների գումարը, ապա, համաձայն (5.3.12) առնչության

$$S_k \leq q S_{k-1} \leq \dots \leq q^k S_0 :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$S_k \rightarrow 0, \quad \text{երբ } k \rightarrow \infty :$$

Գա նշանակում է, որ  $A^{(k)}$  մատրիցի ոչ անկյունագծային տարրերը ձգտում են զրոյի: Այսինքն,  $A^{(k)}$  մատրիցների հաջորդականությունը ձգտում է անկյունագծային մատրիցի: Ավելին, այդ մատրիցը  $A$  մատրիցի սեփական արժեքներից կազմված  $\Lambda$  մատրիցն է (տե՛ս (5.3.1)-ը): Այդ փաստի ապացույցը կարելի է գտնել, օրինակ, [5] դասագրքում:

Գործնականում ընտրում են որոշակի  $\varepsilon > 0$  փոքր մեծություն և հաշվումները շարունակում են այնքան ժամանակ, մինչև բավարարվի  $S_k < \varepsilon$  անհավասարությունը: Գրանից հետո որպես  $A$  մատրիցի սեփական արժեքներ վերցնում են  $A^{(k)}$  մատրիցի անկյունագծային տարրերը, իսկ որպես սեփական վեկտորներ՝  $U_0 U_1 \dots U_{k-1}$  օրթոգոնալ մատրիցի սյունակները:

## 5.4 Սեփական արժեքների տեղայնացումը

Ինչպես տեսական հետազոտություններում, այնպես էլ հաշվումների ժամանակ հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել կոմպլեքս հարթության այն տիրույթը, որը պարունակում է մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները: Օրինակ, ունենք

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (5.4.1)$$

գնահատականը (թեորեմ 3.4.1), որի համաձայն  $A$  մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են կոմպլեքս հարթության  $\|A\|$  շառավիղով և  $z = 0$  կենտրոնով շրջանում: Սակայն (5.4.1) գնահատականը տալիս է սեփական արժեքների բավականին կոպիտ տեղայնացում: Ստորև բերվում է մի պնդում, որը տալիս է սեփական արժեքների դասավորության ավելի ճշգրիտ գնահատական: Այս կարևոր պնդումը հայանի է որպես *Գերշգորիների թեորեմ*:

Գիցուք ունենք  $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{C}^{n \times n}$  մատրիցը: Այդ մատրիցի համար սահմանենք հետևյալ մեծությունները.

$$r_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (5.4.2)$$

Այնուհետև դիտարկենք կոմպլեքս հարթության

$$D_i \equiv \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4.3)$$

շրջանները: Ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 5.4.1** (Ս.Գերշգորին) :  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են կոմպլեքս հարթության

$$G(A) \equiv \bigcup_{i=1}^n D_i \quad (5.4.4)$$

տիրույթում: Ընդ որում, եթե  $k$  հատ (5.4.3) շրջանների միավորումը կապակցված տիրույթ է, որը չի հատվում մնացած  $n - k$  շրջանների հետ, ապա այդ տիրույթում գտնվում է  $A$  մատրիցի ճիշտ  $k$  հատ սեփական արժեք:

Ապացույց: Գիցուք  $\lambda$ -ն  $A$  մատրիցի սեփական արժեք է, իսկ  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$  վեկտորը՝ համապատասխան սեփական վեկտոր.

$$Ax = \lambda x : \quad (5.4.5)$$

Ակնհայտ է, որ գոյություն ունի այնպիսի  $p$ , որտեղ  $1 \leq p \leq n$ , որի համար

$$\|x\|_\infty = |x_p| : \quad (5.4.6)$$

Ընդ որում՝  $|x_p| \neq 0$ : Այնուհետև, (5.4.5)-ից բխում է

$$\sum_{j=1}^n a_{pj} x_j = \lambda x_p$$

հավասարությունը, որը պարզ ձևափոխություններից հետո ընդունում է

$$(\lambda - a_{pp})x_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n a_{pj} x_j$$

տեսքը: Այստեղից, հաշվի առնելով (5.4.6)-ը, հաջորդաբար ստանում ենք

$$|\lambda - a_{pp}| |x_p| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n a_{pj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| |x_j| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n |a_{pj}| \right) |x_p| = r_p |x_p| :$$

Այսպիսով, հանգում ենք

$$|\lambda - a_{pp}| |x_p| \leq r_p |x_p|$$

անհավասարությանը, որից բխում է

$$|\lambda - a_{pp}| \leq r_p$$

զնահատականը: Վերջինը նշանակում է, որ  $\lambda \in D_p$  և, հետևաբար,  $\lambda \in G(A)$ : Այսպիսով, թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք համարել, որ հենց առաջին  $D_1, D_2, \dots, D_k$  շրջանները կազմում են կապակցված տիրույթ

$$G_k(A) \equiv \bigcup_{i=1}^k D_i, \quad (5.4.7)$$

որը չի հատվում

$$\overline{G}_k(A) \equiv \bigcup_{i=k+1}^n D_i \quad (5.4.8)$$

լրացուցիչ տիրույթի հետ:

Դիտարկենք մատրիցների

$$A(t) \equiv tA + (1-t)D_A, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.4.9)$$

ընտանիքը, որտեղ

$$D_A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & 0 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} :$$

Պարզ է, որ  $A(0) = D_A$ ,  $A(1) = A$ : Դիցուք  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  թվերը  $A$  մատրիցի սեփական արժեքներն են: Եթե  $\lambda_i(t)$ -ով նշանակենք  $A(t)$  մատրիցի սեփական արժեքները, ապա

$$\lambda_i(0) = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4.10)$$

$$\lambda_i(1) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (5.4.11)$$

Սահմանենք  $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$  մատրիցի համար

$$r_i(t) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

մեծությունները (տե՛ս նաև (5.4.2) նշանակումները): Ինչպես հետևում է  $A(t)$  մատրիցի (5.4.9) սահմանումից,

$$r_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |ta_{ij}| = t \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = tr_i :$$

Այնուհետև, բոլոր  $t \in [0, 1]$  արժեքների համար դիտարկենք

$$D_i(t) \equiv \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}(t)| \leq r_i(t)\} = \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq tr_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

շրջանները: Գիցուք

$$G_k(t) = \bigcup_{i=1}^k D_i(t) :$$

Ակնհայտ է, որ  $t$ -ի բոլոր դիտարկվող արժեքների համար  $G_k(t)$  բազմությունները գտնվում են (5.4.7)-ում ներմուծված  $G_k(A)$  կապակցված տիրույթում:

Երբ  $t = 0$ , մենք ունենք  $G_k(A)$  տիրույթին պատկանող ճիշտ  $k$  հատ սեփական արժեք  $\lambda_i(0) = a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  (տե՛ս (5.4.10)-ը): Հայտնի է, որ մատրիցի սեփական արժեքները անընդհատորեն կախված են այդ մատրիցի տարրերից (դա կարելի է գտնել, օրինակ, [67] մենագրությունում): Ուստի  $A(t)$  մատրիցի  $\lambda_i(t)$  սեփական արժեքները անընդհատորեն փոփոխվում են  $t$ -ի աճման հետ մեկտեղ և գծում են կոմպլեքս հարթության վրա անընդհատ կորեր, որոնք սկսվում են  $\lambda_i(0) = a_{ii}$  կետում և վերջանում  $\lambda_i(1) = \lambda_i$  կետում (տե՛ս (5.4.11)-ը): Ընդ որում, ամեն մի  $t$ -ի համար

$$\lambda_i(t) \in G_k(t) \subset G_k(A), \quad i = 1, 2, \dots, k :$$

Այսպիսով, ամեն մի  $t \in [0, 1]$  արժեքի համար  $G_k(t)$  տիրույթը պարունակում է  $A(t)$  մատրիցի ճիշտ  $k$  հատ սեփական արժեք, և քանի որ  $\overline{G_k(A)} \cap G_k(A) = \emptyset$ , ապա նրանք չեն կարող հատրահարել խզումը  $G_k(A)$  և  $\overline{G_k(A)}$  տիրույթների միջև:  $\square$

Ասենք, որ  $D_i$  շրջանները անվանում են *Գերշգորհինի շրջաններ*, իսկ (5.4.4)-ում սահմանված  $G(A)$  տիրույթը՝ *Գերշգորհինի տիրույթ*:

#### Օրինակ 5.4.1 : Գիտարկենք

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 + 3i \end{bmatrix}$$

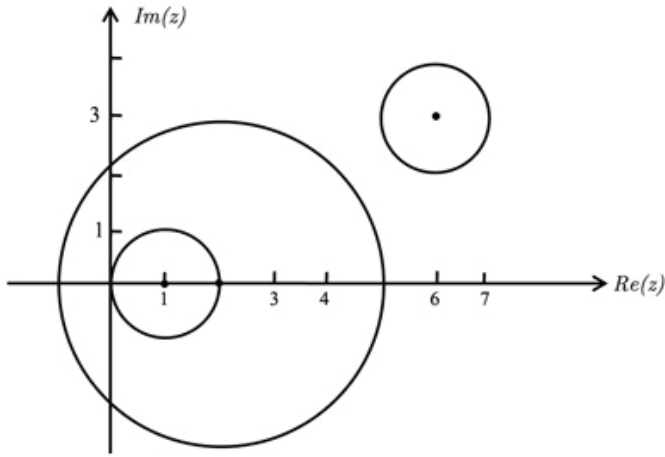
մատրիցը: Գրա սեփական արժեքները հետևյալն են.

$$\lambda_1 = 1.0945 - 0.2113i,$$

$$\lambda_2 = 1.5615 + 0.4477i,$$

$$\lambda_3 = 6.3440 + 2.7636i :$$

Նկ. 5.4.1-ում պատկերված են Գերշգորհինի շրջանները այդ մատրիցի համար:  $\diamond$



**Նկ. 5.4.1** Գերշգորինի շրջաններ

Ապացուցված թեորեմը Գերշգորինի թեորեմի տողային տարբերակն է: Գոյություն ունի նաև այդ թեորեմի սյունակային տարբերակը: Քանի որ  $A$  և  $A^T$  մատրիցները ունեն նույն սեփական արժեքներ (լեմմա 3.2.4), ապա 5.4.1 թեորեմը կարելի է կիրառել  $A^T$  մատրիցի նկատմամբ:

Սահմանենք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի համար

$$c_j \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{5.4.12}$$

մեծությունները: Դիտարկենք կոմպլեքս հարթությունում հետևյալ շրջանները.

$$\hat{D}_j \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq c_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n : \tag{5.4.13}$$

**Թեորեմ 5.4.2 :**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են կոմպլեքս հարթության

$$\hat{D}(A) \equiv \bigcup_{j=1}^n \hat{D}_j = G(A^T) \tag{5.4.14}$$

տիրույթում: Ընդ որում, եթե  $k$  հաստ (5.4.13) շրջանների միավորումը կապակցված տիրույթ է, որը չի հատվում մնացած  $n - k$  շրջանների հետ, ապա այդ տիրույթում գտնվում է  $A$  մատրիցի ճիշտ  $k$  հաստ սեփական արժեք:

Միավորելով 5.4.1 և 5.4.2 թեորեմները՝ ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 5.4.3 :**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  մատրիցի բոլոր սեփական արժեքները պատկանում են

$$G(A) \cap G(A^T)$$

տիրույթին:

Վերը մենք տվել ենք մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխման գաղափարը (սահմանում 4.4.1): Գերշտորինի թեորեմից հետևում է մի կարևոր պնդում:

**Թեորեմ 5.4.4 :** *Եթե  $A$  մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում, ապա այդ մատրիցը չվերասերված է:*

**Ապացույց:** Մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխման (4.4.16) պայմանից բխում է, որ  $|a_{ii}| > r_i$  բոլոր  $i = 1, 2, \dots, n$  արժեքների համար: Դա նշանակում է, որ  $G(A)$  Գերշտորինի տիրույթը չի պարունակում կոմպլեքս հարթության  $z = 0$  կետը: Ուստի  $A$  մատրիցը չի կարող ունենալ զրոյական սեփական արժեք:  $\square$

## 5.5 Սեփական արժեքների խտտորման մասին

Հայտնի է, որ մատրիցի սեփական արժեքները անընդհատորեն կախված են այդ մատրիցի տարրերից (տե՛ս [67] մենագրությունը): Սակայն սեփական արժեքները, հատկապես՝ ոչ սիմետրիկ մատրիցների դեպքում, վատ են պայմանավորված: Դա նշանակում է, որ մատրիցի տարրերի փոքր փոփոխությունը կարող է հանգեցնել սեփական արժեքների մեծ շեղման:

**Օրինակ 5.5.1 :** Դիտարկենք հետևյալ մատրիցները.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \varepsilon & & & & 0 \end{bmatrix} :$$

Պարզ է, որ  $\lambda_i(A) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Ինչ վերաբերում է  $B$  մատրիցին, ապա դրա սեփական արժեքները բավարարում են

$$\lambda^n - \varepsilon = 0$$

բնութագրիչ հավասարմանը: Այսինքն՝  $\lambda_i(B) = |\varepsilon|^{1/n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Եթե, օրինակ, վերցնենք  $n = 100$  և  $\varepsilon = 10^{-100}$ , ապա կստանանք, որ  $|\lambda_i(B)| = 10^{-1}$ :  $\diamond$

Որոշ դեպքերում հնարավոր է լինում գնահատել մատրիցի տարրերի խտտորման պատճառով առաջացած սեփական արժեքների շեղումը:

Անկյունագծային մատրիցի սեփական արժեքները նրա գլխավոր անկյունագծի տարրերն են: Տրված է

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (5.5.1)$$

անկյունագծային մատրից: Գիտարկենք  $E = [\varepsilon_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցը որպես  $D$  մատրիցի խտտորում: Արդյունքում կունենանք

$$D + E = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \lambda_2 + \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \lambda_n + \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.5.2)$$

խտտրված մատրից:

**Թեորեմ 5.5.1 :**  $D + E$  մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են

$$\tilde{G}(D + E) \equiv \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \|E\|_\infty\} \quad (5.5.3)$$

շրջանների միավորմանը:

Ապացույց: Ըստ Գերշգորինի 5.4.1 թեորեմի (5.5.2) մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են

$$G(D + E) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| \leq r_i\}$$

տիրույթում, որտեղ

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\varepsilon_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Ցանկացած կետի համար  $\{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| \leq r_i\}$  շրջանից ունենք՝

$$|z - \lambda_i| \leq |z - \lambda_i - \varepsilon_{ii}| + |\varepsilon_{ii}| \leq r_i + |\varepsilon_{ii}| = \sum_{j=1}^n |\varepsilon_{ij}| \equiv R_i :$$

Ուստի  $D + E$  մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq R_i\}$$

շրջանների միավորման մեջ: Իսկ քանի որ

$$\max_{1 \leq i \leq n} R_i = \|E\|_\infty,$$

ապա  $D + E$  մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են (5.5.3) տիրույթին:  $\square$

Այսպիսով,  $D + E$  մատրիցի կամայական  $\tilde{\lambda}$  սեփական արժեքի համար կգտնվի  $D$  մատրիցի այնպիսի  $\lambda_i$  սեփական արժեք, որ

$$|\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq \|E\|_\infty :$$

Ստացված արդյունքը կարելի է ընդհանրացնել *պարզ կառուցվածքի մատրիցների* վրա: Այդպես կոչվում են  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  մատրիցները, որոնք

$$S^{-1}AS = D \quad (5.5.4)$$

մնանության ձևափոխությամբ բերվում են (5.5.1) անկյունագծային տեսքի (տե՛ս [16, 32, 33]): Այդ մատրիցների հետ մենք արդեն առնչվել ենք 5.2 պարագրաֆում: Մասնավորապես, սիմետրիկ մատրիցները պարզ կառուցվածքի մատրիցներ են:

**Թեորեմ 5.5.2:** *Դիցուք  $A$ -ն պարզ կառուցվածքի մատրից է, իսկ  $E = [\varepsilon_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցը նրա խտտորում է: Այդ դեպքում  $A + E$  մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են*

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \kappa_\infty(S) \|E\|_\infty\} \quad (5.5.5)$$

*շրջանների միավորմանը:*

Ապացույց: Կիրառենք մնանության ձևափոխությունը  $A + E$  մատրիցի նկատմամբ: Հաշվի առնելով (5.5.4)-ը՝ կստանանք

$$S^{-1}(A + E)S = D + S^{-1}ES :$$

Ուստի  $A + E$  և  $D + S^{-1}ES$  մատրիցների սեփական արժեքները համընկնում են: Ըստ 5.5.1 թեորեմի՝  $D + S^{-1}ES$  մատրիցի սեփական արժեքները պատկանում են

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C} : |z - \lambda_i| \leq \|S^{-1}ES\|_\infty\}$$

տիրույթին: Կատարենք պարզ գնահատականներ.

$$\|S^{-1}ES\|_\infty \leq \|S^{-1}\|_\infty \|E\|_\infty \|S\|_\infty = \kappa_\infty(S) \|E\|_\infty :$$

Այսպիսով,  $A + E$  մատրիցի սեփական արժեքները գտնվում են (5.5.5) տիրույթում:  $\square$

Մի շարք կարևոր արդյունքներ մատրիցների սեփական արժեքների խտտորման վերաբերյալ կարելի է գտնել [67] մենագրության մեջ:

Վերջում մի քանի խոսք սեփական վեկտորների մասին: Ի տարբերություն սեփական արժեքների՝ սեփական վեկտորները, մատրիցի տարրերի նույնիսկ փոքր խտտորմաների դեպքում, կարող են կրել արմատական փոփոխություններ:

Դիտարկենք, օրինակ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցը, որի սեփական արժեքները  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  թվեր են, իսկ համապատասխան սեփական վեկտորները՝

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$



Տանք այդ մատրիցին

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Խոստորում: Արդյունքում

$$A + E = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքներ կդառնան  $\tilde{\lambda}_1 = 1 + \varepsilon$  և  $\tilde{\lambda}_2 = 1$  թվերը: Եթե  $\varepsilon\delta \neq 0$ , ապա համապատասխան նորմավորված սեփական վեկտորներ կլինեն

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}} \begin{bmatrix} -\delta \\ \varepsilon \end{bmatrix} :$$

Առաջին սեփական վեկտորը չի փոխվել, իսկ երկրորդ վեկտորին  $\varepsilon/\delta$  հարաբերության ընտրությամբ կարելի է տալ ցանկացած ուղղություն:

## ԽՆԴԻՐՆԵՐ և ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ - 5

1. Գտնել

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամը:

2. Ապացուցել, որ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 5 \end{bmatrix}$$

մատրիցի սեփական արժեքները իրական թվեր են:

3. Հիմնավորել, որ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

մատրիցն ունի առնվազն երկու իրական սեփական արժեք:

4. Գիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցի տարրերն այնպիսին են, որ

$$|a_{ii}| > r_i, \quad i = i_1, i_2, \dots, i_k,$$

որտեղ  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  ( $r_i$  թվերը սահմանված են (5.4.2)-ում): Ապացուցել, որ  $\text{rank } A \geq k$ :

5. Գիցուք  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում ըստ տողերի (սահմանում 4.4.1): Ապացուցել, որ գոնե մեկ  $j$ -ի համար  $|a_{jj}| > c_j$  ( $c_j$  թվերը սահմանված են (5.4.12)-ում):

6. Ապացուցել, որ եթե  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում ըստ սյունակների, այսինքն՝

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ապա այդ մատրիցը չվերասերված է:

7. Գիցուք  $A$  մատրիցը օրթոգոնալ ձևափոխությամբ բերվում է

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 3.05 & -0.06 & 0.02 \\ -0.06 & -6.91 & 0.07 \\ 0.02 & 0.07 & 8.44 \end{bmatrix}$$

տեսքի: Գնահատել  $A$  մատրիցի սեփական արժեքները:

## Գլուխ 6

# ԻՆՏԵՐՊՈԼԱՑԻԱ

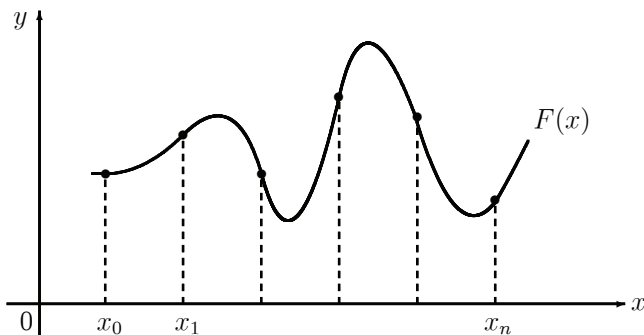
### 6.1 Ինտերպոլացիայի խնդիրը

Մի շարք դեպքերում անհրաժեշտ է լինում դիտարկվող ֆունկցիան մոտարկել ավելի պարզ ֆունկցիայով: Կիրառվում են ֆունկցիաների մոտարկման տարբեր եղանակներ: Դրանցից մեկը *ինտերպոլացիան է*:

Գիցուք թվային առանցքի  $x_0, x_1, \dots, x_n$  իրարից տարբեր կետերում հայտնի են  $y = f(x)$  ֆունկցիայի  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  արժեքները: Պահանջվում է կառուցել այնպիսի  $F(x)$  անընդհատ ֆունկցիա, որ

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(տե՛ս նկ. 6.1.1): Այս խնդիրը անվանում են *ինտերպոլացիայի խնդիր*:  $F(x)$  ֆունկցիան կոչվում է *ինտերպոլացիոն ֆունկցիա*, իսկ  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերը՝ *ինտերպոլացիայի հանգույցներ*:



**Նկ. 6.1.1** Ինտերպոլացիա

Ինտերպոլացիոն ֆունկցիայի կառուցման անհրաժեշտություն կարող է ծագել, օրինակ, հետևյալ գործնական խնդիրը լուծելիս: Հայտնի են  $y = f(x)$  ֆունկցիայի

արժեքները  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերում, և պահանջվում է, թեկուզ մոտավոր, գտնել այդ ֆունկցիայի արժեքները այլ կետերում: Մենք կարող ենք  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  արժեքներով կառուցել  $F(x)$  ինտերպոլացիոն ֆունկցիա և մնացած կետերում վերցնել  $f(x) \approx F(x)$ :

Ինտերպոլացիոն ֆունկցիայի նկատմամբ հիմնական պահանջներից մեկը այն է, որ նա լինի հեշտ հաշվելի: Փնտրենք այդ ֆունկցիան որպես հանրահաշվական բազմանդամ

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k : \quad (6.1.1)$$

Ըստ խնդրի դրվածքի՝

$$L_m(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n : \quad (6.1.2)$$

Այսպիսով,  $m + 1$  հաստ  $a_0, a_1, \dots, a_m$  անհայտ պարամետր որոշելու համար մենք ունենք  $n + 1$  հաստ պայման: Ինչպե՞ս պետք է ընտրել  $m$ -ը: Քննարկենք երեք հնարավոր դեպք:

ա) Եթե  $m < n$ , ապա ինտերպոլացիայի խնդիրը կարող է լուծում չունենալ: Վերցնենք, օրինակ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  ( $n = 2$ ) և, համապատասխանաբար,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 1$ : Ակնհայտորեն գոյություն չունի գծային ֆունկցիա ( $m = 1$ ), որն անցնում է կորորդինատական հարթության  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  և  $(2, 1)$  կետերով:

բ) Այժմ դիտարկենք  $m > n$  դեպքը: Վերցնենք  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  ( $n = 1$ ), և համապատասխանաբար՝  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ : Կարելի է նշել բազմաթիվ երկրորդ կարգի ինտերպոլացիոն բազմանդամներ, օրինակ՝

$$\begin{aligned} L_2(x) &= x^2, \\ L_2(x) &= 2x^2 - x, \\ L_2(x) &= -x^2 + 2x \end{aligned}$$

և այլն: Այսպիսով, այս դեպքում խնդիրն ունի բազմաթիվ լուծումներ:

գ) Գիցուք  $m = n$ : Այս դեպքում ինտերպոլացիայի խնդիրն ունի միակ լուծում: Իրոք, (6.1.1) բազմանդամի գործակիցները որոշելու համար (6.1.2) պայմանները տալիս են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots &\dots \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n \end{cases} : \quad (6.1.3)$$

Այս համակարգի որոշիչը *Վանդերմոնդի որոշիչն է*.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0 :$$

Ուստի (6.1.3) համակարգն ունի միակ լուծում կամայական աջ մասի դեպքում: Հետևաբար, գոյություն ունի միակ բազմանդամ

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (6.1.4)$$

որը բավարարում է

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

պայմաններին:

## 6.2 Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը

Նախորդ պարագրաֆում մենք ցույց ենք տվել, որ ինտերպոլացիոն բազմանդամը գոյություն ունի և միակն է: Հաջորդ հարցը բազմանդամի կառուցումն է: Իհարկե, կարելի է ստանալ (6.1.4) բազմանդամի գործակիցները՝ լուծելով (6.1.3) համակարգը: Սակայն այս ճանապարհը, հատկապես  $n$ -ի մեծ արժեքների համար, անընդունելի է: Պարզվում է, որ ինտերպոլացիոն բազմանդամի բացահայտ տեսքը կարելի է ստանալ առանց լուծելու նշված համակարգը:

### 6.2.1 Ինտերպոլացիոն բանաձևի արտածումը

Գիտարկենք  $k = 0, 1, \dots, n$  արժեքների համար

$$l_n^{(k)}(x) \equiv \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (6.2.1)$$

բազմանդամները: Գծվար չէ տեսնել, որ այդ բազմանդամները ունեն հետևյալ հատկությունը.

$$l_n^{(k)}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i = k \\ 0, & \text{եթե } i \neq k \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Յույց տանք, որ

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_n^{(k)}(x) \quad (6.2.3)$$

ֆունկցիան որոնելի ինտերպոլացիոն բազմանդամ է: Իրոք, ըստ (6.2.2) հատկության ունենք

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_n^{(k)}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Տեղադրելով  $l_n^{(k)}(x)$  բազմանդամի (6.2.1) արտահայտությունը (6.2.3)-ի մեջ՝ կստանանք ինտերպոլացիոն բազմանդամի

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \quad (6.2.4)$$

տեսքը, որը կրում է *Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձև* անունը:

**Օրինակ 6.2.1 :** Կառուցենք ինտերպոլացիոն բազմանդամ  $f(x) = \sin \pi x$  ֆունկցիայի համար: Որպես հանգույցներ վերցնենք  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{6}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  կետերը:

Նախ հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները հանգույցներում՝  $f(x_0) = 0$ ,  $f(x_1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(x_2) = 1$ : Համաձայն (6.2.4) բանաձևի՝ կստանանք

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ & f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 0 \cdot \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} + \\ & 1 \cdot \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} = -3x^2 + \frac{7}{2}x : \end{aligned}$$

Ստուգումը ցույց է տալիս, որ  $L_2(x)$  բազմանդամի և  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքները հանգույցներում համընկնում են:  $\diamond$

Եթե  $f(x)$  ֆունկցիան  $n$ -րդ կարգի բազմանդամ է, ապա  $L_n(x) \equiv f(x)$ : Սա բխում է ինտերպոլացիոն բազմանդամի միակությունից:

Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը կարելի է գրել ավելի հավաք տեսքով: Դրա համար ներմուծենք հետևյալ բազմանդամը.

$$\omega_{n+1}(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) : \quad (6.2.5)$$

Այդ դեպքում

$$(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k}$$

և

$$(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) = \omega'_{n+1}(x_k) :$$

Այսպիսով, (6.2.4)-ից ստանում ենք

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \quad (6.2.6)$$

բանաձևը:

## 6.2.2 Էյտկենի ինտերպոլացիոն սխեմա

Եթե պահանջվում է գտնել  $L_n(x)$  բազմանդամի ոչ թե անալիտիկ տեսքը, այլ միայն նրա արժեքը որոշակի  $x$  կետում, ապա կարելի է օգտվել *Էյտկենի ինտերպոլացիոն սխեմայից*: Համաձայն այդ սխեմայի, ինտերպոլացիոն բազմանդամի արժեքը ստացվում է միանման գործողությունների հաջորդականության արդյունքում:

Գիտարկենք հետևյալ առաջին կարգի բազմանդամները.

$$L_1^{(i)}(x) \equiv \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 :$$

Ակնհայտ է, որ

$$L_1^{(i)}(x_i) = y_i, \quad L_1^{(i)}(x_{i+1}) = y_{i+1} :$$

Այսպիսով,  $L_1^{(i)}(x)$  բազմանդամը  $x_i, x_{i+1}$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամ է: Այնուհետև կառուցենք երկրորդ կարգի բազմանդամները.

$$L_2^{(i)}(x) \equiv \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} L_1^{(i)}(x) & x_i - x \\ L_1^{(i+1)}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 2 :$$

Պարզ հաշվումները ցույց են տալիս, որ

$$L_2^{(i)}(x_i) = y_i, \quad L_2^{(i)}(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad L_2^{(i)}(x_{i+2}) = y_{i+2} :$$

Այսինքն,  $L_2^{(i)}(x)$ -ը  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  հանգույցներով կառուցված երկրորդ կարգի ինտերպոլացիոն բազմանդամ է:

Ընդհանուր դեպքում, կառուցենք  $k$ -րդ կարգի ( $3 \leq k \leq n$ ) բազմանդամներ.

$$L_k^{(i)}(x) \equiv \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \begin{vmatrix} L_{k-1}^{(i)}(x) & x_i - x \\ L_{k-1}^{(i+1)}(x) & x_{i+k} - x \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n - k :$$

Այս բազմանդամները  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամներ են, քանի որ

$$L_k^{(i)}(x_j) = y_j, \quad j = i, i + 1, \dots, i + k :$$

Շարունակելով այսպես՝ կստանանք

$$L_n^{(0)}(x) \equiv L_n(x) :$$

Ստորև տրված է ինտերպոլացիոն բազմանդամի արժեքի հաշվման սխեման  $n = 4$  դեպքի համար.

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$x_0$	$y_0$	$L_1^{(0)}(x)$	$L_2^{(0)}(x)$	$L_3^{(0)}(x)$	$L_4^{(0)}(x)$
$x_1$	$y_1$	$L_1^{(1)}(x)$	$L_2^{(1)}(x)$	$L_3^{(1)}(x)$	
$x_2$	$y_2$	$L_1^{(2)}(x)$	$L_2^{(2)}(x)$		
$x_3$	$y_3$	$L_1^{(3)}(x)$			
$x_4$	$y_4$				

Գրենք Էյտկենի սխեմայի ալգորիթմը.

**Pseudocode AITKEN**

input  $n, (x_i), (y_i), x$

for  $i = 0, 1, \dots, n$  do

$E_i = y_i$

end

for  $k = 1, 2, \dots, n$  do

for  $i = 0, 1, \dots, n - k$  do

$E_i = [E_i(x_{i+k} - x) - E_{i+1}(x_i - x)] / (x_{i+k} - x_i)$

end

end

output  $E_0$

### 6.2.3 Ինտերպոլացիայի սխալանքը

Գիցուք  $f(x)$  ֆունկցիայի համար կառուցված է  $L_n(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամը ըստ  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցների: Այդ բազմանդամը և  $f(x)$ -ը համընկնում են ինտերպոլացիայի հանգույցներում: Սակայն, ընդհանրապես ասած, դրանք տարբերվում են այլ կետերում: Այդ պատճառով առաջանում է  $f(x) - L_n(x)$  տարբերության գնահատման հարցը:

Ենթադրենք, որ  $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ , որտեղ  $[a, b]$ -ն  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցները պարունակող հատված է: Այսինքն,  $f(x)$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում ունի  $n + 1$  հատ անընդհատ ածանցյալ ( $C^k[a, b]$  տարածությունների վերաբերյալ տե՛ս, օրինակ, [29] դասագիրքը):

Դիտարկենք

$$\varphi(z) \equiv f(z) - L_n(z) - K\omega_{n+1}(z), \quad z \in [a, b]$$

ֆունկցիան, որտեղ  $\omega_{n+1}$  բազմանդամը սահմանված է (6.2.5)-ում, իսկ  $K$ -ն որոշակի հաստատուն է: Պարզ է, որ  $\varphi(z) \in C^{n+1}[a, b]$  և ինտերպոլացիայի հանգույցներում  $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0$ : Գիցուք  $x$ -ը  $[a, b]$  հատվածի կամայական կետ է, որը չի համընկնում ինտերպոլացիայի հանգույցների հետ: Ընտրենք  $K$  թիվն այնպես, որ  $\varphi(x) = 0$ , այսինքն՝

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} : \quad (6.2.7)$$

Այսպիսով,  $\varphi(z)$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածի  $x_0, x_1, \dots, x_n$  և  $x$  կետերում հավասար է զրոյի: Հետևաբար, համաձայն Ռոլլի թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [62]),  $\varphi'(z)$  ածանցյալը հավասար է զրոյի  $(a, b)$  միջակայքի առնվազն  $n + 1$  հատ կետում: Այնուհետև,  $\varphi''(z)$  երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է զրոյի  $(a, b)$  միջակայքի առնվազն  $n$  հատ կետում և այլն: Շարունակելով նման դատողությունները՝ հանգում ենք որ  $(a, b)$  միջակայքում գոյություն կունենա գոնե մեկ  $\xi$  կետ, որի համար  $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ : Ունենք

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!$$



Տեղադրելով վերջին հավասարության մեջ  $z = \xi$ , կստանանք

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} : \quad (6.2.8)$$

Հավասարեցնելով  $K$ -ի համար ունեցած (6.2.7) և (6.2.8) արտահայտությունները՝ կստանանք

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) : \quad (6.2.9)$$

Այսպիսով, մենք ստացել ենք արտահայտություն ինտերպոլացիայի սխալանքի համար: Այդ արտահայտության արտածման ժամանակ մենք ենթադրել ենք, որ  $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ : Սակայն (6.2.9) արտահայտությունը ճիշտ է նաև, երբ  $x$  կետը համընկնում է ինտերպոլացիայի որևէ հանգույցի հետ:

Նկատենք, որ (6.2.9) բանաձևում մասնակցում է  $\xi \in (a, b)$  կետը, որը, որպես կանոն, հայտնի չէ: Դրա փոխարեն մենք կարող ենք գնահատել բացարձակ սխալանքը: Դրա համար ներմուծենք հետևյալ մեծությունը.

$$M_{n+1} \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| : \quad (6.2.10)$$

Այդ դեպքում (6.2.9)-ից սկնհայտորեն կհետևի

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad \forall x \in [a, b] \quad (6.2.11)$$

գնահատականը:

### 6.3 Չերիշևի բազմանդամները

Այսպիսով, մենք կարողացել ենք  $[a, b]$  հատվածի կամայական կետում գնահատել  $L_n(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամի շեղումը  $f(x)$  ֆունկցիայից: Դա (6.2.11) գնահատականն է: Սահմանենք անընդհատ ֆունկցիաների  $C[a, b]$  տարածության մեջ

$$\|f\| \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

նորմը (տե՛ս, օրինակ, [29] դասագիրքը): Այդ դեպքում (6.2.11)-ից բխում է

$$\|f - L_n\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\| \quad (6.3.1)$$

գնահատականը, որը փաստորեն  $[a, b]$  հատվածում  $L_n(x)$  բազմանդամի մեծագույն շեղումն է  $f(x)$  ֆունկցիայից: Այդ շեղումը որոշվում է (6.2.10)-ում տրված  $M_{n+1}$  մեծությամբ և  $\|\omega_{n+1}\|$  նորմով: Ֆիքսելով հանգույցների թիվը՝ մենք կարող ենք փոփոխել  $\|\omega_{n+1}\|$  նորմի արժեքը՝ տարբեր ձևերով ընտրելով  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցները: Չնակերպենք հետևյալ խնդիրը.

ընտրել  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  ինտերպոլացիայի հանգույցները այնպես, որ  $||\omega_{n+1}||$  նորմը ընդունի նվազագույն արժեքը:

Պարզվում է, որ այս խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ Չեբիշևի բազմանդամների օգնությամբ:

### 6.3.1 Չեբիշևի բազմանդամները և նրանց հատկությունները

Չեբիշևի բազմանդամները որոշվում են հետևյալ անդրադարձ առնչությունների միջոցով.

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Ըստ (6.3.2) բանաձևերի՝

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Նշենք նաև, որ նույն (6.3.2) բանաձևերից հետևում է, որ  $n \geq 1$  արժեքների համար  $T_n(x)$  բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է  $2^{n-1}$ -ի, այսինքն՝

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots \quad (6.3.3)$$

**Լեմմա 6.3.1 :**  $[-1, 1]$  հատվածում Չեբիշևի բազմանդամները ներկայացնելի են

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.3.4)$$

տեսքով:

Ապացույց: Գիտարկենք

$$C_n(x) \equiv \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots$$

ֆունկցիաները: Մասնավորապես՝

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = x : \quad (6.3.5)$$

Այնուհետև, եթե

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos t \cdot \cos nt$$

հավասարության մեջ տեղադրենք  $t = \arccos x$ , ապա կստանանք

$$C_{n+1}(x) = 2x C_n(x) - C_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.6)$$

առնչությունը: Համեմատելով (6.3.2) բանաձևերը (6.3.5) և (6.3.6) հավասարությունների հետ՝ հանգում ենք լեմմայի պնդմանը:  $\square$

Արտաձենք Չեբիշևի բազմանդամների երկու կարևոր հատկություն:

**Լեմմա 6.3.2 :**  $T_n(x)$  բազմանդամը  $n \geq 1$ -ի դեպքում  $(-1, 1)$  միջակայքում ունի ճիշտ  $n$  հատ տարբեր իրական արմատ:

Ապացույց: Օգտվելով Չեբիշևի բազմանդամի (6.3.4) տեսքից՝ գրենք

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

հավասարման արմատները.

$$\xi_k = \cos(2k + 1) \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots :$$

Հեշտ է նկատել, որ դրանցից միայն

$$\xi_k = \cos(2k + 1) \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (6.3.7)$$

արմատներն են իրարից զույգ առ զույգ տարբեր: Այսպիսով, մենք գտել ենք  $T_n(x)$  բազմանդամի բոլոր արմատները: Ուստի  $(-1, 1)$  միջակայքից դուրս  $T_n(x)$  բազմանդամը արմատներ չունի:  $\square$

**Լեմմա 6.3.3 :**  $T_n(x)$  բազմանդամը  $n \geq 1$ -ի դեպքում  $[-1, 1]$  հատվածում ունի  $n + 1$  հատ էքստրեմումի կետ.

$$-1 = \theta_n < \theta_{n-1} < \dots < \theta_1 < \theta_0 = 1 : \quad (6.3.8)$$

Ընդ որում՝

$$T_n(\theta_k) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (6.3.9)$$

Ապացույց: Ինչպես հետևում է (6.3.4) բանաձևից,

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1] :$$

Գտնենք բազմանդամի էքստրեմումի կետերը

$$\cos(n \arccos x) = \pm 1$$

հավասարումից: Կստանանք

$$\theta_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots :$$

Այդ կետերից միայն

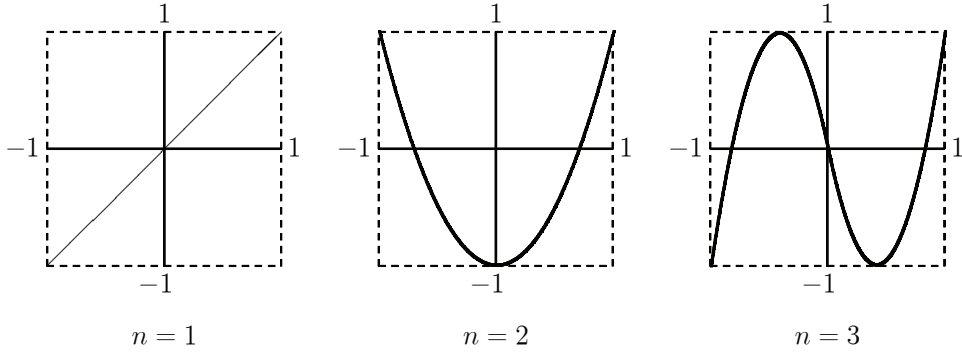
$$\theta_0 = 1, \theta_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \dots, \theta_{n-1} = \cos \frac{(n-1)\pi}{n}, \theta_n = -1 \quad (6.3.10)$$

կետերն են իրարից զույգ առ զույգ տարբեր: Տեղադրելով (6.3.10) արժեքները (6.3.4) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$T_n(\theta_k) = \cos(n \arccos \theta_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k :$$

Այսպիսով, ապացուցված է (6.3.9) հավասարությունը:  $\square$

$T_n(x)$  բազմանդամների հատկությունները լուսաբանելու նպատակով՝ նկ.6.3.1-ում բերված են այդ բազմանդամների գրաֆիկները  $n$ -ի որոշ արժեքների համար:



**Նկ. 6.3.1**  $T_n(x)$  բազմանդամների գրաֆիկները  $n = 1, 2$  և  $3$  արժեքների համար

**Գիտողություն 6.3.1 :** Չեբիշևի բազմանդամները կարող են տրվել նաև

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$n = 0, 1, \dots$$

բանաձևով (տե՛ս, օրինակ՝ [52]):

### 6.3.2 Ինտերպոլացիայի սխալանքի նվազեցումը

Այժմ վերադառնանք պարագրաֆի սկզբում ձևակերպված խնդրին:

Նախ ստանանք խնդրի լուծումը  $[-1, 1]$  հատվածում: Որպես ինտերպոլացիայի հանգույցներ ընտրենք  $T_{n+1}(x)$  բազմանդամի արմատները.

$$\xi_k = \cos(2k + 1)\frac{\pi}{2(n + 1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

(տե՛ս (6.3.7) բանաձևերը): Քանի որ  $T_{n+1}(x)$  բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է  $2^n$ -ի (տե՛ս (6.3.3)-ը), ապա

$$\omega_{n+1}^*(x) \equiv (x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

և, հետևաբար,

$$\|\omega_{n+1}^*\| = \frac{1}{2^n} \|T_{n+1}\| = \frac{1}{2^n} : \tag{6.3.11}$$

Գիտարկենք  $[-1, 1]$  հատվածում  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ինտերպոլացիայի հանգույցների կամայական հավաքածու, որտեղ հանգույցներից զոնե մեկը տարբերվում է  $T_{n+1}(x)$  բազմանդամի արմատներից: Ցույց տանք, որ

$$\|\omega_{n+1}\| > \frac{1}{2^n} : \tag{6.3.12}$$

Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝

$$\|\omega_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n} : \quad (6.3.13)$$

Կազմենք հետևյալ  $n$ -րդ կարգի բազմանդամը.

$$Q_n(x) \equiv \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) - \omega_{n+1}(x) :$$

Գիցուք

$$-1 = \theta_{n+1} < \theta_n < \dots < \theta_1 < \theta_0 = 1$$

Կետերը  $T_{n+1}(x)$  բազմանդամի էքստրեմումի կետերն են (տե՛ս (6.3.8)-ը): Հաշվի առնելով (6.3.9), (6.3.11) հավասարությունները և (6.3.13) ենթադրությունը՝ կունենանք

$$Q_n(\theta_0) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(\theta_0) - \omega_{n+1}(\theta_0) = \frac{1}{2^n} - \omega_{n+1}(\theta_0) \geq 0,$$

$$Q_n(\theta_1) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(\theta_1) - \omega_{n+1}(\theta_1) = -\frac{1}{2^n} - \omega_{n+1}(\theta_1) \leq 0,$$

.....

$$Q_n(\theta_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(\theta_n) - \omega_{n+1}(\theta_n) = \frac{(-1)^n}{2^n} - \omega_{n+1}(\theta_n) \begin{array}{l} \geq 0 \text{ (} n\text{-ը գույգ է)} \\ \leq 0 \text{ (} n\text{-ը կենտ է),} \end{array}$$

$$Q_n(\theta_{n+1}) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(\theta_{n+1}) - \omega_{n+1}(\theta_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} - \omega_{n+1}(\theta_{n+1}) \begin{array}{l} \leq 0 \text{ (} n\text{-ը գույգ է)} \\ \geq 0 \text{ (} n\text{-ը կենտ է) :} \end{array}$$

Ինչպես տեսնում ենք,  $Q_n(x)$  բազմանդամն առնվազն  $n + 1$  անգամ փոխում է իր նշանը: Դա նշանակում է, որ այդ բազմանդամը պետք է ունենա առնվազն  $n + 1$  արմատ, ինչը հնարավոր չէ: Ստացված հակասությունն ապացուցում է (6.3.12) անհավասարությունը:

Այսպիսով,  $[-1, 1]$  հատվածում  $\|\omega_{n+1}\|$  նորմը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը այն դեպքում, երբ որպես ինտերպոլացիայի հանգույցներ վերցվում են Չեբիշևի բազմանդամի արմատները:

Վերցնենք այժմ կամայական  $[a, b]$  հատված և փոխմիարժեք արտապատկերենք այն  $[-1, 1]$  հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}, \quad \xi \in [-1, 1] : \quad (6.3.14)$$

Գիցուք  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  կետերը ինտերպոլացիայի հանգույցներ են, իսկ  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  կետերը նրանց նախապատկերներ են  $[-1, 1]$  հատվածից, այսինքն՝

$$x_k = \frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n :$$

Այդ դեպքում

$$x - x_k = \frac{b-a}{2}(\xi - \xi_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

և, համապատասխանաբար,

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \omega_{n+1}^*(\xi),$$

որտեղ

$$\omega_{n+1}^*(\xi) \equiv (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$\|\omega_{n+1}\|_{[a,b]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \|\omega_{n+1}^*\|_{[-1,1]} : \quad (6.3.15)$$

Ինչպես արդեն գիտենք,  $\|\omega_{n+1}^*\|_{[-1,1]}$  նորմը ընդունում է փոքրագույն արժեք, եթե  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  հանգույցները Չեբիշևի բազմանդամի արմատներն են: Այսպիսով,  $\|\omega_{n+1}\|_{[a,b]}$  նորմը նվազեցնելու համար որպես ինտերպոլացիայի հանգույցներ պետք է վերցնել  $T_{n+1}$  բազմանդամի արմատների (6.3.14) արտապատկերմամբ ստացվող պատկերները: Ընդ որում, ինչպես հետևում է (6.3.15) և (6.3.11) հավասարություններից,

$$\|\omega_{n+1}\|_{[a,b]} = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} :$$

Համապատասխանաբար, ինտերպոլացիայի սխալանքի (6.3.1) գնահատականը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$\|f - L_n\| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)! 2^{2n+1}} : \quad (6.3.16)$$

## 6.4 Նյութոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը

Լագրանժի բանաձևը ինտերպոլացիոն բազմանդամի միակ ներկայացումը չէ: Որոշ դեպքերում ավելի հարմար է օգտագործել *Նյութոնի ինտերպոլացիոն բանաձևը*: Դրա համար նախապես սահմանենք նոր հասկացություն:

### 6.4.1 Բաժանված տարբերություններ

Դիցուք թվային առանցքի իրարից տարբեր  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցներում տրված են  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  արժեքները: Կազմենք հետևյալ հարաբերությունները.

$$f[x_i, x_{i+1}] \equiv \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 : \quad (6.4.1)$$

Այս հարաբերությունները կոչվում են *առաջին կարգի բաժանված տարբերություններ*: Դրանց հիման վրա կառուցվում են *երկրորդ կարգի բաժանված տարբերություններ* և այլն: Ավելի ճիշտ, եթե  $(k - 1)$ -րդ կարգի բաժանված տարբերություններն արդեն սահմանված են, ապա  $k$ -րդ կարգի բաժանված տարբերությունները որոշվում են

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] \equiv \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \quad (6.4.2)$$

$$i = 0, 1, \dots, n - k$$

բանաձևերով:

Ստորև տրված է բաժանված տարբերությունների աղյուսակը  $n = 4$ -ի դեպքում.

$x_i$	$f(x_i)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$			
$x_4$	$f(x_4)$				

Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևի արտաձևան ժամանակ մենք կօգտագործենք բաժանված տարբերությունների հետևյալ կարևոր հատկությունը:

**Լեմմա 6.4.1 :** *Ճիշտ է*

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_i) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{i+k})} \quad (6.4.3)$$

*հավասարությունը:*

Այս պնդման ապացույցը, որը հեշտությամբ կատարվում է ըստ  $k$ -ի ինդուկցիայի կիրառմամբ, թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

**6.4.2 Բանաձևի արտաձումը**

Ընտրենք  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցներից առաջին  $k + 1$  հանգույցները՝  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , և դրանցով կառուցենք  $L_k(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամ: Ըստ կառուցման

$$L_k(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, k :$$

Ունենք

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^n (L_k(x) - L_{k-1}(x)) \quad (6.4.4)$$

հավասարությունը, ընդ որում՝  $L_0(x) \equiv f(x_0)$  : Քանի որ

$$L_k(x_i) = L_{k-1}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

ապա  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  հանգույցները  $k$ -րդ աստիճանի  $L_k(x) - L_{k-1}(x)$  բազմանդամի արմատներն են: Հետևաբար այդ բազմանդամը կարելի է գրել

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \quad (6.4.5)$$

տեսքով: Անհայտ  $A_k$  գործակիցը գտնելու համար՝ (6.4.5) հավասարության մեջ տեղադրենք  $x = x_k$  : Կունենանք

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$$

հավասարությունը: Այստեղից պարզ ձևափոխությունների արդյունքում կստանանք՝

$$A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} - \frac{L_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \frac{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1}) \dots (x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{k-1})(x_k - x_j)} =$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)} = f[x_0, x_1, \dots, x_k] :$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք բաժանված տարբերությունների (6.4.3) հատկությունից: Այսպիսով՝

$$A_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] :$$

Տեղադրելով  $A_k$ -ի համար ստացված արտահայտությունը (6.4.5) հավասարության մեջ՝ կունենանք

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) :$$

Վերջին հավասարությունից և (6.4.4)-ից ստանում ենք

$$L_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \quad (6.4.6)$$

բանաձևը: Ինտերպոլացիոն բազմանդամի այս ներկայացումը կրում է *Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձև* անունը:



**Օրինակ 6.4.1 :** Կառուցենք ինտերպոլացիոն բազմանդամ հետևյալ տվյալներով.

$x_i$	-2	-1	1	3	6
$f(x_i)$	5	3	-1	1	10

Նախ կառուցենք բաժանված տարբերությունների աղյուսակը.

$x_i$	$f(x_i)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
-2	5	-2	0	0.15	-0.025
-1	3	-2	0.75	-0.05	
1	-1	1	0.4		
3	1	3			
6	10				

Այստեղից, կիրառելով (6.4.6) բանաձևը, կստանանք՝

$$L_4(x) = 5 - 2 \cdot (x + 2) + 0 \cdot (x + 2)(x + 1) + 0.15 \cdot (x + 2)(x + 1)(x - 1) - 0.025 \cdot (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3) = -0.025x^4 + 0.175x^3 + 0.475x^2 - 2.175x + 0.55 : \quad \diamond$$

Որոշ դեպքերում Նյուտոնի բանաձևը Լագրանժի բանաձևից գերադասելի է հետևյալ իմաստով: Եթե  $L_n(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամը արդեն կառուցված է և մոտարկման ճշտությունը բավարար չէ, ապա առաջանում է նոր հանգույցի ավելացման և  $L_{n+1}(x)$  բազմանդամի կառուցման անհրաժեշտություն: Այդ դեպքում ինչպես Նյուտոնի, այնպես էլ Լագրանժի բանաձևերում ավելանում է նոր գումարելի, սակայն Նյուտոնի բանաձևում նախորդող գումարելիները մնում են անփոփոխ, մինչդեռ Լագրանժի բանաձևում փոփոխվում են բոլոր գումարելիները: Իրոք, ինչպես հետևում է (6.4.6) բանաձևից՝

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) : \quad (6.4.7)$$

### 6.4.3 Նյուտոնի ինտերպոլացիոն բանաձևի սխալանքը

Վերը մենք ստացել ենք ինտերպոլացիայի սխալանքի (6.2.9) բանաձևը: Ըստ այդ բանաձևի՝  $f(x)$  ֆունկցիայի վրա դրվում է բավականին խիստ պահանջ. այն պետք է ունենա  $n + 1$  հատ անընդհատ ածանցյալ: Պարզվում է, որ օգտագործելով բաժանված տարբերությունները, կարելի է ստանալ ինտերպոլացիայի սխալանքի այլ ներկայացում, որը  $f(x)$  ֆունկցիայի ողորկություն չի պահանջում:

Դիցուք  $x \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ : Կառուցենք  $L_{n+1}(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամ  $x_0, x_1, \dots, x_n, x$  հանգույցներով: Համաձայն (6.4.7)-ի՝ կամայական  $z$  կետի համար ունենք

$$L_{n+1}(z) = L_n(z) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n)$$

հավասարությունը: Տեղադրենք այս հավասարության մեջ  $z = x$ : Քանի որ  $L_{n+1}(x) = f(x)$ , ապա

$$f(x) = L_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) :$$

Ուստի ինտերպոլացիայի սխալանքի համար ստանում ենք՝

$$f(x) - L_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x) : \quad (6.4.8)$$

Վերջինը ստանալիս մենք ենթադրել ենք, որ  $x$ -ը չի համընկնում ինտերպոլացիայի հանգույցների հետ: Սակայն, օգտագործելով բաժանված տարբերությունների հայտնի հատկությունները (տե՛ս, օրինակ, [5]), կարելի է ցույց տալ, որ այն ճիշտ է նաև, երբ  $x$  կետը համընկնում է ինտերպոլացիայի որևէ հանգույցի հետ:

## 6.5 Ինտերպոլացիոն բանաձևեր հավասարահեռ հանգույցների համար

Մինչև այժմ մենք կառուցում էինք ինտերպոլացիոն բազմանդամներ, ընդհանրապես ասած, հանգույցների կամայական տեղաբաշխման համար (բացի 6.3 պարագրաֆում քննարկված հանգույցների օպտիմալ ընտրության դեպքից): Սակայն, եթե չկա հանգույցների հատուկ ընտրության անհրաժեշտություն, ապա դրանք սովորաբար ընտրվում են հավասարահեռ, ինչը գործնականորեն ավելի հարմար է և բերում է ինտերպոլացիոն բանաձևերի պարզեցմանը:

### 6.5.1 Լագրանժի բանաձևը

Դիցուք  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  կետերը  $h > 0$  քայլով վերցված ինտերպոլացիայի հավասարահեռ հանգույցներ են, և տրված են  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  արժեքները: Ներմուծենք նոր փոփոխական՝

$$t = \frac{x - x_0}{h} : \quad (6.5.1)$$

Այդ դեպքում  $x_i$  հանգույցներին կհամապատասխանեն  $t_i = i$  կետերը, ընդ որում՝

$$x - x_i = h(t - i), \quad x_i - x_j = h(i - j) : \quad (6.5.2)$$

Նշենք, որ համաձայն (6.5.1) բանաձևի  $[x_0, x_n]$  հատվածում  $x$ -ի փոփոխությանը համապատասխանում է  $t$ -ի փոփոխությունը  $[0, n]$  հատվածում:

Օգտվելով (6.5.2) առնչություններից՝ (6.2.4) Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{t-k} y_k : \quad (6.5.3)$$

Այս բանաձևում

$$l_n^{(k)}(t) \equiv (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

բազմանդամները կախված չեն մոտարկվող ֆունկցիայից և  $h$  քայլից: Ուստի դրանք կարելի է կազմել նախապես և օգտագործել տարբեր դեպքերում:

### 6.5.2 Նյուտոնի բանաձևերը

Գիցուք թվային առանցքի  $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n$  հանգույցներում տրված են  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$  արժեքները: Սահմանենք

$$\Delta y_i \equiv y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{6.5.4}$$

մեծությունները, որոնք կոչվում են *առաջին կարգի վերջավոր տարբերություններ*: Այնուհետև սահմանվում են ավելի բարձր կարգի տարբերությունները: Այսպես,  $k$ -րդ կարգի վերջավոր տարբերությունները որոշվում են

$$\Delta^k y_i \equiv \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-k \tag{6.5.5}$$

բանաձևերով:

Ստորև բերված է վերջավոր տարբերությունների աղյուսակը  $n = 3$ -ի դեպքում.

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$		
$x_3$	$y_3$			

Ըստ  $k$ -ի մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ բացահայտվում է կապ վերջավոր տարբերությունների և 6.4 պարագրաֆում սահմանված բաժանված տարբերությունների միջև:

#### Լեմմա 6.5.1 : Ճիշտ է

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k} \tag{6.5.6}$$

*հավասարությունը:*

Հաշվի առնելով (6.5.2) առնչությունները և (6.5.6) հավասարությունը՝ Նյուտոնի (6.4.6) բանաձևից կատանանք ինտերպոլացիոն բազմանդամի հետևյալ ներկայացումը.

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k y_0}{k!} t(t-1)\dots(t-k+1) : \tag{6.5.7}$$

Այս բանաձևը կոչվում է *Նյուտոնի աջակողմյան ինտերպոլացիոն բանաձև*:

Նշենք, որ (6.5.7) ինտերպոլացիոն բանաձևը հարմար է կիրառել, երբ  $x$  կետն ավելի մոտ է դիտարկվող հատվածի ձախ ծայրակետին: Եթե այն մոտ է հատվածի աջ ծայրակետին, ապա ավելի նպատակահարմար է օգտվել այլ բանաձևից:

Դիցուք հավասարահեռ հանգույցները համարակալված են նվազման կարգով, այսինքն՝  $x_i = x_0 - ih, i = 0, 1, \dots, n$ : Սահմանենք

$$\nabla y_i \equiv y_i - y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \tag{6.5.8}$$

մեծությունները, որոնք կոչվում են *առաջին կարգի վերջավոր տարբերություններ*: Այնուհետև սահմանվում են ավելի բարձր կարգի տարբերությունները: Այսպես,  $k$ -րդ կարգի վերջավոր տարբերությունները որոշվում են

$$\nabla^k y_i \equiv \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - k \tag{6.5.9}$$

բանաձևերով:

Բերենք վերջավոր տարբերությունների աղյուսակը  $n = 3$ -ի դեպքում.

$x_i$	$y_i$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$x_0$	$y_0$	$\nabla y_0$	$\nabla^2 y_0$	$\nabla^3 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\nabla y_1$	$\nabla^2 y_1$	
$x_2$	$y_2$	$\nabla y_2$		
$x_3$	$y_3$			

Հետևյալ պնդման ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

**Լեմմա 6.5.2 :** *Ճիշտ է*

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\nabla^k y_i}{k! h^k} \tag{6.5.10}$$

*հավասարությունը:*

Եթե ներմուծենք  $t$  փոփոխականը (տե՛ս (6.5.1) բանաձևը), ապա հաշվի առնելով (6.5.10) հավասարությունը՝ Նյուտոնի (6.4.6) բանաձևից կստանանք ինտերպոլացիոն բազմանդամի

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\nabla^k y_0}{k!} t(t+1) \dots (t+k-1) \tag{6.5.11}$$

ներկայացումը, որը կոչվում է *Նյուտոնի ձախակողմյան ինտերպոլացիոն բանաձև*: Ի տարբերություն հանգույցների աճման կարգով համարակալման՝ այստեղ  $x$  փոփոխականի  $[x_0, x_n]$  հատվածում փոփոխությանը համապատասխանում է  $t$  մեծության փոփոխությունը  $[-n, 0]$  հատվածում:

## 6.6 Ինտերպոլացիոն սպլայններ

Վերը մենք ստացել ենք ինտերպոլացիայի սխալանքի (6.3.1) գնահատականը, այն է՝

$$\|f - L_n\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|,$$

որտեղ  $M_{n+1} \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ : Հիմնվելով այդ գնահատականի վրա՝ երբեմն սխալմամբ եզրակացնում են, որ բավականաչափ ողորկ  $f(x)$  ֆունկցիան կարելի է կամայական ճշտությամբ մոտարկել ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Իրականում դա այդպես չէ (տե՛ս, օրինակ՝ [5, 18]): Չմտնելով այս հարցի մանրամասների մեջ, բերենք երկու ակներև պատճառ.

ա)  $f(x)$  ֆունկցիան կարող է ունենալ սահմանափակ թվով անընդհատ ամսանցյալներ, ուստի որոշակի  $n$ -ից սկսած (6.3.1) բանաձևը դառնում է անկիրառելի,

բ) նույնիսկ եթե  $f(x)$  ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է, պետք է հաշվի առնել  $M_{n+1}$  մեծության վարքը, երբ  $n \rightarrow \infty$ :

Գերմանացի մաթեմատիկոս Կ.Ռուզգեն 1901թ. կառուցել էր մի հետաքրքիր օրինակ: Նա դիտարկում էր  $[-1, 1]$  հատվածի վրա հավասարաչափ բաշխված հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամներ  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$  անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար: Պարզվեց, որ այդ բազմանդամների հաջորդականությունը տարամիտում է  $0.7 < |x| < 1$  միջակայքի ցանկացած կետի համար (տե՛ս [18] մենագրությունը):

Նշենք նաև, որ գործնականում ձեռնառու չէ աշխատել բարձր աստիճանի բազմանդամներով: Հաճախ նպատակահարմար է մոտարկումները իրականացնել կտոր առ կտոր բազմանդամային ֆունկցիաներով՝ ներգրավելով ցածր աստիճանի բազմանդամներ: Ներմուծենք այդ գաղափարը.

$F(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիան կոչվում է  $n$ -րդ աստիճանի *կտոր առ կտոր բազմանդամային ֆունկցիա*, եթե կարելի է նշել  $[a, b]$  հատվածի այնպիսի

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = b$$

տրոհում, որ յուրաքանչյուր  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, p-1$  ենթահատվածում  $F(x)$  ֆունկցիան  $n$  աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամ է:

Դիցուք տրված է  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակը.

$x_i$	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
$f(x_i)$	1	3	2	1	0	2	1

Կառուցենք կտոր առ կտոր քառակուսային ինտերպոլացիոն ֆունկցիա, որը հանգույցներում համընկնում է  $f(x)$  ֆունկցիայի արժեքների հետ, այն է՝

$$F(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ -6x + 4, & 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ -54x^2 + 93x - 38, & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} :$$

Նկատենք, որ  $F(x)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ  $x = 1/3$  և  $x = 2/3$  կետերում: Այսպիսով, սովորական կտոր առ կտոր բազմանդամային ինտերպոլացիան չի ապահովում կորի կտորների ողորկ միացումը:

Նշված թերությունից զուրկ են հաշվողական մաթեմատիկայում լայն տարածում ստացած *սպլայնները*՝ կտոր առ կտոր բազմանդամային ֆունկցիաները, որոնք ունեն ողորկության լրացուցիչ հատկություններ:

### 6.6.1 Սպլայնի սահմանումը

Դիցուք տրված է  $[a, b]$  հատվածի

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (6.6.1)$$

տրոհումը:

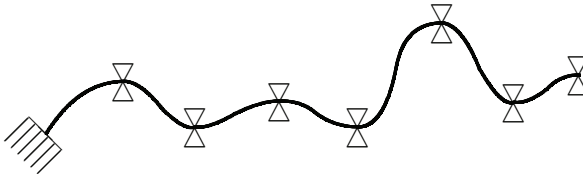
**Սահմանում 6.6.1 :**  $S(x)$  ֆունկցիան կոչվում է  $\Delta$  տրոհման հետ զուգորդված  $k \geq 1$  աստիճանի սպլայն, եթե

ա) յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  հատվածում  $S(x)$  ֆունկցիան  $k$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է,

բ)  $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$ :

Այսպիսով, ապահովվում է  $S(x)$  ֆունկցիայի և նրա՝ ներառյալ մինչև  $k-1$ -րդ կարգի ածանցյալների անընդհատությունը  $\Delta$  տրոհման հանգույցներում:

**Դիտողություն 6.6.1 :** Սպլայն *անունն առաջացել է անգլերեն spline բառից: Այդպես են զծագրողներն անվանում ձկուն փայտյա կամ պողպատյա ձողը, որի օգնությամբ զծում են ողորկ կորերը (նկ. 6.6.1):*



Նկ. 6.6.1 Սպլայն

Այժմ տանք *ինտերպոլացիոն սպլայնի* սահմանումը: Դիցուք (6.6.1) տրոհման հանգույցներում տրված են  $y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  արժեքները:

**Սահմանում 6.6.2 :**  $S(x)$  ֆունկցիան կոչվում է  $\Delta$  տրոհման հետ զուգորդված  $k \geq 1$  աստիճանի *ինտերպոլացիոն սպլայն*, եթե

ա) յուրաքանչյուր  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  հատվածում  $S(x)$  ֆունկցիան  $k$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է,

բ)  $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$ ,

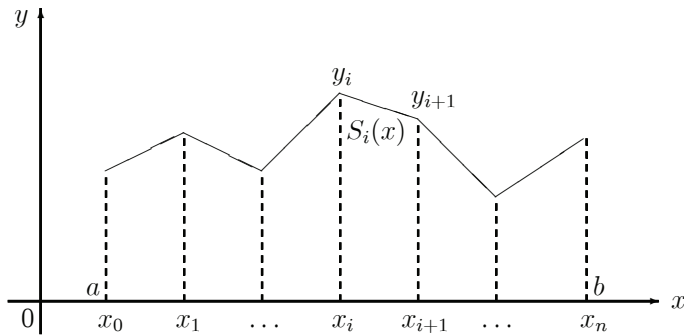
գ)  $S(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ :

Այսինքն, ինտերպոլացիոն սպլայնը (6.6.1) տրոհման հանգույցներում ընդունում է նախօրոք տրված արժեքները:

Հաճախ հարմար է լինում ներմուծել նշանակումներ սպլայնի առանձին կտորների համար.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (6.6.2)$$

Պարզագույն սպլայնը առաջին կարգի կամ *զծային* սպլայնն է (նկ. 6.6.2): Դա փաստորեն *կտոր առ կտոր զծային* ֆունկցիա է:



**Նկ. 6.6.2** Գծային սպլայն

Գծային սպլայնի անալիտիկ արտահայտությունը հետևյալն է.

$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (6.6.3)$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 1 :$$

### 6.6.2 Քառակուսային սպլայն

Այժմ կառուցենք երկրորդ կարգի կամ *քառակուսային* ինտերպոլացիոն սպլայն: Համաձայն (6.6.2) նշանակումների՝ պահանջվում է կառուցել այնպիսի

$$S_i(x) = a_2^{(i)} x^2 + a_1^{(i)} x + a_0^{(i)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (6.6.4)$$

ֆունկցիաներ, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (6.6.5)$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 : \quad (6.6.6)$$

Տրված (6.6.5) և (6.6.6) պայմանները որոշում են  $3n - 1$  գծային հավասարումների համակարգ  $3n$  անհայտ  $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, i = 0, 1, \dots, n - 1$  գործակիցների նկատմամբ: Ուստի, պահանջվում է ևս մեկ լրացուցիչ պայման: Որպես այդպիսին կարելի է վերցնել, օրինակ,

$$S'_0(x_0) = d \quad (6.6.7)$$

պայմանը, որտեղ  $d$ -ն տրված մեծություն է:

Ի վերջո, սպլայնի կառուցումը հանգում է  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  արժեքների համար

$$\begin{cases} a_2^{(i)} x_i^2 + a_1^{(i)} x_i + a_0^{(i)} = y_i \\ a_2^{(i)} x_{i+1}^2 + a_1^{(i)} x_{i+1} + a_0^{(i)} = y_{i+1} \\ 2a_2^{(i)} x_i + a_1^{(i)} = d_i \end{cases} \quad (6.6.8)$$

գծային հավասարումների համակարգերի հաջորդական լուծմանը, որտեղ

$$\begin{aligned} d_0 &= d, \\ d_i &= 2a_2^{(i-1)} x_i + a_1^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 : \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

Եթե վերցնենք հավասարահեռ հանգույցներ  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ , որտեղ  $h = (b - a)/n$ , ապա (6.6.8) համակարգի լուծում կլինի՝

$$\begin{aligned} a_2^{(i)} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - \frac{d_i}{h}, \\ a_1^{(i)} &= -2x_i a_2^{(i)} + d_i, \\ a_0^{(i)} &= -x_i(x_i a_2^{(i)} + a_1^{(i)}) + y_i : \end{aligned} \quad (6.6.10)$$

Թողնում այդ բանաձևերի արտածումը ընթերցողին որպես վարժություն:

### Pseudocode QuadSPLINE

```
input  $a, b, n, \{y_0, y_1, \dots, y_n\}, d$ 
 $h = (b - a)/n$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n$  do
     $x_i = a + ih$ 
end
 $d_0 = d$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  do
     $a_2^{(i)} = (y_{i+1} - y_i)/h^2 - d_i/h$ 
     $a_1^{(i)} = -2x_i a_2^{(i)} + d_i$ 
     $a_0^{(i)} = -x_i(x_i a_2^{(i)} + a_1^{(i)}) + y_i$ 
     $d_{i+1} = 2a_2^{(i)} x_{i+1} + a_1^{(i)}$ 
end
output  $a_2^{(i)}, a_1^{(i)}, a_0^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ )
```



## 6.7 Խորանարդային սպլայն

Գործնականում լայն կիրառությունն ունեն երրորդ աստիճանի կամ *խորանարդային* ինտերպոլացիոն սպլայնները:

Համաձայն 6.6.2 սահմանման և (6.6.2) նշանակումների՝ ինդեքսի  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  արժեքների համար պահանջվում է կառուցել երրորդ աստիճանի բազմանդամներ

$$S_i(x) = a_3^{(i)}x^3 + a_2^{(i)}x^2 + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (6.7.1)$$

այնպես, որ

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (6.7.2)$$

և

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 : \quad (6.7.3)$$

Տրված (6.7.2) և (6.7.3) պայմանները որոշում են  $4n - 2$  գծային հավասարումների համակարգ  $4n$  անհայտ  $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  գործակիցների նկատմամբ: Խնդրի կոռեկտության համար պահանջվում են լրացուցիչ պայմաններ: Այսպես կոչված *բնական խորանարդային սպլայնը* բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին.

$$S'_0(x_0) = 0, \quad S''_{n-1}(x_n) = 0 \quad (6.7.4)$$

(սույն պարագրաֆի վերջում կբերենք այդ պայմանների ընտրության հիմնավորումը):

Անցնենք սպլայնի կառուցմանը: Ներմուծենք  $[a, b]$  հատվածի (6.6.1) տրոհման քայլերը.

$$h_i \equiv x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 :$$

Քանի որ  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում  $S_i(x)$ -ը երրորդ աստիճանի բազմանդամ է, ապա ըստ Թեյլորի բանաձևի

$$S_i(x) = S_i(x_i) + S'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}S''_i(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{1}{6}S'''_i(x_i)(x - x_i)^3 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ

$$S'''_i(x_i) = \frac{S''_i(x_{i+1}) - S''_i(x_i)}{h_i}$$

(սա ճիշտ է, որովհետև  $S''_i(x)$ -ը գծային ֆունկցիա է): Ուստի

$$S_i(x) = S_i(x_i) + S'_i(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2}S''_i(x_i)(x - x_i)^2 + \frac{S''_i(x_{i+1}) - S''_i(x_i)}{6h_i}(x - x_i)^3 : \quad (6.7.5)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\begin{aligned} m_i &\equiv S'_i(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \\ M_i &\equiv S''_i(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad M_n \equiv S''_{n-1}(x_n) : \end{aligned} \quad (6.7.6)$$

Ըստ (6.7.3) պայմանների կարող ենք գրել նաև, որ  $m_i = S'_{i-1}(x_i)$ ,  $M_i = S''_{i-1}(x_i)$ , երբ  $i = 1, 2, \dots, n-1$ : Բացի այդ, համաձայն (6.7.4) պայմանների՝  $M_0 = M_n = 0$ : Նշանակումներից հետո սպլայնի կտորի (6.7.5) արտահայտությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}(x - x_i)^3 : \quad (6.7.7)$$

Ածանցելուց հետո կունենանք

$$S'_i(x) = m_i + M_i(x - x_i) + \frac{M_{i+1} - M_i}{2h_i}(x - x_i)^2 : \quad (6.7.8)$$

Դիտարկենք (6.7.7) և (6.7.8) արտահայտությունները  $i = 1, 2, \dots, n-1$  արժեքների համար: Եթե (6.7.8)-ում  $i$ -ն փոխարինենք  $i-1$ -ով և տեղադրենք  $x = x_i$ , ապա կստանանք

$$m_i = m_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2}(M_{i-1} + M_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 : \quad (6.7.9)$$

Այնուհետև, (6.7.7)-ի մեջ տեղադրելով  $x = x_{i+1}$  արժեքը՝ կստանանք  $m_i$  մեծության մեկ այլ արտահայտություն.

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 : \quad (6.7.10)$$

Հավասարեցնենք (6.7.9) և (6.7.10) արտահայտությունների աջ մասերը.

$$m_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2}(M_{i-1} + M_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}) :$$

Մնում է արտաքսել  $m_{i-1}$  մեծությունը: Դա կարելի է անել (6.7.10)-ի օգնությամբ: Իրոք, քանի որ

$$m_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}(2M_{i-1} + M_i),$$

ապա

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}(2M_{i-1} + M_i) + \frac{h_{i-1}}{2}(M_{i-1} + M_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}) :$$

Նման անդամների վերախմբավորումից հետո հանգում ենք երեքանկյունագծային մատրիցով

$$\begin{cases} h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = \gamma_i, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ M_0 = M_n = 0 \end{cases} \quad (6.7.11)$$

համակարգի, որտեղ

$$\gamma_i \equiv 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) :$$

Նկատենք, որ (6.7.11) համակարգի մատրիցն ունի խիստ անկյունագծային գերիշխում: Ուստի այդ համակարգը կարելի է արդյունավետորեն լուծել 4.6 պարագրաֆում շարադրված ալգորիթմի կիրառմամբ:

Երբ  $M_i$  արժեքներն արդեն որոշված են, ըստ (6.7.10) բանաձևի հաշվվում են  $m_i$  մեծությունները.

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 : \quad (6.7.12)$$

(այստեղ նշենք, որ չնայած (6.7.10) հավասարությունը արտաձվել է  $i = 1, 2, \dots, n-1$  արժեքների համար, այն ճիշտ է նաև  $i = 0$ -ի դեպքում): Վերջապես,  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $m_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) և  $M_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) մեծությունները հաշվելուց հետո, ըստ (6.7.7) բանաձևի՝ ստանում ենք խորանարդային սպլայն

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (6.7.13)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 :$$

Ամփոփելով, գրենք խորանարդային սպլայնի հաշվման ալգորիթմը.

#### Pseudocode CubicSPLINE

input  $n, \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$

for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

end

for  $i = 1, 2, \dots, n-1$  do

$$\gamma_i = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

end

solve system

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = \gamma_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$M_0 = M_n = 0$$

end solve

for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2M_i + M_{i+1})$$

end

output  $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}, \{m_0, m_1, \dots, m_{n-1}\}$

Վերջում ձևակերպենք և ապացուցենք բնական խորանարդային սպլայնների մի կարևոր էքստրենալ հատկություն:

**Թեորեմ 6.7.1 :** *Դիցուք տրված է  $[a, b]$  հատվածի  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  տրոհումը: Եթե  $S(x)$  բնական խորանարդային սպլայնը համընկնում է  $f(x) \in C^2[a, b]$  ֆունկցիայի հետ  $\Delta$  տրոհման հանգույցներում, ապա*

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx, \quad (6.7.14)$$

ընդ որում հավասարությունը հասանելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $f(x) \equiv S(x)$ :

**Ապացույց:** Գիտարկենք  $g(x) \equiv f(x) - S(x)$  ֆունկցիան: Ըստ թեորեմի պայմանի  $g(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ : Ունենք

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [S''(x)]^2 dx + \int_a^b [g''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S''(x)g''(x) dx \quad (6.7.15)$$

հավասարությունը: Քանի որ  $S_i(x)$ -ը երրորդ աստիճանի բազմանդամ է, ապա նրա երրորդ կարգի ածանցյալը հաստատուն է, այսինքն  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում  $S_i'''(x) \equiv c_i$ : Օգտվելով մասերով ինտեգրման բանաձևից և հաշվի առնելով (6.7.4) պայմանները կստանանք

$$\begin{aligned} \int_a^b S''(x)g''(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i''(x)g''(x) dx = \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left[ S_i''(x_{i+1})g'(x_{i+1}) - S_i''(x_i)g'(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i'''(x)g'(x) dx \right] &= \\ S_{n-1}''(x_n)g'(x_n) - S_0''(x_0)g'(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_i'''(x)g'(x) dx &= \\ - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x) dx = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i(g(x_{i+1}) - g(x_i)) &= 0 : \end{aligned} \quad (6.7.16)$$

Այսպիսով, (6.7.15) և (6.7.16) հավասարություններից հետևում է, որ

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [S''(x)]^2 dx + \int_a^b [g''(x)]^2 dx \geq \int_a^b [S''(x)]^2 dx : \quad (6.7.17)$$

Դրանով (6.7.14) անհավասարությունն ապացուցված է:

Մնում է ապացուցել թեորեմի պնդման վերջին մասը: Ենթադրենք, որ

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx = \int_a^b [f''(x)]^2 dx :$$

Այդ դեպքում (6.7.17)-ից հետևում է, որ  $g''(x) \equiv 0$ : Դա նշանակում է, որ  $g(x)$  ֆունկցիան գծային է: Իսկ քանի որ  $g(x_i) = 0$ , ապա  $g(x) \equiv 0$ :  $\square$

## Խնդիրներ և վարժություններ - 6

1. Դիցուք  $G(x)$  ֆունկցիան համընկնում է  $f(x)$  ֆունկցիայի հետ  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  կետերում, իսկ  $H(x)$  ֆունկցիան՝  $x_1, x_2, \dots, x_n$  կետերում: Յույց տալ, որ

$$G(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(G(x) - H(x))$$

ֆունկցիան համընկնում է  $f(x)$  ֆունկցիայի հետ  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերում:

2. Գոյություն ունի՞ արդյոք երկրորդ աստիճանի  $P(x)$  բազմանդամ, որն ընդունում է նախապես տրված  $P(0), P(1)$  և  $P'(z)$  արժեքները, որտեղ  $z$ -ը տրված կետ է:
3. Տրված է երկրորդ աստիճանի  $P(x)$  բազմանդամի արժեքների աղյուսակը.

$$\frac{x}{P(x)} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 7 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Հայտնի է, որ աղյուսակի երկրորդ տողը պարունակում է ճիշտ մեկ սխալ: Գտնել այդ սխալը, վերացնել այն և վերականգնել բազմանդամը:

4. Ինտերպոլացիոն բանաձևի օգնությամբ ի՞նչ ճշտությամբ կարելի է հաշվել  $\sqrt{115}$  արժեքը, եթե որպես ինտերպոլացիայի հանգույցներ վերցնենք 100, 121 և 144 կետերը:
5. Ենթադրենք  $f(x) = (a^2 - x)^{-1}$  ֆունկցիան  $[-4, -1]$  հատվածում մոտարկվում է  $x_0 = -4, x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1$  հանգույցներով կառուցված  $L(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Պարզել, թե  $a$ -ի ի՞նչ արժեքների համար  $\|f - L\| \leq 10^{-5}$ :
6.  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիան  $[0, \pi/4]$  հատվածում մոտարկվում է  $0, \pi/8, \pi/4$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Գնահատել մեծագույն սխալանքը նշված հատվածում:
7.  $f(x) = \ln x$  ֆունկցիան  $[1, 2]$  հատվածում մոտարկվում է  $1, 4/3, 5/3, 2$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Ապացուցել, որ մեծագույն սխալանքը նշված հատվածում չի գերազանցում  $1/300$  արժեքը:
8.  $f(x) = e^{2x}$  ֆունկցիան  $[-1/2, 1/2]$  հատվածում մոտարկվում է  $-1/2, 0, 1/2$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Ապացուցել, որ մեծագույն սխալանքը նշված հատվածում չի գերազանցում  $\sqrt{3}/9$  արժեքը:
9.  $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$  ֆունկցիան  $[1, 2]$  հատվածում մոտարկվում է ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Քանի՞ հանգույց պետք է վերցնել, որպեսզի սխալանքը այդ հատվածում չգերազանցի  $10^{-4}$  արժեքը:

10.  $f(x) = e^x$  ֆունկցիան  $[0, 1]$  հատվածում մոտարկվում է ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Քանի՞ հանգույց պետք է վերցնել, որպեսզի սխալանքը այդ հատվածում չգերազանցի  $10^{-2}$  արժեքը:
11.  $f(x) = x^3$  ֆունկցիան դիտարկվում է  $[1, 2]$  հատվածում: Ընտրել  $x_0, x_1$  և  $x_2$  ինտերպոլացիայի հանգույցներն այնպես, որ մեծագույն սխալանքը այդ հատվածում լինի փոքրագույն:
12. Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիայի համար կառուցված են  $L_n^{(1)}(x)$  և  $L_n^{(2)}(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամները՝ համապատասխանաբար  $x_0, x_1, \dots, x_n$  և  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  հանգույցներով: Հայտնի է, որ  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  հանգույցները կազմում են մոնոտոն աճող հաջորդականություն, իսկ  $f^{(n+1)}(x)$  ածանցյալը  $[x_0, x_{n+1}]$  հատվածում գոյություն ունի և պահպանում է իր նշանը: Ցույց տալ, որ կամայական  $x \in [x_0, x_{n+1}]$  կետի համար  $f(x)$  արժեքը գտնվում է  $L_n^{(1)}(x)$  և  $L_n^{(2)}(x)$  արժեքների միջև:
13. Ինչպես հայտնի է, Չեբիշևի  $T_n(x)$  բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է  $2^{n-1}$ -ի: Իսկ ինչպիսի՞ն են  $x^{n-1}$  և  $x^{n-2}$  աստիճանների գործակիցները:
14.  $P(x) = a_3x^3 + 2x^2 + a_1x + a_0$  տեսքի բազմանդամների մեջ գտնել  $[3, 5]$  հատվածում գրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:
15.  $P(x) = 5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  տեսքի բազմանդամների մեջ գտնել  $[1, 2]$  հատվածում գրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:
16.  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$  տեսքի բազմանդամների մեջ գտնել  $[1, 3]$  հատվածում գրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:
17.  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + 3x + a_0$  տեսքի բազմանդամների մեջ գտնել  $[2, 4]$  հատվածում գրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:
18. Ապացուցել բաժանված տարբերությունների հետևյալ հատկությունը. եթե  $z_0, z_1, \dots, z_n$  կետերը ստացվել են  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերի վերահամարակալման արդյունքում, ապա

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] :$$

19. Դիցուք  $f(x) = x^m$ , որտեղ  $m$ -ը բնական թիվ է: Ապացուցել, որ

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} 1, & \text{եթե } n = m \\ 0, & \text{եթե } n > m : \end{cases}$$

20. Դիցուք  $[a, b]$ -ն  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերը պարունակող փոքրագույն հատվածն է: Ենթադրվում է, որ  $f(x) \in C^n[a, b]$ : Ապացուցել, որ

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (a, b) :$$

21. Հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են քառակուսային սպլայններ.

$$\text{ա) } S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ \frac{3}{2}, & x \in [2, 3] \end{cases},$$

$$\text{բ) } S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ (x-2)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [2, 3] \end{cases},$$

$$\text{գ) } S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ -x + \frac{7}{2}, & x \in [2, 3] \end{cases},$$

$$\text{դ) } S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2) \\ x - \frac{1}{2}, & x \in [2, 3] \end{cases} :$$

22. Հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են խորանարդային սպլայններ.

$$\text{ա) } S(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \in [-1, 0) \\ 3x^3 - 1, & x \in [0, 1] \end{cases},$$

$$\text{բ) } S(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \in [-1, 1/2) \\ 3x^3 - 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

$$\text{գ) } S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3, & x \in [0, 1) \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & x \in [1, 2) \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & x \in [2, 3] \end{cases},$$

$$\text{դ) } S(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0) \\ 3 + 5x + 3x^2, & x \in [0, 1) \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases} :$$

23.  $a, b$  և  $c$  պարամետրների ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2, & x \in [0, 1) \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

ֆունկցիան խորանարդային սպլայն է:

24.  $a, b, c$  և  $d$  պարամետրների ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [-4, -3) \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3, 4) \\ 157 - 32x, & x \in [4, 5] \end{cases}$$

ֆունկցիան խորանարդային սպլայն է:

25.  $a, b, c, d$  և  $e$  պարամետրների ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$S(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in [0, 1) \\ c(x-2)^2, & x \in [1, 3) \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

ֆունկցիան խորանարդային սպլայն է:

26. Ընտրելով  $[-1, 1]$  հատվածում  $x_i = -1 + \frac{2}{n}i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  հանգույցները՝ կառուցել բնական խորանարդային սպլայն, որն ինտերպոլացնում է

$$f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$$

ֆունկցիան:

27. Դիցուք  $f(x) \in C^k[a, b]$  և տրված է հատվածի  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  տրոհումը: Ապացուցել, որ

$$J(f) = \int_a^b \left( f^{(k)}(x) \right)^2 dx$$

ֆունկցիոնալի մինիմումը հասանելի է  $\Delta$  տրոհման հետ զուգորդված  $2k - 1$ -րդ աստիճանի  $S(x)$  ինտերպոլացիոն սպլայնի համար, որը բավարարում է

$$S^{(j)}(x_0) = S^{(j)}(x_n) = 0, \quad j = k, k+1, \dots, 2k-2$$

սպլաններին:



## Գլուխ 7

# ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

### 7.1 Լավագույն մոտարկման տարր

Նախ հիշեցնենք նորմավորված տարածության գաղափարը:

**Սահմանում 7.1.1 :**  $L$  իրական գծային տարածությունը կոչվում է *նորմավորված տարածություն*, եթե յուրաքանչյուր  $x \in L$  տարրին համապատասխանության մեջ է դրված  $\|x\|$  իրական թիվ (այդ տարրի *նորմ*) այնպես, որ կամայական  $x, y \in L$  և  $\lambda$  իրական թվի համար բավարարված են հետևյալ պայմանները.

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ :

Գիցուք  $L_n$ -ը  $L$  նորմավորված տարածության  $n$ -չափանի ենթատարածություն է:

**Սահմանում 7.1.2 :**  $f \in L$  տարրի *հեռավորություն*  $L_n$  ենթատարածությունից կոչվում է

$$\rho(f, L_n) \equiv \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\| \quad (7.1.1)$$

մեծությունը:

Պարզ է, որ  $\rho(f, L_n) = 0$ , երբ  $f \in L_n$ :

**Սահմանում 7.1.3 :**  $\psi \in L_n$  տարրը կոչվում է *լավագույն մոտարկման տարր*  $f \in L$  տարրի համար, եթե

$$\|f - \psi\| = \rho(f, L_n) : \quad (7.1.2)$$

Ակնհայտ է, որ եթե  $f \in L_n$ , ապա  $f$ -ը իր համար միակ լավագույն մոտարկման տարրն է:

### 7.1.1 Լավագույն մոտարկման տարրի գոյությունը

Տեղի ունի հետևյալ հիմնարար պնդումը:

**Թեորեմ 7.1.1:** Կամայական  $f \in L$  տարրի համար գոյություն ունի լավագույն մոտարկման տարր  $L_n$  ենթատարածությունից:

Ապացույց: Գիցուք  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  տարրերի համակարգը  $L_n$  ենթատարածության բազիս է: Ցանկացած  $\varphi \in L_n$  տարր միարժեքորեն ներկայացվում է

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$\|\varphi\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \equiv G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0 \quad (7.1.3)$$

և

$$\|f - \varphi\| = \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \equiv F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq 0 \quad (7.1.4)$$

նորմերը  $\mathbf{R}^n$  տարածության մեջ որոշված ոչ բացասական ֆունկցիաներ են: Համառոտության համար կօգտագործենք  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  տիպի նշանակումներ  $\mathbf{R}^n$  տարածության կետերի համար:  $F$  ֆունկցիայի ներմուծմամբ (7.1.1)-ում սահմանված  $\rho(f, L_n)$  հեռավորությունը կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} F(\alpha) : \quad (7.1.5)$$

Գժվար չէ համոզվել, որ  $G$  և  $F$  ֆունկցիաները անընդհատ են: Իրոք,  $\mathbf{R}^n$ -ի ցանկացած  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  և  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  կետերի համար ունենք

$$\begin{aligned} |G(\alpha) - G(\beta)| &= \left| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\| \right| \leq \\ &\left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \|\varphi_i\| \leq q \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|, \end{aligned}$$

որտեղ  $q \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_i\|$ : Այս անհավասարությունից հետևում է  $G$  ֆունկցիայի անընդհատությունը: Համանմանորեն ցույց է տրվում, որ անընդհատ է նաև  $F$  ֆունկցիան:

Այսպիսով, թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար բավական է ցույց տալ  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \in \mathbf{R}^n$  կետի գոյությունը, որի համար  $F(\alpha^*) = \rho(f, L_n)$ :

Դիտարկենք  $\mathbf{R}^n$  տարածության մեջ

$$S = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \right\}$$

միավոր սֆերան: Հայտնի է, որ փակ սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է իր նվազագույն արժեքը (տե՛ս, օրինակ, [62]): Քանի որ  $S$ -ը փակ սահմանափակ բազմություն է, ապա գոյություն ունի այնպիսի  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in S$  կետ, որ

$$G(\xi) = \min_{\alpha \in S} G(\alpha) \equiv \mu : \quad (7.1.6)$$

$G$  ֆունկցիայի ոչ բացասական լինելուց բխում է, որ  $\mu \geq 0$ : Դեռ ավելին,  $\mu > 0$ : Իրոք, եթե  $\mu$ -ն հավասար լիներ զրոյի, ապա (7.1.6) և (7.1.3) -ից կհետևեր, որ

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i = 0 :$$

Այդ դեպքում, քանի որ  $\varphi_i$  տարրերը գծորեն անկախ են, կստանայինք, որ  $\xi_i = 0$  բոլոր  $i = 1, 2, \dots, n$  արժեքների համար: Իսկ դա հակասում է այն բանին, որ  $\xi \in S$ :

Վերցնենք

$$r = \frac{\rho(f, L_n) + \|f\| + 1}{\mu} \quad (7.1.7)$$

թիվը և տրոհենք  $\mathbf{R}^n$  տարածությունը երկու չհատվող ենթաբազմությունների.

$$R_1^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq r^2 \right\}$$

և

$$R_2^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 > r^2 \right\} :$$

Պարզ է, որ  $R_1^n \cup R_2^n = \mathbf{R}^n$ : Դիտարկենք  $F$  ֆունկցիան  $R_2^n$  բազմության վրա: Ցանկացած  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R_2^n$  կետի համար ունենք

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \equiv \lambda^2 > r^2 \quad (\lambda > 0) \quad (7.1.8)$$

և, համապատասխանաբար,

$$F(\alpha) = \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| - \|f\| = \lambda \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda} \varphi_i \right\| - \|f\| : \quad (7.1.9)$$

Վերցնենք  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  կետը, որտեղ  $\beta_i = \alpha_i/\lambda$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Ակնհայտ է, որ  $\beta \in S$ : Այդ դեպքում (7.1.9)-ից, հաշվի առնելով (7.1.6) և (7.1.8)-ը, կստանանք

$$F(\alpha) \geq \lambda \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\| - \|f\| = \lambda G(\beta) - \|f\| \geq \lambda \mu - \|f\| \geq r\mu - \|f\|$$

անհավասարությունը: Այստեղից,  $r$  թվի (7.1.7) ընտրության շնորհիվ ստանում ենք, որ

$$F(\alpha) \geq \rho(f, L_n) + 1 :$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի ունի կամայական  $\alpha \in R_2^n$  կետի համար: Այդ պատճառով, ելնելով (7.1.5)-ից, կարող ենք գրել, որ

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in R^n} F(\alpha) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) :$$

Իսկ քանի որ  $R_1^n$ -ը  $R^n$  տարածության փակ սահմանափակ բազմություն է, ապա  $F$  անընդհատ ֆունկցիան այդ բազմության վրա ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Այլ կերպ ասած, գոյություն ունի այնպիսի  $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) \in R_1^n$  կետ, որ

$$F(\alpha^*) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) = \rho(f, L_n) :$$

Այսպիսով,

$$\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \varphi_i \in L_n$$

տարրը կլինի լավագույն մոտարկման տարր  $f \in L$  տարրի համար:  $\square$

## 7.1.2 Լավագույն մոտարկման տարրի միակության մասին

Լավագույն մոտարկման տարրի միակության հարցի քննարկումից առաջ դիտարկենք մեկ օրինակ:

**Օրինակ 7.1.1:** Գիցուք  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  վեկտորների  $R^3$  գծային տարածության մեջ սահմանված է  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i|$  նորմը: Գտնենք  $f = [1 \ 1 \ 1]^T$  վեկտորի համար լավագույն մոտարկման տարր  $x = [x_1 \ x_2 \ 0]^T$  վեկտորների  $R_2^3$  երկչափ ենթատարածությունում:

Կամայական  $x \in R_2^3$  վեկտորի համար ունենք

$$\|f - x\| = \max\{|1 - x_1|, |1 - x_2|, 1\} \geq 1$$

անհավասարությունը: Ակնհայտ է, որ

$$\rho(f, R_2^3) = \inf_{x \in R_2^3} \|f - x\| = 1 :$$

Նկատենք, որ ցանկացած  $x \in R_2^3$  վեկտոր, որի բաղադրիչները բավարարում են  $0 \leq x_1, x_2 \leq 2$  պայմանին, լավագույն մոտարկման տարր է  $f$  վեկտորի համար, քանի որ

$$\|f - x\| = 1 = \rho(f, R_2^3) : \quad \diamond$$

Այսպիսով, դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ լավագույն մոտարկման տարրը կարող է միակը չլինել:

**Սահմանում 7.1.4 :**  $L$  նորմավորված տարածությունը կոչվում է *խիստ նորմավորված*, եթե

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \quad f, g \neq 0$$

հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ  $f = \alpha g$ , որտեղ  $\alpha > 0$  :

**Թեորեմ 7.1.2 :** Եթե  $L$  տարածությունը *խիստ նորմավորված* է, ապա *լավագույն մոտարկման տարրը միակն է* :

**Ապացույց :** Եթե  $f \in L_n$ , ապա ինքն իր համար միակ *լավագույն մոտարկման տարր* է : Այժմ ենթադրենք, որ  $f \in L \setminus L_n$  և նրա համար  $L_n$  ենթատարածության մեջ գոյություն ունեն երկու *լավագույն մոտարկման տարրեր*՝  $\psi_1$  և  $\psi_2$  : Այդ դեպքում

$$\|f - \psi_1\| = \|f - \psi_2\| = \rho(f, L_n) : \quad (7.1.10)$$

Գիտարկենք

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \in L_n$$

տարրը : Հաշվի առնելով (7.1.10) հավասարությունները՝ ունենք

$$\|f - \psi_0\| = \left\| f - \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \right\| = \frac{1}{2} \|(f - \psi_1) + (f - \psi_2)\| \leq \frac{1}{2} (\|f - \psi_1\| + \|f - \psi_2\|) = \rho(f, L_n) :$$

Եթե ստացված

$$\|(f - \psi_1) + (f - \psi_2)\| \leq \|f - \psi_1\| + \|f - \psi_2\|$$

անհավասարության մեջ լինեն *խիստ անհավասարություն*, ապա մենք կստանայինք, որ

$$\|f - \psi_0\| < \rho(f, L_n),$$

ինչը կհակասեր  $\rho(f, L_n)$  հեռավորության սահմանմանը : Հետևաբար

$$\|(f - \psi_1) + (f - \psi_2)\| = \|f - \psi_1\| + \|f - \psi_2\| :$$

Իսկ քանի որ տարածությունը *խիստ նորմավորված* է, ապա

$$f - \psi_1 = \alpha(f - \psi_2), \quad \alpha > 0 :$$

Վերջին հավասարության մեջ  $\alpha$  գործակիցը պետք է հավասար լինի մեկի : Իրոք, հակառակ դեպքում կունենայինք

$$f = \frac{1}{1 - \alpha}(\psi_1 - \alpha\psi_2),$$

ինչը կհակասեր մեր  $f \notin L_n$  ենթադրությանը : Այսպիսով,  $\alpha = 1$  և  $f - \psi_1 = f - \psi_2$  հավասարությունից հետևում է, որ  $\psi_1 = \psi_2$  :  $\square$

Ինչպես կտեսնենք ստորև, տարածության *խիստ նորմավորվածությունը* *լավագույն մոտարկման տարրի միակության անհրաժեշտ պայման* չէ :

## 7.2 Հավասարաչափ մոտարկումներ

Որպես  $L$  նորմավորված տարածություն դիտարկենք  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաների  $C[a, b]$  տարածությունը

$$\|f\| \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (7.2.1)$$

նորմով:

Պարզ է, որ  $f$  և  $g$  ֆունկցիաների տարբերության նորմը՝

$$\|f - g\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

հավասար է այդ ֆունկցիաների մեծագույն շեղմանը  $[a, b]$  հատվածի վրա: Օրինակ, եթե  $f(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիան մոտարկվում է մեկ այլ  $F(x)$  ֆունկցիայով նույն տարածությունից և  $\|f - F\| < \varepsilon$ , ապա

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] :$$

Այսինքն,  $f(x)$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածի վրա *հավասարաչափ* մոտարկվում է  $F(x)$  ֆունկցիայով  $\varepsilon$  ճշտությամբ: Այդ պատճառով մոտարկումները  $C[a, b]$  տարածության մեջ կոչվում են *հավասարաչափ մոտարկումներ*:

Եթե  $f(x)$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում ներկայացվում է հավասարաչափ զուգամետ աստիճանային շարքով, ապա որպես մոտարկող բազմանդամ կարելի է վերցնել այդ շարքի մասնակի գումարը: Այդպիսի մոտեցում օգտագործվում է, օրինակ, տարրական ֆունկցիաների արժեքների հաշվման ժամանակ:

**Օրինակ 7.2.1:** Դիցուք պահանջվում է  $10^{-7}$  ճշտությամբ հաշվել  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիայի արժեքը  $[0, \pi/4]$  հատվածի ինչ-որ կետում: Վերլուծենք  $\sin x$  ֆունկցիան

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

շարքի (տե՛ս, օրինակ, [62]): Սահմանափակվենք շարքի առաջին հինգ անդամներով՝

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) \right| < \frac{1}{11!} \cdot \left( \frac{\pi}{4} \right)^{11} < 0.2 \cdot 10^{-8} : \quad (7.2.2)$$

Ուստի  $[0, \pi/4]$  հատվածում  $\sin x$  ֆունկցիայի արժեքների փոխարեն կարելի է վերցնել

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad (7.2.3)$$

բազմանդամի արժեքները:

Իններորդ աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամների դասում կառուցված բազմանդամը մեր խնդրի միակ լուծումը չէ: Դեռ ավելին, կարելի է կառուցել յոթերորդ

աստիճանի բազմանդամ, որը  $[0, \pi/4]$  հատվածում մոտարկում է  $\sin x$  ֆունկցիան նույն  $10^{-7}$  ճշտությամբ: Գրա համար օգտվենք Չեբիշևի  $T_n(x)$  բազմանդամներից:

Կիրառելով (6.3.2) անդրադարձ առնչությունները՝ գրենք

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

բազմանդամը: Ըստ 6.3.1 լեմմայի,  $x \in [-1, 1]$  արժեքների համար  $|T_n(x)| \leq 1$ : Ուստի  $[0, \pi/4]$  հատվածում ունենք

$$\left| x^9 - \frac{9}{4}x^7 + \frac{27}{16}x^5 - \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x \right| = \frac{1}{2^8} |T_9(x)| \leq \frac{1}{2^8} \quad (7.2.4)$$

գնահատականը:  $P_9(x)$  բազմանդամի (7.2.3) արտահայտության մեջ  $x^9$  աստիճանը փոխարինենք

$$Q_7(x) \equiv \frac{9}{4}x^7 - \frac{27}{16}x^5 + \frac{15}{32}x^3 - \frac{9}{256}x$$

բազմանդամով: Արդյունքում կստանանք յոթերորդ աստիճանի

$$\begin{aligned} P_7(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!} Q_7(x) \\ &= -\frac{31}{161280}x^7 + \frac{597}{71680}x^5 - \frac{129023}{774144}x^3 + \frac{10321919}{10321920}x \end{aligned}$$

բազմանդամ: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} |\sin x - P_7(x)| &= \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!} Q_7(x) \right) \right| = \\ &= \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) + \frac{1}{9!} (x^9 - Q_7(x)) \right| \leq \\ &= \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) \right| + \frac{1}{9!} |x^9 - Q_7(x)| : \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.2.2) և (7.2.4) գնահատականները, կստանանք

$$|\sin x - P_7(x)| \leq 0.2 \cdot 10^{-8} + \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{2^8} < 0.2 \cdot 10^{-8} + 1.08 \cdot 10^{-8} < 0.13 \cdot 10^{-7}$$

գնահատականը: Այսպիսով, կառուցված  $P_7(x)$  բազմանդամը  $[0, \pi/4]$  հատվածում տրված ճշտությամբ հավասարաչափ մոտարկում է  $\sin x$  ֆունկցիան:  $\diamond$

Գիտարկենք հանրահաշվական բազմանդամները որպես մոտարկող ֆունկցիաներ  $C[a, b]$  տարածության մեջ: Նշանակենք  $H_n$ -ով  $n$ -ից ոչ բարձր աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների դասը: Պարզ է, որ  $H_n$ -ը  $C[a, b]$  տարածության  $(n+1)$ -չափանի ենթատարածություն է:

Ֆունկցիաների մոտարկման տեսության մեջ կարևորագույն արդյունքներից է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 7.2.1** (Կ.Վայերշտրաս) : Եթե  $f(x) \in C[a, b]$ , ապա ցանկացած դրական  $\varepsilon$ -ի համար գոյություն ունի այնպիսի  $\mathcal{P}(x)$  բազմանդամ, որ

$$\|f - \mathcal{P}\| < \varepsilon : \quad (7.2.5)$$

Բացի այդ, թեորեմի ապացուցման ընթացքից բխում է հետևյալը. որքան փոքր է  $\varepsilon$ -ը, այդքան բարձր է  $\mathcal{P}(x)$  բազմանդամի աստիճանը (տե՛ս, օրինակ, [40]): Եթե  $n$ -ը  $\mathcal{P}(x)$  բազմանդամի աստիճանն է, ապա (7.2.5) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$\rho(f, H_n) = \inf_{P_n(x) \in H_n} \|f - P_n\| < \varepsilon :$$

Ուստի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f, H_n) = 0 : \quad (7.2.6)$$

Դեռ ավելին,  $\rho(f, H_n)$  հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է: Իրոք, ելնելով  $H_n$  ենթատարածությունների ներդրվածությունից՝

$$H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots \subset C[a, b]$$

և հիշելով  $\rho(f, H_n)$  հեռավորության սահմանումը, ունենք

$$\rho(f, H_0) \geq \rho(f, H_1) \geq \dots \geq \rho(f, H_n) \geq \dots \geq 0 :$$

Լավագույն մոտարկման տարրի գոյության 7.1.1 թեորեմի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ ցանկացած  $f(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի  $Q_n(x) \in H_n$  բազմանդամ, որ

$$\|f - Q_n\| = \rho(f, H_n) : \quad (7.2.7)$$

Այդ բազմանդամը կոչվում է *լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ*  $f(x)$  ֆունկցիայի համար:

## 7.2.1 Ալտերնանսի մասին Չեբիշևի թեորեմը

Ստորև բերված հիմնարար պնդումը տալիս է լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

**Թեորեմ 7.2.2** (Պ.Լ.Չեբիշև) : Որպեսզի  $Q_n(x)$  բազմանդամը լինի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ  $f(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան առնվազն  $n + 2$  կետ

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \in [a, b], \quad (7.2.8)$$

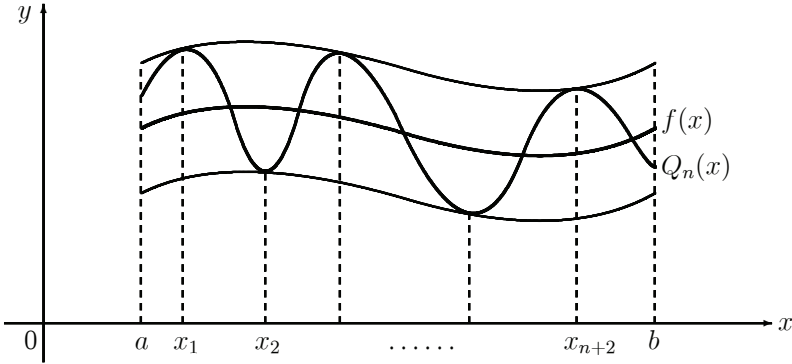
այնպիսիք, որ

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n\|, \quad i = 1, 2, \dots, n + 2, \quad (7.2.9)$$

որտեղ  $\alpha = 1$  (կամ  $\alpha = -1$ ) բոլոր  $i$ -երի համար միաժամանակ:



Թեորեմում նշված  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$  կետերը կոչվում են *չեբիշկյան ալտերնանսի կետեր* (նկ. 7.2.1):



**Նկ. 7.2.1** Չեբիշկյան ալտերնանս

**Ապացույց:** Անհրաժեշտություն: Մենք չենք դիտարկի այն պարզ դեպքը, երբ  $f(x)$  ֆունկցիան ինքը  $n$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Դիցուք  $Q_n(x)$ -ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է  $f(x)$  ֆունկցիայի համար և

$$r(x) \equiv f(x) - Q_n(x) :$$

Ըստ (7.2.7)-ի  $\|r\| = \rho(f, H_n)$ : Տանք որոշ սահմանումներ:

Այն  $x_0 \in [a, b]$  կետը, որի համար  $|r(x_0)| = \|r\|$ , կանվանենք  $Q_n(x)$  բազմանդամի  $f(x)$  ֆունկցիայից մեծագույն շեղման կետ կամ  $e^-$ -կետ: Ընդ որում, եթե  $r(x_0) = \|r\|$ , ապա  $x_0$  կետը կանվանենք *դրական մեծագույն շեղման կետ* կամ  $e^+$ -կետ: Իսկ եթե  $r(x_0) = -\|r\|$ , ապա այդ կետը կանվանենք *բացասական մեծագույն շեղման կետ* կամ  $e^-$ -կետ:

Քանի որ  $r(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է, ապա,  $[a, b]$  հատվածում գոյություն ունի գոնե մեկ  $e$  կետ: Ավելին, գոյություն ունեն ինչպես  $e^+$ -կետեր, այնպես էլ  $e^-$ -կետեր: Եթե, օրինակ, գոյություն չունենային  $e^-$ -կետեր, ապա կգտնվեր այնպիսի  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \|r\|$ , որ

$$-\|r\| + \varepsilon \leq r(x) \leq \|r\| \quad \forall x \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում, վերցնելով

$$Q_n^*(x) = Q_n(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

կստանայինք

$$-\|r\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) - Q_n^*(x) = r(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|r\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

կամ

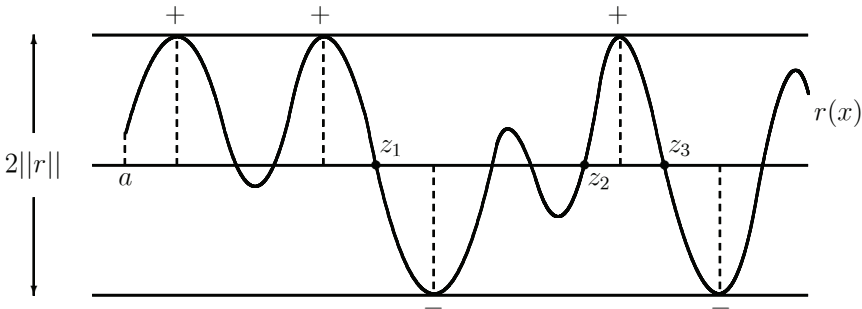
$$|f(x) - Q_n^*(x)| \leq \|r\| - \frac{\varepsilon}{2} = \rho(f, H_n) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [a, b] :$$

Իսկ դա կհակասեր  $\rho(f, H_n)$  հեռավորության սահմանմանը: Նման ձևով կարելի է ապացուցել նաև  $e^+$ -կետերի գոյությունը:

Ապացուցենք, որ  $[a, b]$  հատվածը կարելի է տրոհել վերջավոր թվով

$$[a, z_1], [z_1, z_2], [z_2, z_3], \dots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, b] \tag{7.2.10}$$

հատվածների այնպես, որ դրանցից յուրաքանչյուրը հերթով պարունակի կա՛մ միայն  $e^+$ -կետեր, կա՛մ միայն  $e^-$ -կետեր:



**Նկ. 7.2.2**  $[a, b]$  հատվածի տրոհումը

Տրոհումը կատարենք հետևյալ կերպ (տե՛ս նկ.7.2.2): Որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $[a, b]$  հատվածի երկայնությամբ  $a$ -ից  $b$  շարժման ընթացքում առաջին  $e^-$ -կետը  $e^+$ -կետն է: Որպես  $z_1$  վերցնենք  $r(x)$  ֆունկցիայի ամենաաջ գրուն, որը գտնվում է  $a$  կետի և նրան հաջորդող առաջին  $e^-$ -կետի միջև: Որպես  $z_2$  վերցնենք  $r(x)$  ֆունկցիայի ամենաաջ գրուն, որը գտնվում է  $z_1$  կետի և նրան հաջորդող առաջին  $e^+$ -կետի միջև (եթե այդպիսին գոյություն ունի): Որպես  $z_3$  վերցնենք  $r(x)$  ֆունկցիայի ամենաաջ գրուն, որը գտնվում է  $z_2$  կետի և նրան հաջորդող առաջին  $e^-$ -կետի միջև (եթե այդպիսին գոյություն ունի) և այլն:

Դիցուք  $z_m$ -ը  $z_i$  կետերի  $b$ -ից տարբեր ամենավերջին կետն է: Ընդ որում, ըստ կառուցման  $r(z_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ : Քանի որ (7.2.10) հատվածներից յուրաքանչյուրը պարունակում է հերթով  $e^+$ -կետեր և  $e^-$ -կետեր, ապա թեորենի անհրաժեշտության մասի ապացույցը ավարտելու համար բավական է ցույց տալ, որ  $m + 1 \geq n + 2$ :

Ենթադրենք հակառակը, որ  $m + 1 < n + 2$ , այսինքն՝  $m \leq n$ : Համաձայն  $[a, b]$  հատվածի (7.2.10) տրոհման՝  $[a, z_1]$  հատվածի վրա գոյություն չունեն  $e^-$ -կետեր,  $[z_1, z_2]$  հատվածի վրա գոյություն չունեն  $e^+$ -կետեր և այլն: Քանի որ  $r(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է և (7.2.10) հատվածների թիվը վերջավոր է, ապա կգտնվի այնպիսի  $\varepsilon$  թիվ,  $0 < \varepsilon < ||r||$ , որ

$$\begin{aligned} -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, & x \in [a, z_1], \\ -||r|| &\leq r(x) \leq ||r|| - \varepsilon, & x \in [z_1, z_2], \\ -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, & x \in [z_2, z_3], \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

և այլն: Վերցնենք

$$d_m(x) \equiv c(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_m)$$

բազմանդամը, որտեղ  $c$  թիվն ընտրված է այնպես, որ

$$\|d_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.2.12)$$

և  $d_m(x) > 0$ , երբ  $x \in [a, z_1]$ : Այդ դեպքում  $d_m(x)$  բազմանդամը  $z_i$  կետերով անցնելիս փոխում է իր նշանը: Հետևաբար այդ բազմանդամը միջակայքերում կունենա հերթափոխվող նշաններ, այսինքն՝

$$\begin{aligned} d_m(x) < 0, & \quad x \in (z_1, z_2), \\ d_m(x) > 0, & \quad x \in (z_2, z_3), \end{aligned}$$

և այլն: Վերցնենք

$$P_n(x) \equiv Q_n(x) + d_m(x)$$

(հիշեցնենք, որ համաձայն մեր ենթադրության՝  $m \leq n$ ): Այդ դեպքում ցանկացած  $x \in [a, z_1]$  կետի համար կունենանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) < \|r\| : \quad (7.2.13)$$

Միաժամանակ, հաշվի առնելով (7.2.11) և (7.2.12) անհավասարությունները,  $x \in [a, z_1]$  կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \geq -\|r\| + \varepsilon - \|d_m\| \geq -\|r\| + \frac{\varepsilon}{2} > -\|r\| : \quad (7.2.14)$$

Այսպիսով, (7.2.13) և (7.2.14)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < \|r\|, \quad x \in [a, z_1] :$$

Այնուհետև,  $x \in [z_1, z_2]$  ցանկացած կետի համար ունենք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) > -\|r\| : \quad (7.2.15)$$

Միաժամանակ, դարձյալ հաշվի առնելով (7.2.11) և (7.2.12) անհավասարությունները,  $x \in [z_1, z_2]$  կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \leq \|r\| - \varepsilon + \|d_m\| \leq \|r\| - \frac{\varepsilon}{2} < \|r\| : \quad (7.2.16)$$

Այսպիսով, (7.2.15) և (7.2.16)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < \|r\|, \quad x \in [z_1, z_2] :$$

Շարունակելով համանման դատողություններ՝ արդյունքում կստանանք

$$|f(x) - P_n(x)| < \|r\| \quad \forall x \in [a, b]$$

անհավասարությունը, այսինքն՝

$$\|f - P_n\| < \|r\| = \rho(f, H_n),$$

ինչը հակասում է  $\rho(f, H_n)$  հեռավորության սահմանմանը: Թեորեմի անհրաժեշտությունը ապացուցված է:

Բավարարություն: Ենթադրենք, որ  $f(x)$  ֆունկցիայի համար լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը ոչ թե  $Q_n(x)$ -ն է, այլ մեկ ուրիշ բազմանդամ՝  $Q_n^*(x) \in H_n$ : Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ

$$\|f - Q_n^*\| < \|f - Q_n\| : \quad (7.2.17)$$

Վերցնենք  $n$ -ից ոչ բարձր աստիճանի հետևյալ բազմանդամը

$$R_n(x) \equiv Q_n^*(x) - Q_n(x) = [f(x) - Q_n(x)] - [f(x) - Q_n^*(x)]$$

և դիտարկենք նրա արժեքները (7.2.8) չեքիշկյան ակտերնանսի կետերում: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ (7.2.9) պայմաններում  $\alpha = 1$ : Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (7.2.17) անհավասարությունը, կունենանք

$$\begin{aligned} R_n(x_1) &= [f(x_1) - Q_n(x_1)] - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] = -\|f - Q_n\| - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] \\ &\leq -\|f - Q_n\| + \|f - Q_n^*\| < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n(x_2) &= [f(x_2) - Q_n(x_2)] - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] = \|f - Q_n\| - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] \\ &\geq \|f - Q_n\| - \|f - Q_n^*\| > 0, \end{aligned}$$

⋮

$$R_n(x_{n+2}) = [f(x_{n+2}) - Q_n(x_{n+2})] - [f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] = (-1)^{n+2} \|f - Q_n\| -$$

$$\begin{aligned} [f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] &< 0 \text{ (եթե } n\text{-ը կենտ է)} \\ &> 0 \text{ (եթե } n\text{-ը գույգ է)} \quad : \end{aligned}$$

Ստացվեց, որ  $n$ -ից ոչ բարձր աստիճանի  $R_n(x)$  բազմանդամը  $[a, b]$  հատվածում առնվազն  $n + 1$  անգամ փոխում է իր նշանը: Հետևաբար այդ բազմանդամը պետք է ունենա առնվազն  $n + 1$  արմատ, ինչն անհնար է:  $\square$

## 7.2.2 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամի միակությունը

$C[a, b]$  տարածությունը խիստ նորմավորված չէ: Դրանում հեշտ է համոզվել: Դիտարկենք  $[0, 1]$  հատվածում որոշված երկու ֆունկցիա՝  $f(x) = x$  և  $g(x) \equiv 1$ : Ակնհայտ է, որ  $\|f\| = 1$ ,  $\|g\| = 1$  և  $\|f + g\| = 2$ : Սակայն  $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$  հավասարությունից չի բխում  $f(x) = \alpha g(x)$  առնչությունը: Այդ պատճառով մենք չենք կարող հենվել 7.1.2 թեորեմի վրա, որը հաստատում է լավագույն մոտարկման տարրի միակությունը խիստ նորմավորված տարածություններում: Այնուամենայնիվ, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 7.2.3 :** *Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը միակն է:*

**Ապացույց:** Ենթադրենք, որ  $f(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիայի համար  $H_n$ -ում գոյություն ունի երկու լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ՝  $Q_n^{(1)}(x)$  և  $Q_n^{(2)}(x)$ : Այսինքն, ճիշտ են

$$\|f - Q_n^{(1)}\| = \|f - Q_n^{(2)}\| = \rho(f, H_n) \quad (7.2.18)$$

հավասարությունները: Դիտարկենք

$$Q_n(x) \equiv \frac{1}{2} (Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x)) \in H_n$$

բազմանդամը: Հաշվի առնելով (7.2.18) հավասարությունները՝ ունենք

$$\|f - Q_n\| = \frac{1}{2} \|(f - Q_n^{(1)}) + (f - Q_n^{(2)})\| \leq \frac{1}{2} (\|f - Q_n^{(1)}\| + \|f - Q_n^{(2)}\|) = \rho(f, H_n) :$$

Այստեղից և  $\rho(f, H_n)$  հեռավորության սահմանումից կստանանք

$$\|f - Q_n\| = \rho(f, H_n)$$

հավասարությունը: Ստացանք, որ  $Q_n(x)$ -ը նույնպես լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է  $f(x)$  ֆունկցիայի համար: Այդ դեպքում, համաձայն Չեբիշևի թեորեմի, (7.2.8) ալտերնանսի կետերում տեղի ունեն

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)| = \rho(f, H_n), \quad i = 1, 2, \dots, n+2$$

կամ

$$|(f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)) + (f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i))| = 2\rho(f, H_n), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 \quad (7.2.19)$$

հավասարությունները: Քանի որ

$$|f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)| \leq \rho(f, H_n), \quad |f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i)| \leq \rho(f, H_n),$$

այսպես (7.2.19) հավասարությունները հնարավոր են միայն այն դեպքում, երբ

$$f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i) = f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 :$$

Վերջին հավասարություններից հետևում է, որ

$$Q_n^{(1)}(x_i) = Q_n^{(2)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2 :$$

Այսպիսով,  $n$ -րդ աստիճանի  $Q_n^{(1)}(x)$  և  $Q_n^{(2)}(x)$  բազմանդամները համընկնում են  $n+2$  կետերում: Ուստի դրանք նույնաբար հավասար են՝  $Q_n^{(1)}(x) \equiv Q_n^{(2)}(x)$ :  $\square$

### 7.3 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման օրինակներ

Դիտարկենք լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամների կառուցման օրինակներ: Մոտարկումները կառուցելիս մենք հիմնվելու ենք Չեբիշևի 7.2.2 թեորեմի վրա:

**Օրինակ 7.3.1 :** Կառուցել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ  $H_0$  դասից  $[a, b]$  հատվածում որոշված  $f(x)$  անընդհատ ֆունկցիայի համար:

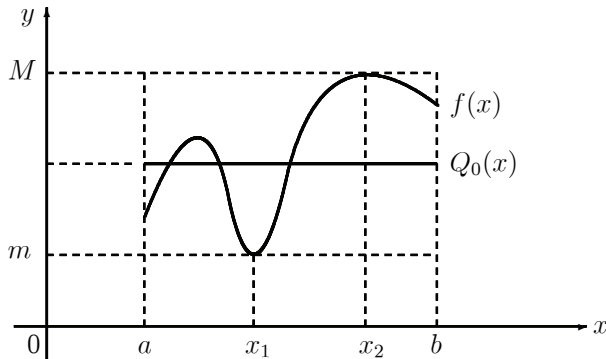
Դիցուք

$$m \equiv \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_1), \quad M \equiv \max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_2) :$$

Գծվար չէ տեսնել, որ

$$Q_0(x) = \frac{M + m}{2}$$

ֆունկցիան որոնելի բազմանդամն է:



**Նկ. 7.3.1** Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ  $H_0$ -ից

Իրոք,

$$\|f - Q_0\| = \frac{M - m}{2}$$

և

$$f(x_1) - Q_0(x_1) = m - \frac{M + m}{2} = -\frac{M - m}{2} = -\|f - Q_0\|,$$

$$f(x_2) - Q_0(x_2) = M - \frac{M + m}{2} = \frac{M - m}{2} = \|f - Q_0\| :$$

Չեբիշևյան ալտերնանսի կետերն են՝  $x_1$  և  $x_2$  (նկ. 7.3.1):  $\diamond$

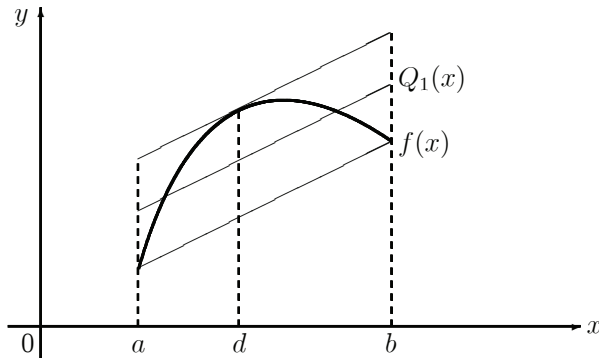
**Օրինակ 7.3.2 :** Գիցուք  $[a, b]$  հատվածում տրված է  $y = f(x)$  անընդհատ ուռուցիկ ֆունկցիան (նկ. 7.3.2): Այդ ֆունկցիայի համար կառուցել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը  $H_1$  դասից:

Տանենք հարթության  $(a, f(a))$  և  $(b, f(b))$  կետերը միացնող հատողը: Այնուհետև տանենք հատողին զուգահեռ շոշափողը: Շոշափման կետի  $d$  արագիսը որոշվում է

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

հավասարումից: Վերջապես, տանենք ստացված զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող ուղիղը (նկ. 7.3.2): Կառուցված գծային ֆունկցիան կլինի որոնելի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը  $H_1$ -ից, որովհետև  $L \equiv \|f - Q_1\|$  նշանակումից և կառուցման ընթացքից ունենք՝

$$\begin{aligned} f(a) - Q_1(a) &= -L, \\ f(d) - Q_1(d) &= L, \\ f(b) - Q_1(b) &= -L : \end{aligned}$$



**Նկ. 7.3.2** Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ  $H_1$ -ից

Նշենք, որ  $a < d < b$  կետերը չեքիշխյան ակտերնանսի կետերն են:  $\diamond$

**Օրինակ 7.3.3 :**  $f(x) = x^n, x \in [-1, 1]$  ֆունկցիայի համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը  $H_{n-1}$  դասից:

Գիտարկենք  $(n - 1)$ -րդ աստիճանի

$$Q_{n-1}(x) \equiv x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \tag{7.3.1}$$

բազմանդամը, որտեղ  $T_n(x)$ -ը Չեբիշևի բազմանդամն է: Այստեղ մենք հաշվի ենք առել այն փաստը, որ  $T_n(x)$  բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է  $2^{n-1}$  (տե՛ս (6.3.3)-ը): Յույց տանք, որ  $Q_{n-1}(x)$ -ը որոնելի բազմանդամ է: Իրոք, (7.3.1)-ից ունենք

$$\|x^n - Q_{n-1}\| = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} :$$

Դիցուք

$$-1 = \theta_n < \theta_{n-1} < \dots < \theta_1 < \theta_0 = 1 \quad (7.3.2)$$

Կետերը  $T_n(x)$  բազմանդամի էքստրեմումի կետեր են (լեմմա 6.3.3): Քանի որ

$$\begin{aligned} \theta_0^n - Q_{n-1}(\theta_0) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_0) = \frac{1}{2^{n-1}}, \\ \theta_1^n - Q_{n-1}(\theta_1) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}, \\ &\vdots \\ \theta_n^n - Q_{n-1}(\theta_n) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\theta_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

ապա  $Q_{n-1}(x)$ -ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամն է, իսկ (7.3.2) կետերը չեփշկյան ալտերնանսի կետերն են:  $\diamond$

Ենթադրելով, որ  $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ , ստանանք  $\rho(f, H_n)$  մեծության երկկողմանի գնահատականները: 6.3 պարագրաֆում, լուծելով ինտերպոլացիայի սխալանքի նվազեցման խնդիրը, մենք ցույց ենք տվել, որ  $T_{n+1}(x)$  բազմանդամի արմատների պատկերները  $L_n(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամի հանգույցներ ընտրելու դեպքում

$$\|f - L_n\| \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1}$$

(տե՛ս (6.3.16) գնահատականը): Այստեղից անմիջապես բխում է

$$\rho(f, H_n) \leq \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1} \quad (7.3.3)$$

գնահատականը:

Արտաձենք ստորին գնահատականը: Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիայի համար  $Q_n(x)$ -ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է  $H_n$ -ից: Քանի որ  $f(x) - Q_n(x)$  տարբերությունը ալտերնանսի մեկ կետից մյուսին անցնելիս փոխում է իր նշանը (տե՛ս (7.2.8) և (7.2.9)), ապա այն դառնում է զրո  $[a, b]$  հատվածի առնվազն  $(n+1)$  կետում՝  $z_0, z_1, \dots, z_n$ : Այսինքն,

$$Q_n(z_i) = f(z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Ուստի,  $Q_n(x)$  բազմանդամը կարելի է դիտարկել որպես  $z_0, z_1, \dots, z_n$  հանգույցներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամ  $f(x)$  ֆունկցիայի համար: Օգտվելով ինտերպոլացիայի սխալանքի (6.2.9) արտահայտությունից՝ ունենք

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b],$$



որտեղ  $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - z_0)(x - z_1) \dots (x - z_n)$  և  $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ : Գիցուք

$$\|\omega_{n+1}\| = \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(\alpha)|, \quad \alpha \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \rho(f, H_n) &= \|f - Q_n\| \geq |f(\alpha) - Q_n(\alpha)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(\alpha))|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(\alpha)| \\ &\geq \frac{\min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\| : \end{aligned}$$

Համաձայն 6.3 պարագրաֆի 6.3.2 բաժնի արդյունքների ունենք

$$\|\omega_{n+1}\| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

գնահատականը: Հետևաբար

$$\rho(f, H_n) \geq \frac{\min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)! 2^{2n+1}} (b-a)^{n+1} : \quad (7.3.4)$$

Համեմատելով (7.3.3) և (7.3.4) գնահատականները՝ կարող ենք պնդել, որ եթե  $f^{(n+1)}(x)$  ածանցյալը  $[a, b]$  հատվածում պահպանում է իր նշանը և մեծ փոփոխություն չի կրում, ապա  $f(x)$ -ի համար կառուցված լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամի և Չեբիշևի բազմանդամի արմատներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամի սխալանքները համեմատական են:

## 7.4 Մոտարկումներ ունիտար տարածություններում

Նախ հիշենք էվկլիդեսյան տարածության սահմանումը: Մենք կսահմանափակվենք իրական տարածություններով:

**Սահմանում 7.4.1 :**  $L$  իրական գծային տարածությունը կոչվում է *էվկլիդեսյան*, եթե յուրաքանչյուր  $x, y \in L$  տարրերի գույզին համապատասխանության մեջ է դրված  $(x, y)$  իրական թիվ, որը կոչվում է այդ տարրերի *սկալյար արտադրյալ*, այնպես, որ բավարարված են

1.  $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0},$
2.  $(x, y) = (y, x),$
3.  $(\lambda x, y) = \lambda (x, y),$
4.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

այսյանները կամայական  $x, y, z \in L$  և  $\lambda$  իրական թվի համար:

Սկալյար արտադրյալի գաղափարի հետ կապված են օրթոգոնալության և նորմավորման հասկացությունները:

**Սահմանում 7.4.2 :** Էվկլիդյան տարածության  $x$  և  $y$  տարրերը կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե  $(x, y) = 0$  :

**Սահմանում 7.4.3 :** Էվկլիդյան տարածության  $x$  տարրը կոչվում է *նորմավորված*, եթե  $(x, x) = 1$  :

Սկալյար արտադրյալի միջոցով էվկլիդյան տարածությունը կարելի է նորմավորել:

**Սահմանում 7.4.4 :** Էվկլիդյան տարածությունը, որտեղ նորմը ներմուծված է

$$\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)} : \quad (7.4.1)$$

առնչության միջոցով, կոչվում է *ունիտար տարածություն*:

Հիլբերտյան տարածությունը ունիտար տարածության կարևորագույն մասնավոր դեպք է:

**Սահմանում 7.4.5 :** Լրիվ, անվերջ չափանի ունիտար տարածությունը կոչվում է *հիլբերտյան տարածություն*:

Հիլբերտյան տարածության գաղափարը առաջացել է գերմանացի մաթեմատիկոս Գ. Հիլբերտի աշխատանքների հիման վրա: Նա ուսումնասիրում էր իրական թվերի

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

անվերջ հաջորդականությունների տարածությունը, որտեղ սկալյար արտադրյալը և նորմը որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \|x\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} :$$

### 7.4.1 Լավագույն մոտարկման տարրի որոշումը

Նախ և առաջ նշենք ունիտար տարածության մեկ կարևոր հատկություն:

**Թեորեմ 7.4.1 :** *Ունիտար տարածությունը խիստ նորմավորված է:*

Ապացույց: Դիցուք ունիտար տարածության  $f$  և  $g$  ոչ զրոյական տարրերը այնպիսին են, որ

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| :$$

Մի կողմից, օգտվելով (7.4.1) առնչությունից, ունենք

$$\|f + g\|^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 :$$

Մյուս կողմից,

$$(\|f\| + \|g\|)^2 = \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 :$$

Հավասարեցնելով վերջին երկու հավասարությունների աջ մասերը՝ կստանանք

$$(f, g) = \|f\|\|g\| \tag{7.4.2}$$

հավասարությունը: Վերցնենք  $\alpha = \|f\|/\|g\|$ : Պարզ է, որ  $\alpha > 0$ : Հաշվի առնելով (7.4.2) հավասարությունը՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} (f - \alpha g, f - \alpha g) &= (f, f) - 2\alpha(f, g) + \alpha^2(g, g) = \|f\|^2 - 2\alpha\|f\|\|g\| + \alpha^2\|g\|^2 = \\ \|f\|^2 - 2\frac{\|f\|}{\|g\|}\|f\|\|g\| + \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2}\|g\|^2 &= 0 : \end{aligned}$$

Ուստի  $f - \alpha g = 0$ , այսինքն՝  $f = \alpha g$ :  $\square$

Այսպիսով, 7.1.2 թեորեմի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ ունիտար տարածությունում լավագույն մոտարկման տարրը միակն է:

**Թեորեմ 7.4.2 :** Եթե  $\psi \in L_n$  տարրը լավագույն մոտարկման տարր է  $f \in L$  տարրի համար, ապա

$$(f - \psi, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in L_n : \tag{7.4.3}$$

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ գոյություն ունի այնպիսի  $g \in L_n$  տարր, որի համար

$$\mu \equiv (f - \psi, g) \neq 0 :$$

Առանց ընդհանրության սահմանափակման կարող ենք ենթադրել, որ  $g$  տարրը նորմավորված է, այսինքն՝  $\|g\| = 1$ : Վերցնենք  $v = \psi + \mu g \in L_n$ : Ունենք

$$\begin{aligned} \|f - v\|^2 &= (f - v, f - v) = (f - \psi - \mu g, f - \psi - \mu g) = \\ (f - \psi, f - \psi) - 2\mu(f - \psi, g) + \mu^2(g, g) &= \|f - \psi\|^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \\ \|f - \psi\|^2 - \mu^2 &< \|f - \psi\|^2 : \end{aligned}$$

Այսպիսով  $\|f - v\| < \|f - \psi\|$ , ինչը հակասում է այն փաստին, որ  $\psi$ -ն լավագույն մոտարկման տարր է:  $\square$

Ապացուցված թեորեմի հիման վրա ստանում ենք լավագույն մոտարկման տարրի որոշման եղանակը: Դիցուք  $L_n$  ենթատարածությունը ծնվել է  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  գծորեն անկախ տարրերի համակարգով: Ուստի

$$\psi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \in L_n \tag{7.4.4}$$

լավագույն մոտարկման տարրը գտնելու համար պետք է որոշել  $c_1, c_2, \dots, c_n$  գործակիցները: Այդ գործակիցները, ըստ (7.4.3)-ի, կարող ենք ստանալ

$$\left( f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \varphi_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

պայմաններից, որոնք հանգում են

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi_i) c_j = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.4.5)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այդ համակարգը կոչվում է *նորմալ համակարգ*: Բնականաբար հարց է ծագում այդ համակարգի միարժեք լուծելիության մասին, ինչը պարզելու համար սահմանենք մեկ կարևոր հասկացություն:

**Սահմանում 7.4.6 :** Սկալյար արտադրյալներից կազմված

$$G = \begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \quad (7.4.6)$$

մատրիցը կոչվում է  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  տարրերի համակարգի *Գրամի մատրից*: Այդ մատրիցի որոշիչը կոչվում է *Գրամի որոշիչ*:

Կամայական  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  վեկտորի համար ունենք

$$(Gx, x) = \sum_{i,j=1}^n (\varphi_j, \varphi_i) x_i x_j = \left( \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|^2 : \quad (7.4.7)$$

**Թեորեմ 7.4.3 :** *Գրամի մատրիցը վերասերված է այն և միայն այն դեպքում, երբ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  տարրերի համակարգը գծորեն կախված է:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (7.4.6) մատրիցը վերասերված է: Ուստի գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական վեկտոր  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , որ  $Gx = 0$ : Այդ վեկտորի համար, ըստ (7.4.7) հավասարության, ունենք՝

$$0 = (Gx, x) = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i \right\|^2 :$$

Այստեղից հետևում է, որ  $\sum_{i=1}^n x_i \varphi_i = 0$ : Իսկ դա նշանակում է, որ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  համակարգը գծորեն կախված է: Անհրաժեշտությունը ապացուցված է:

Բավարարություն: Գիցուք  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  համակարգը գծորեն կախված է: Այսինքն, զոյություն ունեն այնպիսի  $x_1, x_2, \dots, x_n$  թվեր, որոնցից գոնե մեկը 0-ից տարբեր է, որ

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \dots + x_n\varphi_n = 0 :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_1, \varphi_1) + x_2(\varphi_2, \varphi_1) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_1) &= 0, \\ x_1(\varphi_1, \varphi_2) + x_2(\varphi_2, \varphi_2) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_2) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_1(\varphi_1, \varphi_n) + x_2(\varphi_2, \varphi_n) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_n) &= 0 \end{aligned}$$

հավասարությունները: Այսպիսով,  $G$  մատրիցով գծային հավասարումների համասեռ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Հետևաբար,  $G$  մատրիցը վերասերված է:  $\square$

Քանի որ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  տարրերը կազմում են  $L_n$  ենթատարածության բազիս, ապա (7.4.5) նորմալ համակարգը միարժեքորեն լուծելի է:  $G$  մատրիցը սիմետրիկ է: Դեռ ավելին, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 7.4.4 :** Եթե  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  տարրերի համակարգը գծորեն անկախ է, ապա  $G$ -րամի մատրիցը դրական որոշյալ է:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  ոչ զրոյական վեկտոր: Այդ դեպքում  $\sum_{i=1}^n x_i\varphi_i \neq 0$  և, ինչպես հետևում է (7.4.7)-ից,  $(Gx, x) > 0$ :  $\square$

Այսպիսով, լավագույն մոտարկման տարրի որոշման խնդիրը լուծված է: Սակայն գործնականում այստեղ ի հայտ են գալիս բավականին լուրջ դժվարություններ: Հիմնականում դրանք կապված են  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  բազիսային տարրերի ընտրության հետ: Բանն այն է, որ  $G$ -րամի մատրիցը կարող է դառնալ համարյա վերասերված և շատ վատ պայմանավորված:

**Օրինակ 7.4.1** (Հիլբերտի մատրից) : Սահմանենք  $[0, 1]$  հատվածում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ

$$(f, g) \equiv \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

սկալյար արտադրյալը: Ընտրենք հետևյալ գծորեն անկախ ֆունկցիաները.

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n :$$

$G$ -րամի մատրիցի տարրերը հեշտությամբ հաշվվում են՝

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n :$$

Արդյունքում կստանանք այսպես կոչված *Հիլբերտի մատրիցը*՝

$$H = [h_{i,j}]_{i,j=0}^n, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j+1} : \quad (7.4.8)$$

Այս մատրիցը հայտնի է որպես վատ պայմանավորված մատրիցի դասական օրինակ: Նրա պայմանավորվածության թիվը  $n$ -ի մեծացմանը գուզընթաց շատ արագ աճում է, այն է՝

$$\kappa(H) \sim e^{3.5n} \quad (7.4.9)$$

(տե՛ս, օրինակ, [77]): Միաժամանակ  $n$ -ի մեծացման հետ մեկտեղ Հիլբերտի մատրիցի որոշիչը շատ արագ ճգտում է գրոյի: Տեղի ունի հետևյալ բանաձևը (տե՛ս [66]).

$$\det(H) = \frac{[1! 2! 3! \dots (n-1)!]^3}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} : \quad (7.4.10)$$

Հիլբերտի մատրիցի վատ հատկությունները լուսաբանելու նպատակով դիտարկենք

$$Hx = b \quad (7.4.11)$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ  $b = [b_0, b_1, \dots, b_n]^T$  վեկտորի բաղադրիչները տրվում են հետևյալ կերպ.

$$b_i = \sum_{j=0}^n \frac{1}{i+j+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

Հեշտ է տեսնել, որ համակարգի լուծումը  $x = [1, 1, \dots, 1]^T$  վեկտորն է: Կատարվել են հաշվարկներ MATLAB փաթեթի միջավայրում  $n = 13$ -ի դեպքի համար, և ստացվել է (7.4.11) համակարգի հետևյալ «լուծումը».

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.0000, & x_1 &= 1.0000, & x_2 &= 1.0006, & x_3 &= 0.9916, \\ x_4 &= 1.0519, & x_5 &= 0.8693, & x_6 &= 0.8092, & x_7 &= 3.3755, \\ x_8 &= -6.8166, & x_9 &= 15.3612, & x_{10} &= -15.2629, & x_{11} &= 12.2947, \\ x_{12} &= -3.4253, & x_{13} &= 1.7506 : \end{aligned}$$

Ընդ որում պարզվում է, որ  $\det(H) = 3.9220 \cdot 10^{-107}$  և  $\kappa_2(H) = 1.5570 \cdot 10^{18}$ :  $\diamond$

## 7.4.2 Օրթոնորմալ բազիսի օգտագործումը

Հատուկ ուշադրություն է պահանջում այն դեպքը, երբ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  համակարգը *օրթոնորմալ է*, այսինքն՝  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ , որտեղ  $\delta_{ij}$ -ն Կրոնեկերի նշանն է: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (7.4.5) համակարգից, լավագույն մոտարկման տարրի գործակիցները հաշվվում են պարզ բանաձևով՝

$$c_i = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n : \quad (7.4.12)$$

Այդ գործակիցները կոչվում են  $f$  տարրի *Ֆորիեի գործակիցներ* ըստ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  օրթոնորմալ համակարգի: Ընդ որում, լավագույն մոտարկման (7.4.4) տարրը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$\psi = \sum_{i=1}^n (f, \varphi_i) \varphi_i : \quad (7.4.13)$$

Հեշտությամբ որոշվում է նաև  $\rho(f, L_n)$  մեծությունը: Իրոք, հաշվի առնելով (7.4.12)-ը, ստանում ենք

$$\begin{aligned} \rho^2(f, L_n) &= \|f - \psi\|^2 = (f - \psi, f - \psi) = (f, f) - 2(f, \psi) + (\psi, \psi) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \left( f, \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^n c_i^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2 : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2} : \quad (7.4.14)$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է այսպես կոչված *Բեսելի անհավասարությունը*.

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \|f\|^2 : \quad (7.4.15)$$

Ենթադրենք  $L$ -ը *սեպարաբել* հիլբերտյան տարածություն է: Այսինքն, այդ տարածությունում գոյություն ունի ամենուրեք խիտ հաշվելի բազմություն (տե՛ս, օրինակ, [26, 29]): Այդ դեպքում տարածության մեջ գոյություն ունի նաև հաշվելի լրիվ օրթոնորմալ համակարգ

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots : \quad (7.4.16)$$

Կամայական  $f \in L$  տարրը կարելի է ներկայացնել նրա *Ֆորիեի շարքով*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i, \quad (7.4.17)$$

որտեղ  $c_i = (f, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ : Հեշտ է ցույց տալ, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|f\|^2 : \quad (7.4.18)$$

Այս հավասարությունը կոչվում է *Պարսևալի հավասարություն*:

Դիցուք  $L_n$  ենթատարածությունը (7.4.16) համակարգի առաջին  $n$  տարրերի գծային թաղանթն է՝

$$L_n = \text{span} \{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \} :$$

Այդ դեպքում  $\psi \in L_n$  լավագույն մոտարկման տարրը ունի (7.4.13) տեսքը, այսինքն, այն (7.4.17) Ֆուրիեի շարքի հատվածն է: Ընդ որում, (7.4.14) և (7.4.18)-ից հետևում է՝

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2} = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Այսպիսով, գալիս ենք այն եզրակացության, որ առավել գերադասելի է օգտագործել օրթոնորմալ բազիսները: Թեև հիմնականում դրանք հնարավոր չէ միանգամից նշել, այնուամենայնիվ գոյություն ունի մեթոդ, որը թույլ է տալիս կամայական գծորեն անկախ համակարգից անցնել օրթոնորմալ համակարգի: Այդ հարցին նվիրված է հաջորդ պարագրաֆը:

## 7.5 Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը

Դիցուք  $L$  ունիտար տարածությունում տրված է գծորեն անկախ տարրերի

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (7.5.1)$$

համակարգը: Նկարագրենք *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ընթացքը*, որը (7.5.1) համակարգը բերում է

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (7.5.2)$$

օրթոնորմալ համակարգի:

### 7.5.1 Օրթոգոնալացման ալգորիթմի դասական տարբերակը

Ալգորիթմի առաջին քայլում կառուցվում է

$$q_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 \quad (7.5.3)$$

տարրը: Ակնհայտ է, որ  $\|q_1\| = 1$ :

Անցնենք երկրորդ քայլին: Դիտարկենք

$$\tilde{q}_2 = \alpha_{12} q_1 + a_2 \quad (7.5.4)$$

տարրը: Քանի որ  $a_1$  և  $a_2$  տարրերը գծորեն անկախ են, ապա  $\tilde{q}_2$ -ը տարբեր է զրոյից կամայական  $\alpha_{12}$  գործակցի համար: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_2, q_1) = 0 :$$

Այդ դեպքում

$$\alpha_{12} (q_1, q_1) + (a_2, q_1) = 0$$



հավասարությունից կստանանք, որ

$$\alpha_{12} = -(a_2, q_1) :$$

Այնուհետև հաշվում ենք

$$q_2 = \frac{1}{\|\tilde{q}_2\|} \tilde{q}_2 : \quad (7.5.5)$$

տարրը: Ըստ կառուցման՝  $\|q_2\| = 1$ :

Ենթադրենք, որ արդեն կառուցված են

$$q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$$

օրթոնորմալ տարրերը ( $k \leq n$ ): Ալգորիթմի  $k$ -րդ քայլը կայանում է հետևյալում: Նախ փնտրում ենք  $\tilde{q}_k$  տարրը հետևյալ տեսքով.

$$\tilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} q_i + a_k : \quad (7.5.6)$$

Նորից նշենք, որ  $a_1, a_2, \dots, a_k$  տարրերի գծային անկախությունից հետևում է, որ  $\tilde{q}_k$  տարրը տարբեր է զրոյից կամայական  $\alpha_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  գործակիցների համար: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 :$$

Արդյունքում

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{jk} (q_j, q_i) + (a_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

հավասարություններից կստանանք արտահայտություններ (7.5.6) ներկայացման գործակիցների համար.

$$\alpha_{ik} = -(a_k, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, k-1 :$$

Այնուհետև հաշվում է

$$q_k = \frac{1}{\|\tilde{q}_k\|} \tilde{q}_k \quad (7.5.7)$$

տարրը:

Շարունակելով ընթացքը՝ կստանանք (7.5.2) տարրերի որոնելի օրթոնորմալ համակարգը:

**Pseudocode GRAM – SCHMIDT/classic**

input  $n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$q_1 = a_1 / \|a_1\|$

for  $k = 2, 3, \dots, n$  do

$\tilde{q}_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i$

$q_k = \tilde{q}_k / \|\tilde{q}_k\|$

end

output  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$

Դժվար չէ հաշվել, որ ալգորիթմի թվային իրականացումը պահանջում է  $\sim \frac{3}{2}n^3$  թվաբանական գործողություն:

Նկարագրված ալգորիթմը, իր դասական տարբերակով, կայուն չէ սխալանքների կուտակման նկատմամբ (տե՛ս, օրինակ, [47, 77]): Արդյունքում (7.5.2) «օրթոնորմալ» համակարգը կարող է ամենևին էլ օրթոգոնալ չլինել: Այդպիսի երևույթի կարելի է հանդիպել, մասնավորապես, երբ (7.5.1) տարրերի համակարգը համարյա գծորեն կախված է:

**Օրինակ 7.5.1 :** Գիտարկենք

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\varepsilon > 0)$$

գծորեն անկախ վեկտորները: Վերցնելով  $\varepsilon = 10^{-8}$ , հաշվումների արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \end{bmatrix} :$$

Այստեղ  $(q_2, q_3) \approx 0.5$ , ինչը շատ հեռու է օրթոգոնալությունից:  $\diamond$

## 7.5.2 Գրամ-Շմիդտի վերափոխված ալգորիթմը

Օրթոգոնալացման դասական ալգորիթմի անկայունությունը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ սխալանքների կուտակման հետևանքով հաջորդաբար ստացվող  $q_k$  տարրերը իրականում օրթոգոնալ չեն: Այդ երևույթը ի հայտ է գալիս հատկապես այն դեպքում, երբ ելակետային տարրերը համարյա գծորեն կախված են: Գոյություն ունի նշված թերությունից զուրկ ալգորիթմ, որի կառուցման ժամանակ չի օգտագործվում արդեն հաշվված տարրերի օրթոգոնալությունը: Այդ դեպքում  $q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$  տարրերի ստացման ընթացքում առաջացած սխալանքները արդեն էապես չեն ազդում  $q_k$  տարրի հաշվման վրա: Ստորև բերվող այդպիսի ալգորիթմը դասականից տարբերվում է հաշվումների կատարման այլ հերթականությամբ:

**Pseudocode GRAM – SCHMIDT/modified**

```
input  $n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
for  $k = 1, 2, \dots, n$  do
     $a_k = a_k / \|a_k\|$ 
    for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
         $a_j = a_j - (a_j, a_k)a_k$ 
    end
end
output  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
```

Հատուկ նշենք, որ օրթոգոնալացման եղանակի այս տարբերակում ձևափոխված տարրերը տեղադրվում են ելակետային տարրերի տեղը: Անմիջական հաշվարկները ցույց են տալիս, որ վերափոխված ալգորիթմը պահանջում է  $\sim 2n^3$  թվաբանական գործողություն:

**Օրինակ 7.5.2 :** Դիտարկենք 7.5.1 օրինակի ելակետային վեկտորները: Ինչպես և այնտեղ, վերցնենք  $\varepsilon = 10^{-8}$ : Վերափոխված ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{bmatrix} :$$

Անմիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ ստացված համակարգը օրթոնորմալ է (համենայն դեպս, հաշվարկների ճշտության շրջանակներում):  $\diamond$

### 7.5.3 Մատրիցի $QR$ - վերլուծությունը

Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ընթացքը բերում է մատրիցների մի շատ կարևոր վերլուծության, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ հաշվողական գծային հանրահաշվում (տե՛ս [9, 60, 76, 77]): Այստեղ մենք կստանանք այդ վերլուծությունը և կնկարագրենք դրա կիրառություններից մեկը:

Վերը արտածված (7.5.3)–(7.5.7) բանաձևերի հիման վրա (7.5.1) ելակետային տարրերը կարելի է արտահայտել (7.5.2) օրթոնորմալ համակարգի տարրերի միջոցով, այն է՝

$$\begin{aligned} a_1 &= r_{11}q_1 \\ a_2 &= r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \\ &\vdots \\ a_n &= r_{1n}q_1 + r_{2n}q_2 + \cdots + r_{n-1n}q_{n-1} + r_{nn}q_n : \end{aligned} \tag{7.5.8}$$

Այս հավասարություններում  $r_{ik}$  գործակիցները հաշվվում են հետևյալ կերպ.

$$r_{11} = \|a_1\|, \tag{7.5.9}$$

իսկ  $k = 2, 3, \dots, n$  արժեքների համար՝

$$r_{ik} = -\alpha_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad r_{kk} = \|\tilde{q}_k\| : \tag{7.5.10}$$

Մասնավորապես, ստանում ենք, որ  $r_{kk} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

Հաշվի առնելով (7.5.9) և (7.5.10) բանաձևերը **GRAM-SCHMIDT/classic** ալգորիթմը կարելի է կազմակերպել այնպես, որ նա արտադրի ինչպես  $q_i$  օրթոնորմալ տարրերը, այնպես էլ  $r_{ik}$  գործակիցները:

**Pseudocode GRAM – SCHMIDT/classic+**

```

input  $n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
 $r_{11} = \|a_1\|$ 
 $q_1 = a_1/r_{11}$ 
for  $k = 2, 3, \dots, n$  do
  for  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  do
     $r_{ik} = (a_k, q_i)$ 
  end
   $\tilde{q}_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}q_i$ 
   $r_{kk} = \|\tilde{q}_k\|$ 
   $q_k = \tilde{q}_k/r_{kk}$ 
end
output  $(r_{ik}), (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 

```

Նման ձևով կարելի է ձևափոխել նաև **GRAM-SCHMIDT/modified** ալգորիթմը:

**Pseudocode GRAM – SCHMIDT/modified+**

```

input  $n, (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
for  $k = 1, 2, \dots, n$  do
   $r_{kk} = \|a_k\|$ 
   $a_k = a_k/r_{kk}$ 
  for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  do
     $r_{kj} = (a_j, a_k)$ 
     $a_j = a_j - r_{kj}a_k$ 
  end
end
output  $(r_{kj}), (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 

```

Դիցուք ունենք  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  չվերասերված մատրիցը՝

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ՝ մատրիցի սյունակներ են): Քանի որ մատրիցը չվերասերված է, ապա նրա սյունակները կազմում են գծորեն անկախ համակարգ: Կիրառենք  $a_1, a_2, \dots, a_n$  համակարգի նկատմամբ Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ընթացքը: Արդյունքում կստանանք  $q_1, q_2, \dots, q_n$  օրթոնորմալ համակարգը, ընդ որում տեղի կունենան (7.5.8) հավասարությունները: Կազմենք

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

մատրիցները: Ըստ 3.3.4 թեորեմի  $Q$  մատրիցն օրթոգոնալ է, այսինքն՝  $Q^{-1} = Q^T$ : Հեշտ է ստուգել, որ (7.5.8) հավասարությունները կարելի է գրել  $A = QR$  տեսքով: Ամփոփելով կատարված դատողությունները՝ հանգում ենք հետևյալ պնդմանը:

**Թեորեմ 7.5.1 :** *Կամայական  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  չվերասերված մատրից ներկայացվում է*

$$A = QR \tag{7.5.11}$$

*արտադրյալի տեսքով, որտեղ  $Q$ -ն օրթոգոնալ մատրից է, իսկ  $R$ -ը դրական անկյունագծային տարրերով վերին եռանկյուն մատրից է:*

Մատրիցի  $QR$ -վերլուծությունը կարելի է կիրառել գծային հանրահաշվական համակարգերը լուծելիս: Եթե հայտնի է  $A$  մատրիցի (7.5.11) վերլուծությունը, ապա

$$Ax = b$$

համակարգի լուծումը ակնհայտորեն հանգում է վերին եռանկյուն մատրիցով

$$Rx = Q^T b$$

համակարգի լուծմանը: Այս եղանակը գրավիչ է նաև պայմանավորվածության տեսակետից: Ավելի ճշգրիտ, տեղի ունի

$$\kappa_2(R) = \kappa_2(A) \tag{7.5.12}$$

հավասարությունը: Իրոք, հաշվի առնելով (4.2.8) անհավասարությունը և օրթոգոնալ մատրիցների (4.2.11) հատկությունը, ստանում ենք՝

$$\kappa_2(A) \leq \kappa_2(Q) \kappa_2(R) = \kappa_2(R) :$$

Մյուս կողմից, քանի որ  $R = Q^T A$ , ունենք

$$\kappa_2(R) \leq \kappa_2(Q^T) \kappa_2(A) = \kappa_2(A) :$$

Ստացված անհավասարություններից հետևում է (7.5.12) հավասարությունը:

## 7.6 Միջին քառակուսային մոտարկումներ

Գիտարկենք հայտնի  $L_2[a, b; p]$  հիլբերտյան տարածությունը: Այդ տարածությանը պատկանում են

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx < +\infty$$

պայմանին բավարարող  $f(x)$  ֆունկցիաները, որտեղ  $p(x) \geq 0$  կշռային ֆունկցիա է (կամ ուղղակի կշիռ), որն ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում և կարող է 0 արժեք ընդունել

այդ հատվածի ոչ ավելի, քան զրո չափի ենթաբազմության վրա (տե՛ս [26, 29, 40]): Սկալյար արտադրյալը և նորմը այդ տարածությունում որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$(f, g) \equiv \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx, \quad \|f\| \equiv \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x) dx} :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ բավարարված են սկալյար արտադրյալի և նորմի բոլոր հատկությունները, եթե հավասար համարենք իրարից ոչ ավելի քան զրո չափի բազմության վրա տարբերվող ֆունկցիաները:

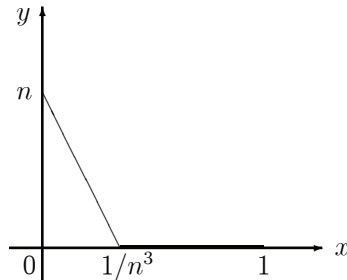
Մոտարկումները  $L_2[a, b; p]$  տարածության մեջ կոչվում են *միջին քառակուսային մոտարկումներ*: Համապատասխանաբար,  $\|f - g\|$  նորմը  $f(x)$  և  $g(x)$  ֆունկցիաների *միջին քառակուսային շեղումն է*:

Եթե  $p(x) \equiv 1$ , ապա համապատասխան տարածությունը կնշանակենք  $L_2[a, b]$ -ով:

Ուշադրություն դարձնենք այն փաստին, որ երկու անընդհատ ֆունկցիաների մոտիկությունը  $L_2[a, b; p]$  տարածության նորմի իմաստով չի երաշխավորում դրանց մեծագույն շեղման փոքրությունը: Օրինակ, վերցնենք  $L_2[0, 1]$  տարածության մեջ  $g(x) \equiv 0$  և

$$f(x) = \begin{cases} -n^4x + n, & \text{եթե } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3}, \\ 0, & \text{եթե } \frac{1}{n^3} < x \leq 1 \end{cases}$$

ֆունկցիաները (նկ. 7.6.1):



**Նկ. 7.6.1**  $f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը

Ունենք

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^{1/n^3} f^2(x) dx} \leq \sqrt{n^2 \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} :$$

Այսպիսով,  $n$ -ի ընտրության հաշվին  $f(x)$  և  $g(x)$  ֆունկցիաների միջին քառակուսային շեղումը կարելի է դարձնել որքան ասես փոքր, մինչդեռ  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$  մեծությունը կարող է լինել որքան ասես մեծ:

### 7.6.1 Լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ

Վերհիշենք, որ 7.2 պարագրաֆում  $H_n$ -ով մենք նշանակել ենք իրական գործակիցներով  $n$  աստիճանից ոչ բարձր հանրահաշվական բազմանդամների դասը: Պարզ է, որ  $H_n$ -ը  $L_2[a, b; p]$  տարածության  $(n + 1)$ -չափանի ենթատարածություն է: Որպես բազիս այդ տարածության մեջ կարելի է վերցնել

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x) = x, \dots, \varphi_n(x) = x^n \quad (7.6.1)$$

Ֆունկցիաների համակարգը: Նշենք, որ բազմանդամի ստանդարտ գրառումը ըստ էության այդ բազմանդամի վերլուծությունն է ըստ (7.6.1) ֆունկցիաների: Համաձայն այս գլխում ներմուծված գաղափարի՝  $P_n(x) \in H_n$  բազմանդամը, որի համար

$$\|f - P_n\| = \rho(f, H_n) = \inf_{R_n(x) \in H_n} \|f - R_n\|,$$

կոչվում է *լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ*  $f(x) \in L_2[a, b; p]$  ֆունկցիայի համար: Քանի որ  $L_2[a, b; p]$  տարածությունը հիլբերտյան է, ապա այդ բազմանդամը գոյություն ունի և միակն է:

Դիցուք

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

բազմանդամը լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ է  $f(x)$  ֆունկցիայի համար: Ըստ 7.4 պարագրաֆում մշակված ընդհանուր տեսության՝ նրա գործակիցները որոշվում են

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_j, \varphi_i) a_j = (f, \varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (7.6.2)$$

նորմալ համակարգից, որտեղ

$$(\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b p(x) x^{i+j} dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

$$(f, \varphi_i) = \int_a^b p(x) f(x) x^i dx, \quad i = 0, 1, \dots, n :$$

**Օրինակ 7.6.1 :** Պահանջվում է  $f(x) = \sqrt{x}$  ֆունկցիայի համար  $[0, 1]$  հատվածում գտնել  $P_1(x) = a_0 + a_1 x$  լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ (կշիռ  $p(x) \equiv 1$ ):

Ունենք

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}, \quad (f, \varphi_1) = \int_0^1 \sqrt{x} x dx = \frac{2}{5} :$$

Ստանում ենք նորմալ համակարգ

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{2}{5} : \end{cases}$$

Այդ համակարգի լուծումը հետևյալն է.  $a_0 = 4/15$ ,  $a_1 = 4/5$ : Այսպիսով,  
 $P_1(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} x$ , ընդ որում՝

$$\|f - P_1\| = \sqrt{\int_0^1 \left( \sqrt{x} - \frac{4}{15} - \frac{4}{5} x \right)^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{30} : \quad \diamond$$

Սակայն այդ ճանապարհը  $n$ -ի մեծ արժեքների դեպքում գործնականում առաջացնում է բարդություններ՝ 7.4 պարագրաֆում բերված պատճառներով: Օրինակ, հեշտ է տեսնել, որ  $L_2[0, 1]$  տարածության դեպքում (7.6.2) նորմալ համակարգի մատրիցը մեզ արդեն հայտնի (7.4.8) Հիլբերտի մատրիցն է: Ուստի խնդիրը էսպես կհեշտանա, եթե  $H_n$  ենթատարածությունում կառուցենք օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ:

## 7.6.2 Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգեր

Նախորդ պարագրաֆում նկարագրված Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմը թույլ է տալիս կամայական  $n$ -ի համար աստիճանային ֆունկցիաների (7.6.1) գծորեն անկախ համակարգը ձևավոխել

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)$$

բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգի: Ընդ որում, ինչպես դժվար չէ նկատել այդ ալգորիթմից,  $Q_k(x)$ -ը ճիշտ  $k$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է:

Նշենք օրթոգոնալ բազմանդամների որոշ հատկություններ: Գիտարկենք

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots \quad (7.6.3)$$

օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը, որտեղ  $Q_k(x)$ -ը ճիշտ  $k$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:



**Լեմմա 7.6.1 :** *Օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը միակն է հաստատուն բազմապատկիչների ճշտությամբ :*

Ապացույց: Դիցուք (7.6.3) համակարգի հետ մեկտեղ գոյություն ունի մեկ այլ օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ

$$R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots,$$

որտեղ  $R_k(x)$ -ը ճիշտ  $k$ -րդ աստիճանի բազմանդամ է: Նախ ցույց տանք, որ  $(Q_k, R_m) = 0$ , երբ  $k \neq m$ : Առանց ընդհանրության սահմանափակման համարենք, որ  $k > m$ : Պարզ է, որ  $R_m(x)$  բազմանդամը միարժեքորեն ներկայացվում է

$$R_m(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j Q_j(x) \quad (7.6.4)$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$(Q_k, R_m) = \left( Q_k, \sum_{j=0}^m \alpha_j Q_j \right) = \sum_{j=0}^m \alpha_j (Q_k, Q_j) = 0 :$$

Այժմ ցույց տանք, որ (7.6.4) ներկայացման մեջ  $\alpha_j$  գործակիցները, երբ  $j < m$ , հավասար են զրոյի: Իրոք,

$$0 = (Q_j, R_m) = \left( Q_j, \sum_{i=0}^m \alpha_i Q_i \right) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (Q_j, Q_i) = \alpha_j (Q_j, Q_j) :$$

Քանի որ  $(Q_j, Q_j) \neq 0$ , ապա  $\alpha_j = 0$ : Այսպիսով,

$$R_m(x) = \alpha_m Q_m(x) : \quad \square$$

**Գիտողություն 7.6.1 :** *Եթե օրթոգոնալ բազմանդամների վրա դնենք լրացուցիչ պայմաններ, պահանջելով, օրինակ, որ ավագ անդամի գործակիցը հավասար լինի մեկի կամ, որ ավագ անդամի գործակիցը լինի դրական, իսկ բազմանդամի նորմը հավասար լինի մեկի, ապա օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը  $[a, b]$  հատվածում տրված  $p(x)$  կշռի դեպքում միակն է՝ բառի բուն իմաստով :*

Եթե օրթոգոնալ բազմանդամների (7.6.3) համակարգը կառուցված է, ապա  $f(x) \in L_2[a, b; p]$  ֆունկցիայի համար  $P_n(x) \in H_n$  լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը կգրվի

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k Q_k(x) \quad (7.6.5)$$

տեսքով, որտեղ  $c_k$  գործակիցները հաշվվում են 7.4 պարագրաֆում շարադրած ընդհանուր տեսության հիման վրա՝

$$c_k = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (7.6.6)$$

բանաձևով: Գծվար չէ ստանալ նաև արտահայտություն  $\rho(f, H_n)$  մեծության համար.

$$\rho(f, H_n) = \|f - P_n\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2(Q_k, Q_k)},$$

որը համանման է (7.4.14) արտահայտությանը:

Նշենք օրթոգոնալ բազմանդամների ևս երկու կարևոր հատկություն:

**Լեմմա 7.6.2 :** *Օրթոգոնալ համակարգի  $Q_n(x)$  բազմանդամը, երբ  $n \geq 1$ , օրթոգոնալ է  $H_{n-1}$  դասի ցանկացած բազմանդամի:*

Ապացույց: Կամայական  $R_{n-1}(x) \in H_{n-1}$  բազմանդամ կարելի է գրել

$$R_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j(x)$$

տեսքով: Հետևաբար

$$(Q_n, R_{n-1}) = \left( Q_n, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (Q_n, Q_j) = 0 : \quad \square$$

**Լեմմա 7.6.3 :** *Օրթոգոնալ համակարգի  $Q_n(x)$  բազմանդամը, երբ  $n \geq 1$ , ունի ճիշտ  $n$  հատ արմատ  $(a, b)$  միջակայքում:*

Ապացույց: Քանի որ

$$(Q_n, Q_0) = \int_a^b p(x) Q_n(x) Q_0(x) dx = 0,$$

սպա  $Q_n(x)$  բազմանդամը  $(a, b)$  միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  կետերը  $Q_n(x)$  բազմանդամի  $(a, b)$  միջակայքին պատկանող կենտ պատիկության արմատներ են: Պարզ է, որ  $m \leq n$ : Կազմենք

$$R_m(x) \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$$

բազմանդամը: Դրանով  $Q_n(x)R_m(x)$  բազմանդամի  $(a, b)$  միջակայքին պատկանող բոլոր արմատները ունեն գույգ պատիկություն: Ուստի

$$\int_a^b p(x) Q_n(x) R_m(x) dx \neq 0,$$

և հիմնվելով 7.6.2 լեմմաի վրա՝ կարող ենք ասել, որ  $m \geq n$ : Այսպիսով,  $m = n$ :  $\square$

Ինչպես արդեն նշվել է, օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը կարելի է կառուցել օգտագործելով Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմը: Սակայն նույն համակարգը կարելի է ստանալ նաև մեկ այլ եղանակով: Պարզվում է, որ օրթոգոնալ բազմանդամները բավարարում են պարզ անդրադարձ առնչությունների:

Քանի որ  $x Q_n(x)$  բազմանդամի աստիճանը հավասար է  $(n + 1)$ -ի, ապա այն կարելի է ներկայացնել

$$x Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j Q_j(x) \quad (7.6.7)$$

տեսքով: Այստեղից, երբ  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ , ստանում ենք

$$(x Q_n, Q_i) = (Q_n, x Q_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i)$$

հավասարությունը: Քանի որ  $x Q_i(x)$  բազմանդամի աստիճանը չի գերազանցում  $(n - 1)$ -ը, ապա ըստ 7.6.2 լեմմայի  $(Q_n, x Q_i) = 0$ , և

$$0 = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) = \alpha_i (Q_i, Q_i)$$

հավասարությունից հետևում է, որ  $i = 0, 1, \dots, n - 2$  արժեքների համար  $\alpha_i = 0$ : Այսպիսով, (7.6.7)-ից ստանում ենք

$$x Q_n(x) = \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) + \alpha_n Q_n(x) + \alpha_{n+1} Q_{n+1}(x)$$

կամ

$$\alpha_{n+1} Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x) Q_n(x) + \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (7.6.8)$$

Այս առնչությունից անմիջապես ստանում ենք արտահայտություններ  $\alpha_{n-1}$ ,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_{n+1}$  գործակիցների համար.

$$\alpha_{n-1} = \frac{(x Q_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}, \quad \alpha_n = \frac{(x Q_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{(x Q_n, Q_{n+1})}{(Q_{n+1}, Q_{n+1})} : \quad (7.6.9)$$

Ստացված անդրադարձ առնչությունները կարելի է օգտագործել օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգի կառուցման համար: Օրինակ,  $p(x) \equiv 1$  դեպքում օրթոգոնալ բազմանդամները, որոնց ավագ անդամի գործակիցը հավասար է մեկի, կառուցվում են

$$Q_0(x) \equiv 1, \quad Q_1(x) = x - \frac{a+b}{2}, \quad (7.6.10)$$

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) Q_n(x) - \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

բանաձևերով, որտեղ  $\alpha_{n-1}$  և  $\alpha_n$  գործակիցները որոշվում են ըստ (7.6.9) բանաձևերի:

Բազմանդամների օրթոնորմալ համակարգը կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}
 Q_0(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}, & Q_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{(b-a)^{3/2}}(2x-b-a), \\
 Q_{n+1}^*(x) &= (x-\beta_n)Q_n(x) - \beta_{n-1}Q_{n-1}(x), \\
 \beta_{n-1} &= (xQ_n, Q_{n-1}), & \beta_n &= (xQ_n, Q_n), \\
 Q_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(Q_{n+1}^*, Q_{n+1}^*)}}Q_{n+1}^*(x), & n &= 1, 2, \dots :
 \end{aligned}
 \tag{7.6.11}$$

Վերջում բերենք հաճախ օգտագործվող օրթոգոնալ բազմանդամների օրինակներ: Այդ բազմանդամների օրթոգոնալության ապացույցը, ինչպես նաև անդրադարձ առնչությունների արտածումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- Լեժանդրի բազմանդամները տրվում են

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{7.6.12}$$

բանաձևով և  $[-1, 1]$  հատվածում կազմում են  $p(x) \equiv 1$  կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Այդ բազմանդամների համար (7.6.8) անդրադարձ առնչությունները ընդունում են հետևյալ տեսքը.

$$(n+1)\mathcal{L}_{n+1}(x) - (2n+1)x\mathcal{L}_n(x) + n\mathcal{L}_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots : \tag{7.6.13}$$

- Առաջին սեռի Չեբիշևի բազմանդամները տրվում են

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots \tag{7.6.14}$$

բանաձևով և  $[-1, 1]$  հատվածում կազմում են  $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Այդ բազմանդամներին մենք նախկինում արդեն հանդիպել ենք 6.3 պարագրաֆում, որտեղ դրանք սահմանվել են

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &\equiv 1, & T_1(x) &= x, \\
 T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{7.6.15}$$

անդրադարձ առնչություններով:

- Երկրորդ սեռի Չեբիշևի բազմանդամները որոշվում են

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{7.6.16}$$

բանաձևով և  $[-1, 1]$  հատվածում կազմում են  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$  կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Դրանց համար (7.6.8) անդրադարձ առնչությունները գրվում են հետևյալ տեսքով.

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.6.17)$$

- Հերմիտի բազմանդամները տրվում են

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.6.18)$$

բանաձևով և  $(-\infty, \infty)$  ամբողջ թվային առանցքի վրա կազմում են  $p(x) = e^{-x^2}$  կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Դրանք բավարարում են

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.6.19)$$

անդրադարձ առնչություններին:

## 7.7 Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը

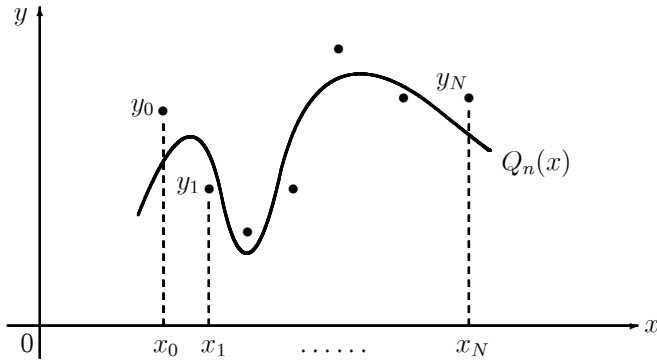
Դիցուք  $y = f(x)$  ֆունկցիան տրված է աղյուսակով, այսինքն՝ հայտնի են այդ ֆունկցիայի  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  արժեքները ինչ-որ  $x_0, x_1, \dots, x_N$  կետերում, որոնք կանվանենք *հանգույցներ*: Տարբեր նպատակներով երբեմն անհրաժեշտ է լինում գտնել, թեկուզ մոտավոր, այդ ֆունկցիայի անալիտիկ ներկայացումը: Եղանակներից մեկը ինտերպոլացիան է: Սակայն այդ մոտեցումը չի կարելի համարել առավել հաջող հետևյալ երկու պատճառով: Եթե հանգույցների թիվը մեծ է, ապա համապատասխանաբար մեծ կլինի նաև ինտերպոլացիոն բազմանդամի աստիճանը և, որպես հետևանք, մեծաժավալ կլինի այդ բազմանդամի արտահայտությունը: Բացի այդ, եթե ֆունկցիայի արժեքները պարունակում են պատահական սխալանքներ, օրինակ, չափման սխալանքներ, ապա կորի ճշգրիտ անցնելու պահանջը հարթության  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  կետերով իմաստագրկվում է:

Չնակերպենք հետևյալ խնդիրը. *գտնել այնպիսի  $Q_n(x) \in H_n$  բազմանդամ, որ*

$$\sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - Q_n(x_i)]^2 = \min_{P_n(x) \in H_n} \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2, \quad (7.7.1)$$

*որտեղ  $\omega_i > 0$  կշիռն է  $x_i$  հանգույցում:*

Աղյուսակով տրված ֆունկցիաների մոտարկման այդպիսի եղանակը կոչվում է *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ*:



**Նկ. 7.7.1** Մոտարկում ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի

Ներմուծենք

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2 \tag{7.7.2}$$

ֆունկցիան, որտեղ  $a_0, a_1, \dots, a_n$  փոփոխականները

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

բազմանդամի գործակիցներն են: Այսպիսով (7.7.1) խնդրի լուծումը հանգում է  $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$  ֆունկցիայի մինիմումի կետի որոշմանը: Այսինքն, պետք է գտնել այնպիսի  $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$  կետ, որ

$$\Phi(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*) = \min_{a_0, a_1, \dots, a_n} \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) : \tag{7.7.3}$$

Հետագայում  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  կետը կդիտարկենք որպես  $\mathbf{R}^{n+1}$  վեկտորական տարածության տարր՝ ընդունելով  $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$ : Այդ դեպքում (7.7.3) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\Phi(a^*) = \min_{a \in \mathbf{R}^{n+1}} \Phi(a) \equiv \Phi_{min} : \tag{7.7.4}$$

Եթե  $n = N$ , ապա (7.7.1) խնդրի լուծումը  $L_N(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամն է, որի համար

$$L_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N :$$

Պարզ է, որ այդ դեպքում  $\Phi_{min} = 0$ : Այսինքն, մեր խնդիրը փաստորեն ձևափոխվում ինտերպոլացիայի խնդրի: Ավելին, իմաստ չունի վերցնել  $n > N$ : Ուստի հետագայում կենթադրենք, որ  $n < N$ :

Եթե  $x_0, x_1, \dots, x_N$  հանգույցների բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների ստարածությունում ներմուծենք սկալյար արտադրյալ և նորմ՝

$$(f, g) \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i f(x_i)g(x_i), \quad \|f\| \equiv \sqrt{\sum_{i=0}^N \omega_i f^2(x_i)}, \quad (7.7.5)$$

սպա (7.7.1) (կամ (7.7.4)) խնդիրը կարելի է լուծել 7.4 պարագրաֆում նկարագրված ընդհանուր մեթոդի կիրառմամբ: Սակայն այստեղ մենք ցույց կտանք, թե ինչպես այլ դատողությունների միջոցով ևս կարելի է ստանալ նորմալ համակարգ:

Նախ և առաջ ստանանք (7.7.2)-ում որոշված  $\Phi(a)$  ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտությունը: Ունենք

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \sum_{i=0}^N \omega_i \left[ y_i - \sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right]^2 = \sum_{i=0}^N \omega_i \left[ y_i^2 - 2y_i \sum_{k=0}^n a_k x_i^k + \sum_{k,m=0}^n a_k a_m x_i^{k+m} \right] \\ &= \sum_{k,m=0}^n \left( \sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^N \omega_i y_i x_i^k \right) a_k + \sum_{i=0}^N \omega_i y_i^2 : \end{aligned}$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$s_{km} \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m}, \quad t_k \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i y_i x_i^k, \quad r \equiv \sum_{i=0}^N \omega_i y_i^2 : \quad (7.7.6)$$

Այդ դեպքում

$$\Phi(a) = \sum_{k,m=0}^n s_{km} a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^n t_k a_k + r = (Sa, a) - 2(t, a) + r, \quad (7.7.7)$$

որտեղ  $S = [s_{km}]_{k,m=0}^n$ -ը սիմետրիկ մատրից է, իսկ  $t = [t_0, t_1, \dots, t_n]^T$ : Սահմանումից հետևում է, որ  $\Phi(a)$ -ն ոչ բացասական և ըստ իր արգումենտների անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Այդ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը գտնելու համար հաշվենք նրա մասնական ածանցյալները: Ելնելով ֆունկցիայի (7.7.7) արտահայտությունից՝ ունենք

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2 \sum_{m=0}^n s_{km} a_m - 2t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n :$$

Հավասարեցնելով ստացված արտահայտությունները զրոյի (տե՛ս [62], էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը), կտանանք

$$\sum_{m=0}^n s_{km} a_m = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (7.7.8)$$

հավասարումների *նորմալ համակարգը*, որը կարելի է գրել նաև

$$Sa = t \quad (7.7.9)$$

տեսքով:

**Լեմմա 7.7.1 :** Նորմալ համակարգի  $S$  մատրիցը դրական որոշյալ է:

Ապացույց: Վերցնենք կամայական ոչ գրոյական  $a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$  վեկտոր: Օգտվելով  $S$  մատրիցի  $s_{km}$  տարրերի համար (7.7.6) արտահայտությունից՝ ունենք

$$(Sa, a) = \sum_{k,m=0}^n s_{km} a_k a_m = \sum_{k,m=0}^n \left( \sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m =$$

$$\sum_{i=0}^N \omega_i \left( \sum_{k=0}^n a_k x_i^k \right) \left( \sum_{m=0}^n a_m x_i^m \right) = \sum_{i=0}^N \omega_i P_n^2(x_i) :$$

Քանի որ  $n < N$ , ապա  $P_n(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  արժեքները չեն կարող միաժամանակ հավասար լինել գրոյի: Հետևաբար  $(Sa, a) > 0$ :  $\square$

Այսպիսով, քանի որ  $S$  մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա (7.7.9) նորմալ համակարգը միարժեքորեն լուծելի է: Գիցուք  $a^* = [a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*]^T$  վեկտորը (7.7.9) համակարգի լուծումն է: Հեշտ է տեսնել, որ  $a^*$ -ը  $\Phi(a)$  ֆունկցիայի մինիմումի կետն է: Իրոք,  $a^*$ -ից տարբեր կամայական  $a \in \mathbf{R}^{n+1}$  վեկտորի համար ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} \Phi(a) - \Phi(a^*) &= (Sa, a) - 2(t, a) - (Sa^*, a^*) + 2(t, a^*) \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) - (Sa^*, a^*) + 2(Sa^*, a^*) = \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) + (Sa^*, a^*) = (S(a - a^*), (a - a^*)) > 0 : \end{aligned}$$

Ընդ որում՝

$$\Phi_{min} = \Phi(a^*) = -(t, a^*) + r :$$

Այսպիսով,

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* x^k$$

բազմանդամը (7.7.1) խնդրի միակ լուծումն է:

Գրենք (7.7.9) հավասարումների նորմալ համակարգը այլ տեսքով: Գրա համար ներմուծենք

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad D = \begin{bmatrix} \omega_0 & & & & \\ & \omega_1 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_N \end{bmatrix}$$

մատրիցները՝ համապատասխանաբար  $(N+1) \times (n+1)$  և  $(N+1) \times (N+1)$  չափերի: Հաշվի առնելով (7.7.6) բանաձևերը, կարող ենք գրել

$$S = U^T D U, \quad t = U^T D y,$$

որտեղ  $y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$ : Մրանց միջոցով (7.7.9) համակարգը կգրվի հետևյալ կերպ.

$$U^T D U a = U^T D y : \quad (7.7.10)$$



Նշենք, որ (7.7.9) նորմալ համակարգը լուծելիս այստեղ նույնպես ծագում են բարդություններ կապված հաշվողական անկայունության հետ, ինչն արդեն քննարկվել է 7.4 և 7.6 պարագրաֆներում: Դա բնական է, քանի որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով մոտարկումը ըստ էության միջին քառակուսային մոտարկման դիսկրետ նմանակն է: Օրինակ, եթե  $\omega_i = 1, i = 0, 1, \dots, N$ , ապա  $[0, 1]$  հատվածում հանգույցների հավասարաչափ բաշխման դեպքում՝  $x_i = i/N, i = 0, 1, \dots, N$ , համաձայն (7.7.6) բանաձևերի՝ ունենք

$$s_{km} = \sum_{i=0}^N x_i^{k+m} \approx N \int_0^1 x^{k+m} dx = N \cdot \frac{1}{k+m+1} :$$

Այսինքն,  $N$ -ի աճման հետ մեկտեղ (7.7.9) նորմալ համակարգի  $S$  մատրիցը ասիմպտոտորեն ( $N$  բազմապատկչի ճշտությամբ) ձգտում է  $(n+1)$ -րդ կարգի Հիլբերտի մատրիցին:

Նորմալ համակարգի լուծման հետ կապված անախորժությունները, որոնք առաջանում են  $n$ -ի մեծ արժեքների դեպքում, կարելի է շրջանցել, եթե օգտագործենք օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը՝ սկալյար արտադրյալի (7.7.5) իմաստով (տե՛ս, օրինակ, [5, 9, 41]): Այդպիսի համակարգի կառուցման մեթոդը համանման է 7.6 պարագրաֆում շարադրված մեթոդին, որը հիմնված է անդրադարձ առնչությունների վրա (տե՛ս [41]):

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը գործնականում լայնորեն կիրառվում է փորձարարական տվյալների մշակման համար: Այն դեպքերում, երբ  $y_i$  մեծությունները ունեն տարբեր ճշտություն, համապատասխան  $\omega_i$  կշիռները հաճախ կապում են  $\varepsilon_i$  չափման ճշտության հետ (օրինակ, վերցնում են  $\omega_i = \varepsilon_i^{-2}$ ): Այդ դեպքում կորը ավելի լավ կմոտարկի այն փորձարարական կետերը, որոնց կշիռն ավելի մեծ է:

## 7.8 Գծայնացման եղանակը

Ինչպես արդեն ասվել է, փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը հաճախ կիրառվում է փորձարարական տվյալների գրաֆիկական ներկայացման համար: Օրինակ, 1601 թվականին գերմանացի աստղագետ Յոհան Կեպլերը ձևակերպել է մոլորակների շարժման երրորդ օրենքը՝  $T = Cx^{3/2}$ , որտեղ  $x$ -ը միլիոն կիլոմետրերով չափվող մոլորակի հեռավորությունն է Արեգակից,  $T$ -ն նրա օրերով չափվող ուղեծրային պարբերությունն է, իսկ  $C$ -ն հաստատուն է: Արեգակնային համակարգի առաջին չորս մոլորակների՝ Մերկուրիի, Վեներայի, Երկրի և Մարսի համար  $(x, T)$  տվյալների զույգերի դիտումները տվել են համապատասխանաբար (58, 88), (108, 225), (150, 365) և (228, 687) արդյունքները: Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը՝ Յ. Կեպլերը ստացել է  $C = 0.199769$  գործակցի արժեքը:

Իհիսուս ունենք  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$  փորձարարական տվյալները, և մոտարկող ֆունկցիան փնտրվում է  $f(x) = Cx^p$  տեսքով, որտեղ  $p$ -ն տրված հաստատուն է: Պետք է որոշել

$C$  պարամետրը: Ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի՝  $C$ -ն որոշվում է

$$E(C) = \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - Cx_i^p]^2$$

Ֆունկցիայի մինիմումի պայմանից: Տվյալ դեպքում բավական է լուծել  $E'(C) = 0$  հավասարումը: Գտնենք  $E(C)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$E'(C) = 2 \sum_{i=0}^N \omega_i [Cx_i^{2p} - x_i^p y_i] :$$

Ստանում ենք

$$C = \frac{\sum_{i=0}^N \omega_i x_i^p y_i}{\sum_{i=0}^N \omega_i x_i^{2p}} :$$

Սակայն միշտ չէ, որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի խնդիրը հանգում է գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը: Ենթադրենք, պետք է կատարել փորձարարական տվյալների հարմարեցումը

$$y = be^{ax}, \quad b > 0 \quad (7.8.1)$$

տեսքի կորի միջոցով: Պահանջվում է գտնել

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^N \omega_i [y_i - be^{ax_i}]^2$$

ֆունկցիայի մինիմումը: Այդ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները հավասար են

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^N \omega_i [be^{ax_i} - y_i](bx_i e^{ax_i}),$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^N \omega_i [be^{ax_i} - y_i](e^{ax_i}) :$$

Եթե այդ ածանցյալները հավասարեցնենք զրոյի, ապա արդյունքում կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{aligned} b \sum_{i=0}^N \omega_i x_i e^{2ax_i} - \sum_{i=0}^N \omega_i x_i y_i e^{ax_i} &= 0, \\ b \sum_{i=0}^N \omega_i e^{2ax_i} - \sum_{i=0}^N \omega_i y_i e^{ax_i} &= 0 : \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

Այսպիսով, մեր խնդիրը բերվեց ոչ գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը: Այդ համակարգը կարելի է լուծել, օրինակ, Նյուտոնի մեթոդով: Դրա համար պետք են  $a$  և  $b$  անհայտների բավականին լավ սկզբնական մոտարկումներ:

Սակայն գոյություն ունի մի հնարք, որի միջոցով հնարավոր է գծայնացնել խնդիրը: Դրա համար լոգարիթմենք (7.8.1) առնչության երկու կողմը.

$$\ln y = ax + \ln b :$$

Այնուհետև կատարենք փոփոխականների փոխարինում.

$$X = x, \quad Y = \ln y, \quad A = a, \quad B = \ln b : \tag{7.8.3}$$

Արդյունքում կստանանք առնչություն  $X$  և  $Y$  մեծությունների միջև՝

$$Y = AX + B : \tag{7.8.4}$$

Նշենք միայն, որ  $xy$  հարթության  $(x_i, y_i)$  կետերը ձևափոխվում են  $XY$  հարթության  $(X_i, Y_i)$  կետերի: Նորմալ համակարգը  $A$  և  $B$  պարամետրերի որոշման համար հետևյալն է.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^N \omega_i X_i^2 \right) A + \left( \sum_{i=0}^N \omega_i X_i \right) B &= \sum_{i=0}^N \omega_i X_i Y_i, \\ \left( \sum_{i=0}^N \omega_i X_i \right) A + \left( \sum_{i=0}^N \omega_i \right) B &= \sum_{i=0}^N \omega_i Y_i : \end{aligned} \tag{7.8.5}$$

Պարամետրերի նախնական արժեքները, համաձայն (7.8.3) բանաձևերի, որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$a = A, \quad b = e^B :$$

Նկարագրված հնարքը կոչվում է *գծայնացման եղանակ*: Միաժամանակ պետք է նշել, որ ուղիղ հաշվարկով և գծայնացման եղանակով ստացված  $a$  և  $b$  մեծությունների միջև կա ոչ մեծ տարբերություն (տե՛ս, օրինակ, [38]):

## ԽՆՈՒԿՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ - 7

1. Ապացուցել, որ կամայական  $f \in L$  տարրի համար լավագույն մոտարկման տարրերի համախմբությունը ուռուցիկ բազմություն է:
2. Ապացուցել, որ  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  վեկտորների  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$  նորմով  $\mathbf{R}^n$  տարածությունը խիստ նորմավորված չէ:
3.  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi/2]$  ֆունկցիայի համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկումը  $y = ax$  տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:
4.  $y = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi/2]$  ֆունկցիայի համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկումը  $y = ax$  տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:

5. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամներ  $H_1$  դասից.

$$\text{ա) } y = x^2, \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{բ) } y = x^3, \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{գ) } y = x^4, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\text{դ) } y = |x|, \quad x \in [-1, 3],$$

$$\text{ե) } y = 3x^2 + 2x - 1, \quad x \in [-1, 1/3],$$

$$\text{զ) } y = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in [0, 1] :$$

Նշել չեֆիշկյան ալտերնանսի կետերը:

6. Կառուցել խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որի համար լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը չի բավարարում ալտերնանսի մասին Չեֆիշկի թեորեմի պայմանին:

7. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամներ  $H_2$  դասից.

$$\text{ա) } y = x^3, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\text{բ) } y = 2x^2 + 3x + 5, \quad x \in [1, 7],$$

$$\text{գ) } y = x^4, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\text{դ) } y = \sin 2x, \quad x \in [0, 2\pi] :$$

Նշել չեֆիշկյան ալտերնանսի կետերը:

8. Ապացուցել, որ  $f(x) \in C[-1, 1]$  գույգ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես գույգ է:

9. Ապացուցել, որ  $f(x) \in C[-1, 1]$  կենտ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

10. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամներ  $H_3$  դասից.

$$\text{ա) } y = \cos 2x, \quad x \in [0, 2\pi], \quad \text{բ) } y = |x^2 - 7x + 10|, \quad x \in [3, 4],$$

$$\text{գ) } y = e^{x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad \text{դ) } y = 3 \sin^2 10x + |x^2 - 7x + 10|, \quad x \in [3, 4] :$$

Նշել չեֆիշկյան ալտերնանսի կետերը:

11. Բոլոր  $ax^n + P_{n-1}(x)$  տեսքի բազմանդամների մեջ, որտեղ  $P_{n-1}(x) \in H_{n-1}$ , իսկ  $a$ -ն գրոյից տարբեր արված թիվ է, գտնել  $[-1, 1]$  հատվածում գրոյից ամենաթիչ շեղված բազմանդամը:

12.  $y = \sin 100x$  ֆունկցիայի համար  $[0, \pi]$  հատվածում գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ  $H_{90}$  դասից:

13. Դիցուք  $f(x) = 1/(x+9)$  ֆունկցիան  $[-1, 1]$  հատվածում պետք է մոտարկել գծային ֆունկցիայով: Դիտարկեք մոտարկման հետևյալ եղանակները.

ա) Թեյլորի վերլուծությունը  $x = 0$  կետում,

բ) ինտերպոլացիա  $x_0 = -\sqrt{2}/2$ ,  $x_1 = \sqrt{2}/2$  հանգույցներով,

գ) հավասարաչափ մոտարկում:

Գնահատել սխալանքները  $C[-1, 1]$  տարածության նորմում:

14. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամներ  $H_1$  դասից.

ա)  $y = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,      բ)  $y = x^3$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,

գ)  $y = 1/x$ ,  $x \in [1, 2]$ ,      դ)  $y = \ln(1 + x)$ ,  $x \in [0, 1]$  :

Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:

15. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամներ  $H_2$  դասից.

ա)  $y = x^3$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,      բ)  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  :

Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:

16.  $y = x^3$  ֆունկցիայի համար  $[0, 2]$  հատվածում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ  $H_3$  դասից: Գնահատել միջին քառակուսային շեղումը:

17.  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիայի համար  $[0, \pi/2]$  հատվածում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը  $y = ax$  տեսքի ֆունկցիաների մեջ:

18.  $f(x) = \cos x$  ֆունկցիայի համար  $[0, \pi/2]$  հատվածում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը  $y = ax$  տեսքի ֆունկցիաների մեջ:

19. Ապացուցել, որ  $f(x) \in L_2[-1, 1]$  գույգ ֆունկցիայի համար լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես գույգ է:

20. Ապացուցել, որ  $f(x) \in L_2[-1, 1]$  կենտ ֆունկցիայի համար լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

21.  $f(x) = e^{-x}$  ֆունկցիան  $[-1, 1]$  հատվածում մոտարկվում է առաջին աստիճանի բազմանդամով հետևյալ եղանակների կիրառմամբ.

ա) Թեյլորի վերլուծությունը  $x = 0$  կետում,

բ) ինտերպոլացիա  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$  հանգույցներով,

գ) ինտերպոլացիա  $x_0 = -\sqrt{2}/2$ ,  $x_1 = \sqrt{2}/2$  հանգույցներով,

դ) հավասարաչափ մոտարկում,

ե) միջին քառակուսային մոտարկում:

Գնահատել սխալանքները  $C[-1, 1]$  տարածության նորմում:

22. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը  $y = \sin \pi x$  ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից  $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$  կետերում՝ գտնել լավագույն մոտարկումը  $H_2$  դասից:
23. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը  $y = \frac{1}{1+x}$  ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից  $x = 0, 1, 2, \dots, 8$  կետերում՝ գտնել լավագույն մոտարկումը  $H_2$  դասից:
24. Հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր արբսցիսներով  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$  կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի  $y_i, i = 0, 1, \dots, N$  արժեքները մոտարկող  $y = ax + b$  ուղիղ գծի  $a$  և  $b$  պարամետրերը: Այնուհետև, դիցուք  $x^*$ -ը և  $y^*$ -ը նշված կետերի կոորդինատների միջին արժեքներն են, որոնք հաշվվում են հետևյալ կերպ.

$$x^* = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_i \quad \text{և} \quad y^* = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N y_i :$$

Ապացուցել, որ  $(x^*, y^*)$  կետը գտնվում է  $y = ax + b$  ուղիղ գծի վրա:

25. Դիցուք հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր արբսցիսներով  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$  կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի  $y_i, i = 0, 1, \dots, N$  արժեքները մոտարկող հետևյալ կորերի  $a$  և  $b$  պարամետրերը.

$$\text{ա) } y = \frac{a}{x} + b, \quad \text{բ) } y = \frac{1}{ax + b}, \quad \text{գ) } y = \frac{b}{a + x}, \quad \text{դ) } y = bx^a :$$

26. Ստորև բերված ֆունկցիաների համար ստանալ գծայնացված ձևերը.

$$\text{ա) } y = \frac{a}{x} + b, \quad \text{բ) } y = \frac{1}{ax + b}, \quad \text{գ) } y = \frac{b}{a + x},$$

$$\text{դ) } y = \frac{1}{(ax + b)^2}, \quad \text{ե) } y = a \ln x + b, \quad \text{զ) } y = bx^a :$$

Կիրառելով գծայնացման եղանակը՝ գտնել  $a$  և  $b$  պարամետրերը:

## Գլուխ 8

# ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ

### 8.1 Քառակուսացման բանաձևեր

Գիտարկենք  $f(x)$  անընդհատ ֆունկցիայի

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \quad (8.1.1)$$

որոշյալ ինտեգրալի հաշվման խնդիրը: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում արտաձվում է *Նյուտոն-Լայբնիցի*

$$I(f) = F(b) - F(a) \quad (8.1.2)$$

բանաձևը, որտեղ  $F(x)$ -ը  $f(x)$  ֆունկցիայի նախնականն է (տե՛ս, օրինակ, [62]): Ցավոք, գործնականում միշտ չէ, որ հնարավոր է գտնել  $F(x)$  նախնական ֆունկցիան: Օրինակ, (8.1.2) բանաձևը պիտանի չէ

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{և} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալների հաշվման համար: Բացի այդ, գործնականում հաճախ  $f(x)$  ֆունկցիան չի տրվում բացահայտ տեսքով, այլ հայտնի են լինում նրա արժեքները  $[a, b]$  հատվածի որոշ կետերում: Այդ դեպքում նախնականի որոշման հարցն ընդհանրապես կորցնում է իր իմաստը: Վերը նշված պատճառներով մեծ կիրառական նշանակություն ունեն ինտեգրալների հաշվման մոտավոր մեթոդները: Այդպիսի մեթոդների թվում ամենից հաճախ օգտագործվում են

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (8.1.3)$$

տեսքի թվային ինտեգրման բանաձևերը, որոնք անվանում են *քառակուսացման բանաձևեր*:  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  կետերը կոչվում են քառակուսացման բանաձևի *հանգույցներ*, իսկ  $A_0, A_1, \dots, A_n$  թվերը՝ քառակուսացման բանաձևի *գործակիցներ*:

Նշենք, որ (8.1.3) տեսքի հաշվարկային բանաձևերի օգտագործումը լիովին համաձայնեցվում է (8.1.1) ինտեգրալի սահմանման հետ՝ որպես ինտեգրալային գումարների հաջորդականության սահման (տե՛ս, օրինակ, [62]):

**Դիտողություն 8.1.1 :** *Մաթեմատիկայում քառակուսացում տերմինը նշանակում է տրված պատկերի մակերեսին հավասարամեծ քառակուսու կառուցում: Ինչպես հայտնի է, (8.1.1) որոշյալ ինտեգրալը հավասար է այն կորագիծ սեղանի մակերեսին, որը սահմանափակված է  $y = f(x)$  կորով և  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  ուղիղներով (տե՛ս, օրինակ, [62]):*

Քառակուսացման (8.1.3) բանաձևի սխալանք կոչվում է

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f) \quad (8.1.4)$$

տարբերությունը: Ներմուծենք ևս մեկ գաղափար:

**Սահմանում 8.1.1 :** Կասենք, որ (8.1.3) քառակուսացման բանաձևը *ճշգրիտ է* ֆունկցիաների որոշակի  $\mathcal{K}$  դասում, եթե

$$R_n(f) = 0 \quad \forall f(x) \in \mathcal{K} : \quad (8.1.5)$$

Ինչպես գիտենք, անընդհատ ֆունկցիաները կարելի է բավականաչափ լավ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով (ինտերպոլացիա, հավասարաչափ և միջին քառակուսային մոտարկումներ): Ուստի որպես քառակուսացման բանաձևի բնութագրիչ կոփտարկենք ամենաբարձր աստիճանի բազմանդամները, որոնց համար այդ բանաձևը ճշգրիտ է: Իբրև հիմք կարող են ծառայել հետևյալ դատողությունները:

Դիցուք (8.1.3) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է  $m$ -րդ աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամների  $H_m$  դասում: Այդ դեպքում ցանկացած  $P_m(x) \in H_m$  բազմանդամի համար, ըստ (8.1.5) պայմանի, ճիշտ է

$$R_n(f) = R_n(f - P_m) + R_n(P_m) = R_n(f - P_m) \quad (8.1.6)$$

հավասարությունը: Կամայական  $\Phi(x) \in C[a, b]$  ֆունկցիայի համար ունենք

$$\begin{aligned} |R_n(\Phi)| &= |I(\Phi) - Q_n(\Phi)| \leq |I(\Phi)| + |Q_n(\Phi)| \leq \int_a^b |\Phi(x)| dx + \sum_{k=0}^n |A_k| |\Phi(x_k)| \\ &\leq \left[ (b-a) + \sum_{k=0}^n |A_k| \right] \max_{a \leq x \leq b} |\Phi(x)| \end{aligned}$$

անհավասարությունը: Այսպիսով,

$$|R_n(\Phi)| \leq C_n \|\Phi\|, \quad (8.1.7)$$

որտեղ

$$C_n \equiv (b-a) + \sum_{k=0}^n |A_k| : \quad (8.1.8)$$



Այնուհետև, (8.1.6) և (8.1.7)-ից ստանում ենք

$$|R_n(f)| = |R_n(f - P_m)| \leq C_n \|f - P_m\| \quad \forall P_m(x) \in H_m$$

անհավասարությունը: Այստեղից հետևում է

$$|R_n(f)| \leq C_n \rho(f, H_m) \tag{8.1.9}$$

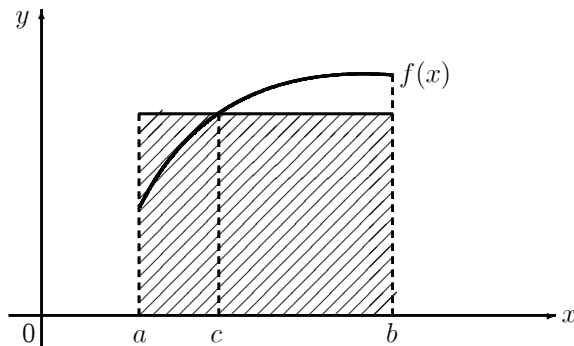
գնահատականը, որտեղ  $\rho(f, H_m)$  մեծությունը  $f(x)$  ֆունկցիայի հեռավորությունն է  $H_m \subset C[a, b]$  ենթատարածությունից (տե՛ս (5.1.1) սահմանումը): Իսկ քանի որ  $\rho(f, H_m)$ -ը  $m$ -ի աճման հետ մեկտեղ մոնոտոն ձգտում է զրոյի (տե՛ս (7.2.6)-ը), ապա որոշ վերապահումով կարելի է պնդել հետևյալը. որքան բարձր է հանրահաշվական բազմանդամների աստիճանը, որոնց համար քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է, այնքան փոքր է այդ բանաձևի սխալանքը: Վերապահումն այն է, որ (8.1.8)-ում սահմանված  $C_n$  մեծությունը կախված է տվյալ քառակուսացման բանաձևից և կարող է նաև աճել  $m$ -ի աճմանը զուգընթաց: Սակայն գործնականում օգտագործվող քառակուսացման բանաձևերի մեծամասնության համար նկատվում է նշված երևույթը բանաձևի սխալանքի և որոշակի աստիճանի բազմանդամների դասում նրա ճշգրտության միջև:

## 8.2 Ուղղանկյունների բանաձևերը

Պարզագույն քառակուսացման բանաձևեր կարելի է ստանալ որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստից բխող ակնառու դատողություններից: Դիտարկենք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_{\mathcal{R}}(f) \equiv (b - a)f(c) \tag{8.2.1}$$

քառակուսացման բանաձևը, որտեղ  $c \in [a, b]$ :



**Նկ. 8.2.1** Ուղղանկյունների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը, որը հավասար է  $I(f)$ -ի, փոխարինվում է  $b - a$  հիմքով և  $f(c)$  բարձրությամբ ուղղանկյան մակերեսով (նկ. 8.2.1): Այդ պատճառով (8.2.1) բանաձևն անվանում են *ուղղանկյունների բանաձև*: Հիմնականում օգտագործվում են (8.2.1) բանաձևի հետևյալ մասնավոր դեպքերը:

- Չախ ուղղանկյունների բանաձև ( $c = a$ ).

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{-}(f) \equiv (b - a)f(a) : \quad (8.2.2)$$

- Աջ ուղղանկյունների բանաձև ( $c = b$ ).

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{+}(f) \equiv (b - a)f(b) : \quad (8.2.3)$$

- Միջին ուղղանկյունների բանաձև ( $c = (a + b)/2$ ).

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \equiv (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) : \quad (8.2.4)$$

Այժմ գնահատենք ուղղանկյունների բանաձևերի սխալանքները: Սկսենք ձախ ուղղանկյունների բանաձևից: Ենթադրենք, որ  $f(x) \in C^1[a, b]$ : Դիտարկենք

$$R_{\mathcal{R}}^{-}(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^{-}(f) \quad (8.2.5)$$

սխալանքը: Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_a^{a+\tau} f(x) dx - \tau f(a), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ  $\Delta \equiv b - a$ : Ակնհայտ է, որ  $\Phi(\Delta) = R_{\mathcal{R}}^{-}(f)$  և  $\Phi(0) = 0$ : Ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^2 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ  $F(0) = F(\Delta) = 0$ : Ըստ Ռոլլի թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [62]) կգտնվի այնպիսի  $\tau_1 \in (0, \Delta)$ , որ  $F'(\tau_1) = 0$ : Հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{2\tau}{\Delta^2} \Phi(\Delta) = f(a + \tau) - f(a) - \frac{2\tau}{\Delta^2} \Phi(\Delta) :$$

Վերջին հավասարությունում վերցնենք  $\tau = \tau_1$ : Կստանանք

$$f(a + \tau_1) - f(a) - \frac{2\tau_1}{\Delta^2} \Phi(\Delta) = 0$$

հավասարությունը: Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը (տե՛ս, օրինակ, [62]), կստանանք

$$\tau_1 \left[ f'(\xi) - \frac{2}{\Delta^2} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (a, a + \tau_1) :$$

Հետևաբար

$$\Phi(\Delta) = \frac{f'(\xi)}{2} \Delta^2 :$$

Այսպիսով, հանգում ենք (8.2.2) ձախ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար

$$R_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \quad \xi \in (a, b) \quad (8.2.6)$$

արտահայտությամբ: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է

$$|R_{\mathcal{R}}^-(f)| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (8.2.7)$$

գնահատականը:

Նման եղանակով գնահատվում է աջ ուղղանկյունների բանաձևի

$$R_{\mathcal{R}}^+(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^+(f) \quad (8.2.8)$$

սխալանքը՝

$$R_{\mathcal{R}}^+(f) = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2, \quad \eta \in (a, b) : \quad (8.2.9)$$

Այս արտահայտության արտածումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն: Նշենք միայն, որ այստեղ պետք է օգտագործել

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^2 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիա, որտեղ

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{b-\tau}^b f(x) dx - \tau f(b), \quad \Delta \equiv b - a :$$

Միսալանքի (8.2.9) արտահայտությունից հետևում է

$$|R_{\mathcal{R}}^+(f)| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (8.2.10)$$

գնահատականը, որը համանման է (8.2.7) գնահատականին:

Ստացված (8.2.7) և (8.2.10) գնահատականներից հետևում է, որ ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերը ճշգրիտ են հանրահաշվական բազմանդամների  $H_0$  դասում, այսինքն՝ հաստատուն ֆունկցիաների համար:

Այժմ արտածենք արտահայտություն (8.2.4) միջին ուղղանկյունների բանաձևի

$$R_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \quad (8.2.11)$$

սխալանքի համար: Ենթադրենք, որ  $f(x) \in C^2[a, b]$ : Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - 2\tau f(c), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ  $c = (a+b)/2$  և  $\Delta \equiv (b-a)/2$ : Ակնհայտ է, որ  $\Phi(\Delta) = R_{\mathcal{R}}^{\circ}(f)$  և  $\Phi(0) = 0$ : Այնուհետև ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Պարզ է, որ  $F(0) = F(\Delta) = 0$ : Ըստ Ռոլլի թեորեմի՝ գոյություն ունի այնպիսի  $\tau_1 \in (0, \Delta)$ , որ  $F'(\tau_1) = 0$ : Հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = f(c+\tau) + f(c-\tau) - 2f(c) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Հեշտ է տեսնել, որ  $F'(0) = 0$ : Ուստի կգտնվի այնպիսի  $\tau_2 \in (0, \tau_1)$ , որ  $F''(\tau_2) = 0$ : Հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը.

$$F''(\tau) = f'(c+\tau) - f'(c-\tau) - \frac{6\tau}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Եթե վերջին հավասարությունում վերցնենք  $\tau = \tau_2$ , ապա

$$f'(c+\tau_2) - f'(c-\tau_2) - \frac{6\tau_2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = 0 :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը, կունենանք

$$2\tau_2 \left[ f''(\mu) - \frac{3}{\Delta^3} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \mu \in (c-\tau_2, c+\tau_2)$$

հավասարությունը: Հետևաբար

$$\Phi(\Delta) = \frac{f''(\mu)}{3} \Delta^3 :$$

Աջ մասում տեղադրելով  $\Delta$ -ի փոխարեն  $(b-a)/2$ ՝ կստանանք

$$R_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) = \frac{f''(\mu)}{24} (b-a)^3, \quad \mu \in (a, b) \quad (8.2.12)$$

արտահայտությունը միջին ուղղանկյունների բանաձևի (8.2.11) սխալանքի համար: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է

$$|R_{\mathcal{R}}^{\circ}(f)| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)^3, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| : \quad (8.2.13)$$

գնահատականը: Այս գնահատականից հետևում է, որ միջին ուղղանկյունների բանաձևը ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների  $H_1$  դասում, այսինքն՝ գծային ֆունկցիաների համար:

Ուղղանկյունների բանաձևերի սխալանքները սովորաբար բավականաչափ մեծ են: Այդ սխալանքները կարելի է էապես փոքրացնել, եթե բանաձևերը կիրառենք ոչ թե ամբողջ  $[a, b]$  հատվածի նկատմամբ, այլ այն նախապես տրոհենք մասերի:

Բաժանենք  $[a, b]$  հատվածը  $n$  հավասար մասերի՝

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} : \quad (8.2.14)$$

Համապատասխանաբար  $I(f)$  ինտեգրալը ներկայացնենք

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (8.2.15)$$

ինտեգրալների գումարի տեսքով: Կառուցելով յուրաքանչյուր  $[x_k, x_{k+1}]$  հատվածում ձախ, աջ կամ միջին ուղղանկյունների բանաձևերը և գումարելով ըստ բոլոր հատվածների՝ կստանանք հետևյալ քառակուսացման բանաձևերը:

- Ձախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձև.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) : \quad (8.2.16)$$

- Աջ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձև.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) : \quad (8.2.17)$$

- Միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձև.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^o(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k), \quad c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} : \quad (8.2.18)$$

Ընդհանրացված բանաձևերի սխալանքների գնահատականները ստանալիս մենք բազմիցս կօգտագործենք հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 8.2.1 :** Դիցուք  $f(x) \in C[a, b]$  և  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in [a, b]$  կամայական կետեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի  $\xi \in [a, b]$  կետ, որ

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_m)}{m} = f(\xi) :$$

Պնդումը հեշտությամբ բխում է

$$\min_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_m)}{m} \leq \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

ակնհայտ անհավասարություններից և անընդհատ ֆունկցիայի միջանկյալ արժեքների մասին Բոլցանո-Կոշիի թեորեմից (տե՛ս, օրինակ, [62]):

Գնահատենք ձախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևի

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f) \quad (8.2.19)$$

սխալանքը: Ելնելով (8.2.15) և (8.2.16)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - hf(x_k) \right) :$$

Ձախ ուղղանկյունների սովորական բանաձևի սխալանքի համար վերը ստացված (8.2.6) արտահայտությունից ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - hf(x_k) = \frac{f'(\xi_k)}{2} h^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

որտեղ  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ : Հետևաբար

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) :$$

Այնուհետև, կիրառելով 8.2.1 լեմման, կստանանք

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{h^2}{2} n f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \quad \xi \in (a, b)$$

(համաձայն  $[a, b]$  հատվածի (8.2.14) տրոհման նշենք, որ  $nh = b-a$ ): Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \quad \xi \in (a, b) : \quad (8.2.20)$$

Այստեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f)| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)h, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| : \quad (8.2.21)$$

Նման ճանապարհով արտաձվում են արտահայտություններ (8.2.17) և (8.2.18) քառակուսացման բանաձևերի

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^+(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f) \quad (8.2.22)$$

և

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \quad (8.2.23)$$

սխալանքների համար: Դրանք են՝

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{+}(f) = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)h, \quad \eta \in (a, b) \quad (8.2.24)$$

և

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) = \frac{f''(\mu)}{24}(b-a)h^2, \quad \mu \in (a, b) : \quad (8.2.25)$$

Մրանից հետևում են

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{+}(f)| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)h, \quad M_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \quad (8.2.26)$$

և

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (8.2.27)$$

գնահատականները:

**Օրինակ 8.2.1 :** Միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևում գնահատել հանգույցների բանակը, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալը  $10^{-4}$  ճշտությամբ հաշվելու համար:Ըստ (8.2.27) գնահատականի՝  $n$  թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_2}{24} h^2 = \frac{M_2}{24 n^2} < 10^{-4} \quad (8.2.28)$$

պայմանից: Հաշվենք  $M_2$  մեծությունը: Ունենք

$$(e^{-x^2})'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} :$$

Այստեղից գտնում ենք  $M_2 = 2$ : Այսպիսով, (8.2.28)-ից հետևում է, որ (8.2.18) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28.87 :$$

Ընտրելով  $n = 29$ , կստանանք ինտեգրալի 0.74686 արժեքը  $10^{-4}$  ճշտությամբ:  $\diamond$

Եթե  $f'(x)$  ածանցյալը  $(a, b)$  միջակայքում պահպանում է իր նշանը, ապա ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերը տալիս են ինտեգրալի երկկողմանի մոտարկումներ: Օրինակ, եթե  $f'(x) > 0$ , ապա (8.2.20) և (8.2.24) արտահայտություններից հետևում է, որ  $\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^-(f) > 0$  և  $\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^+(f) < 0$ : Համապատասխանաբար (8.2.19) և (8.2.22) -ից ունենք

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f) < I(f) < \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f) : \quad (8.2.29)$$

Այսպիսով, (8.2.16) բանաձևը տալիս է ինտեգրալի մոտավոր արժեքը *պակասորդով*, իսկ (8.2.17) -ը՝ *հավելորդով*: Այդ դեպքում կարող ենք օգտագործել *ուղղանկյունների համակցված բանաձևը*.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^*(f) \equiv \frac{\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f) + \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f)}{2} : \quad (8.2.30)$$

Բացի այդ, (8.2.29) և (8.2.30) -ից հեշտությամբ ստանում ենք

$$|I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^*(f)| < \frac{\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^+(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^-(f)}{2} \quad (8.2.31)$$

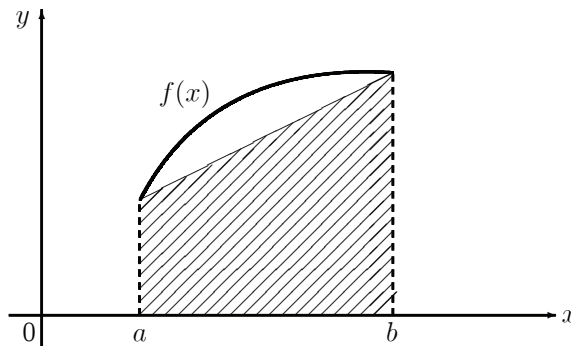
գնահատականը: Գրանով (8.2.30) համակցված բանաձևի սխալանքը գնահատվում է հենց ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

### 8.3 Սեղանների բանաձևը

Թվային ինտեգրման սեղանների բանաձևն ունի հետևյալ տեսքը.

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_T(f) \equiv \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) : \quad (8.3.1)$$

Այստեղ  $I(f)$  ինտեգրալի ճշգրիտ արժեքը փոխարինվում է նկ. 8.3.1 -ում պատկերված գծապատկած սեղանի մակերեսով:



**Նկ. 8.3.1** Սեղանների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը



Ենթադրելով, որ  $f(x) \in C^2[a, b]$ , գնահատենք սեղանների բանաձևի սխալանքը՝

$$R_{\mathcal{T}}(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{T}}(f) : \quad (8.3.2)$$

Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - \tau [f(c-\tau) + f(c+\tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

Ֆունկցիան, որտեղ  $c = (a+b)/2$  և  $\Delta \equiv (b-a)/2$ : Ակնհայտ է, որ  $\Phi(\Delta) = R_{\mathcal{T}}(f)$  և  $\Phi(0) = 0$ : Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta :$$

Քանի որ  $F(0) = F(\Delta) = 0$ , ապա ըստ Ռոլլի թեորեմի կգտնվի այնպիսի  $\tau_1 \in (0, \Delta)$ , որ  $F'(\tau_1) = 0$ : Հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = -\tau [f'(c+\tau) - f'(c-\tau)] - \frac{3\tau^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) :$$

Վերջին հավասարության մեջ տեղադրելով  $\tau = \tau_1$ , կստանանք

$$\tau_1 [f'(c+\tau_1) - f'(c-\tau_1)] + \frac{3\tau_1^2}{\Delta^3} \Phi(\Delta) = 0$$

հավասարությունը: Այնուհետև կիրառենք Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը՝

$$2\tau_1^2 \left[ f''(\xi) + \frac{3}{2\Delta^3} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (c-\tau_1, c+\tau_1) :$$

Այսպիսով,

$$\Phi(\Delta) = -\frac{2}{3} f''(\xi) \Delta^3 :$$

Այս հավասարության աջ մասում տեղադրելով  $\Delta = (b-a)/2$ , կստանանք

$$R_{\mathcal{T}}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)^3, \quad \xi \in (a, b) \quad (8.3.3)$$

արտահայտությունը սեղանների բանաձևի (8.3.2) սխալանքի համար: Այստեղից հետևում է, որ

$$|R_{\mathcal{T}}(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| : \quad (8.3.4)$$

Ինչպես տեսնում ենք, սեղանների բանաձևը ճշգրիտ է  $H_1$  դասում:

Այժմ կառուցենք ընդհանրացված բանաձևը: Դիցուք տրված է  $[a, b]$  հատվածի (8.2.14) տրոհումը  $n$  հավասար մասերի: Յուրաքանչյուր  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  հատվածում կիրառենք սեղանների (8.3.1) բանաձևը.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] :$$

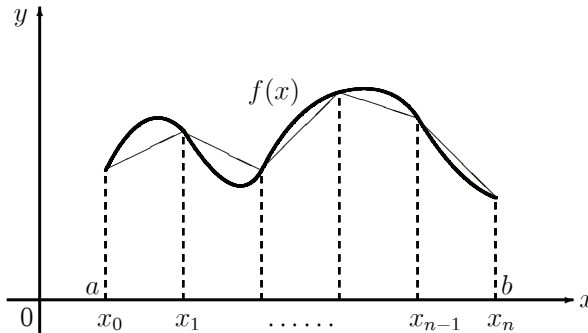
Դրանով (8.2.15)-ից կստանանք քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \tag{8.3.5}$$

կամ

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_T(f) \equiv \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right], \tag{8.3.6}$$

որը կրում է *սեղանների ընդհանրացված բանաձև* անունը (նկ. 8.3.2):



**Նկ. 8.3.2** Սեղանների ընդհանրացված բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Արտաձեճնք սեղանների ընդհանրացված բանաձևի

$$\mathbf{R}_T(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_T(f) \tag{8.3.7}$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (8.2.15) և (8.3.5)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_T(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \right) :$$

Ըստ սեղանների սովորական բանաձևի սխալանքի (8.3.3) արտահայտության՝ ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = -\frac{f''(\xi_k)}{12} h^3, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

որտեղ  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$  : Այնուհետև, օգտվելով 8.2.1 լեմմայից, կստանանք

$$\mathbf{R}_T(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2,$$

որտեղ  $\xi \in (a, b)$  : Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} (b-a)h^2, \quad \xi \in (a, b) : \quad (8.3.8)$$

Այստեղից հետևում է

$$|\mathbf{R}_T(f)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2, \quad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (8.3.9)$$

գնահատականը:

Եթե  $f''(x)$  երկրորդ կարգի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը  $(a, b)$  միջակայքում, ապա միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը տալիս են  $I(f)$  ինտեգրալի երկկողմանի մոտարկումներ: Դիցուք, օրինակ,  $f''(x) > 0$ : Այդ դեպքում, համաձայն (8.2.25) և (8.3.8)-ի, համապատասխանաբար  $\mathbf{R}_R^\circ(f) > 0$  և  $\mathbf{R}_T(f) < 0$ : Ուստի (8.2.23) և (8.3.7)-ից հետևում է, որ

$$\mathbf{Q}_R^\circ(f) < I(f) < \mathbf{Q}_T(f) : \quad (8.3.10)$$

Այդ իրավիճակում կարելի է օգտագործել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված բանաձևը`

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{RT}(f) \equiv \frac{\mathbf{Q}_R^\circ(f) + \mathbf{Q}_T(f)}{2} : \quad (8.3.11)$$

Այս բանաձևի համար

$$|I(f) - \mathbf{Q}_{RT}(f)| < \frac{\mathbf{Q}_T(f) - \mathbf{Q}_R^\circ(f)}{2}, \quad (8.3.12)$$

այսինքն` բանաձևի սխալանքը գնահատվում է ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի հիման վրա կարելի է ստանալ ինտեգրալների ճշգրտված արժեքներ, եթե հաշվի առնենք այդ բանաձևերի սխալանքների բնույթը: Համեմատելով (8.2.25) և (8.3.8) արտահայտությունները` տեսնում ենք, որ միջին ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքը մոտավորապես երկու անգամ փոքր է սեղանների բանաձևի սխալանքից, և արտահայտությունները ունեն հակադիր նշաններ: Դրա հիման վրա կարելի է գրել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{RT}^*(f) \equiv \frac{2\mathbf{Q}_R^\circ(f) + \mathbf{Q}_T(f)}{3} : \quad (8.3.13)$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{RT}}^*(f) &= \frac{2}{3} [I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f)] + \frac{1}{3} [I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f)] = \frac{2}{3} \mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) + \frac{1}{3} \mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f) \\ &= \frac{1}{36} [f''(\mu) - f''(\xi)](b-a)h^2, \quad \mu, \xi \in (a, b) : \end{aligned}$$

Եթե  $f''(x)$  ամսանցյալը  $[a, b]$  հատվածում դանդաղ է փոփոխվում, ապա ըստ (8.3.13) բանաձևի՝ կարելի է ստանալ ինտեգրալի առավել ճշգրիտ արժեքը:

**Օրինակ 8.3.1 :** Կիրառելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը՝ հեշտությամբ հաշվում ենք

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի արժեքը՝

$$I = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 :$$

Օգտվենք այժմ միջին ուղղանկյունների և սեղանների ընդհանրացված բանաձևերից: Վերցնենք  $n = 10$ : Արդյունքում կստանանք  $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ} = 0.785606$  և  $\mathbf{Q}_{\mathcal{T}} = 0.784981$  (կլորացման սխալանքների ճշտությամբ): Այնուհետև, ըստ (8.3.13) բանաձևի՝ գտնում ենք  $\mathbf{Q}_{\mathcal{RT}}^* = 0.785398$ :  $\diamond$

Այսպիսով, որոշ դեպքերում համակցված բանաձևերի օգտագործումը էապես լավացնում է հաշվարկների արդյունքները:

## 8.4 Միմաստնի բանաձևը

Մույն պարագրաֆում կարտածենք քառակուսացման մի բանաձև, որն ունի ճշտության ավելի բարձր աստիճան, քան ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը: Այդ մպատակով  $f(x)$  ֆունկցիայի համար նախ կառուցենք ինտերպոլացիոն բազմանդամ՝ որպես հանգույցներ վերցնելով  $a, b$  և  $c = (a+b)/2$  կետերը: Օգտվելով (6.2.4) Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևից, պարզ ձևափոխություններից հետո, կստանանք բազմանդամի հետևյալ տեսքը.

$$L_2(x) = f(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-c) + 2 \frac{f(b) - 2f(c) + f(a)}{(b-a)^2}(x-c)^2 : \quad (8.4.1)$$

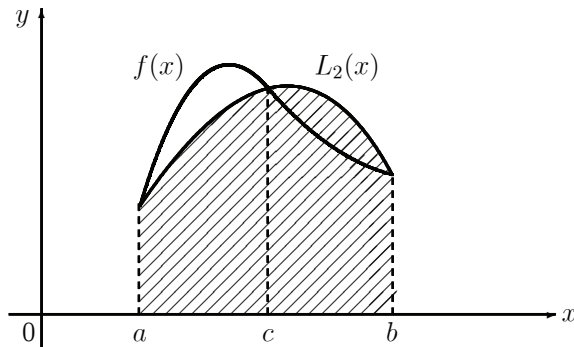
Այնուհետև ենթադրենք

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_2(x) dx : \quad (8.4.2)$$

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ ինտեգրալի արժեքը փոխարինվում է  $y = L_2(x)$  պարաբոլով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսով (նկ. 8.4.1): Տեղադրելով  $L_2(x)$ -ի համար (8.4.1) արտահայտությունը (8.4.2) մոտավոր հավասարության մեջ՝ կստանանք քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \approx Q_S(f) \equiv \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] , \quad (8.4.3)$$

որը կոչվում է *Միմպսոնի բանաձև* (այն անվանում են նաև *պարաբոլների բանաձև*):



**Նկ. 8.4.1** Միմպսոնի բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գնահատենք Միմպսոնի բանաձևի

$$R_S(f) \equiv I(f) - Q_S(f) \quad (8.4.4)$$

սխալանքը: Ենթադրենք, որ  $f(x) \in C^4[a, b]$ : Դիտարկենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x) dx - \frac{\tau}{3} [f(c-\tau) + 4f(c) + f(c+\tau)] , \quad 0 \leq \tau \leq \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ  $\Delta \equiv (b-a)/2$ : Ակնհայտ է, որ  $\Phi(\Delta) = R_S(f)$  և  $\Phi(0) = 0$ : Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^5 \Phi(\Delta) , \quad 0 \leq \tau \leq \Delta :$$

Պարզ է, որ  $F(0) = F(\Delta) = 0$ : Համաձայն Ռոլլի թեորեմի՝ գոյություն ունի այնպիսի  $\tau_1 \in (0, \Delta)$ , որ  $F'(\tau_1) = 0$ : Հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \frac{2}{3} [f(c+\tau) + f(c-\tau) - 2f(c)] - \frac{\tau}{3} [f'(c+\tau) - f'(c-\tau)] - \frac{5\tau^4}{\Delta^5} \Phi(\Delta) : \quad (8.4.5)$$

Ունենք  $F'(0) = 0$ : Ըստ Ռոլլի թեորեմի՝ կգտնվի այնպիսի  $\tau_2 \in (0, \tau_1)$ , որ  $F''(\tau_2) = 0$ : Ածանցելով, (8.4.5)-ից կստանանք

$$F''(\tau) = \frac{1}{3} [f'(c + \tau) - f'(c - \tau)] - \frac{\tau}{3} [f''(c + \tau) + f''(c - \tau)] - \frac{20\tau^3}{\Delta^5} \Phi(\Delta) \quad (8.4.6)$$

հավասարությունը: Քանի որ  $F''(0) = 0$ , ապա կրկին ըստ Ռոլլի թեորեմի գոյություն ունի այնպիսի  $\tau_3 \in (0, \tau_2)$ , որ  $F'''(\tau_3) = 0$ : Ունենալով (8.4.6)-ը՝ հաշվենք  $F(\tau)$  ֆունկցիայի երրորդ ածանցյալը.

$$F'''(\tau) = -\frac{\tau}{3} [f'''(c + \tau) - f'''(c - \tau)] - \frac{60\tau^2}{\Delta^5} \Phi(\Delta) :$$

Վերցնելով  $\tau = \tau_3$ , կստանանք

$$\frac{\tau_3}{3} [f'''(c + \tau_3) - f'''(c - \tau_3)] + \frac{60\tau_3^2}{\Delta^5} \Phi(\Delta) = 0$$

հավասարությունը: Այնուհետև, կիրառելով միջին արժեքի մասին Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝

$$\frac{2\tau_3^2}{3} \left[ f^{(4)}(\xi) + \frac{90}{\Delta^5} \Phi(\Delta) \right] = 0, \quad \xi \in (c - \tau_3, c + \tau_3) :$$

Այստեղից

$$\Phi(\Delta) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \Delta^5 :$$

Հիշելով, որ  $\Delta = (b-a)/2$  և  $\Phi(\Delta) = R_S(f)$ , կստանանք արտահայտություն Սիմպսոնի բանաձևի սխալանքի համար՝

$$R_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (b-a)^5, \quad \xi \in (a, b) : \quad (8.4.7)$$

Վերջինից հետևում է

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{2880} (b-a)^5, \quad M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad (8.4.8)$$

գնահատականը: Ինչպես երևում է ստացված գնահատականից, Սիմպսոնի բանաձևը ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների  $H_3$  դասում:

Կառուցենք ընդհանրացված բանաձևը: Դրա համար  $[a, b]$  հատվածը

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, 2m, \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

կետերի միջոցով տրոհենք  $n = 2m$  հավասար մասերի: Ունենք

$$I(f) = \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \quad (8.4.9)$$

հավասարությունը: Յուրաքանչյուր  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  հատվածի համար կիրառենք Սիմպսոնի (8.4.3) բանաձևը՝

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] :$$

Տեղադրելով (8.4.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$I(f) \approx \frac{h}{3} \sum_{k=1}^m [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (8.4.10)$$

կամ

$$I(f) \approx \mathbf{S}_S(f) \equiv \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(x_{2m}) \right] \quad (8.4.11)$$

բառակուսացման բանաձևը, որը կոչվում է *Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձև*: Արտածենք այս բանաձևի

$$\mathbf{R}_S(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_S(f) \quad (8.4.12)$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (8.4.9) և (8.4.10)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_S(f) = \sum_{k=1}^m \left( \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \right) :$$

Սովորական բանաձևի սխալանքի համար (8.4.7) արտահայտությունից ունենք

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] = -\frac{f^{(4)}(\xi_k)}{90} h^5, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

որտեղ  $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$ : Այնուհետև, կիրառելով 8.2.1 լեմման, կստանանք

$$\mathbf{R}_S(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m f^{(4)}(\xi_k) = -\frac{h^5}{90} m f^{(4)}(\xi) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180} (b-a)h^4$$

արտահայտությունը, որտեղ  $\xi \in (a, b)$ : Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180} (b-a)h^4, \quad \xi \in (a, b) : \quad (8.4.13)$$

Այստեղից հետևում է

$$|\mathbf{R}_S(f)| \leq \frac{M_4}{180} (b-a)h^4, \quad M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \quad (8.4.14)$$

գնահատականը:

**Օրինակ 8.4.1 :** Գնահատել հանգույցների քանակը, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

ինտեգրալը  $10^{-4}$  ճշտությամբ հաշվելու համար:

Համաձայն (8.4.14) գնահատականի՝  $n = 2m$  թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_4}{180} h^4 = \frac{M_4}{180 n^4} < 10^{-4} \quad (8.4.15)$$

պայմանից: Հաշվենք  $M_4$  մեծությունը: Ունենք

$$(e^{-x^2})^{(4)} = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2} :$$

Այստեղից գտնում ենք  $M_4 = 12$ : Այսպիսով, (8.4.15)-ից հետևում է, որ (8.4.11) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{10}{\sqrt[4]{15}} \approx 5.0813 :$$

Այսինքն՝  $n = 6$  դեպքում կստանանք մեր ինտեգրալի 0.74683 մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշտությամբ (համեմատության համար տես՝ 8.2.1 օրինակը):  $\diamond$

## 8.5 Միալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը

Մոտավոր ինտեգրման միալանքի գնահատումը՝ հիմնված նախորդ պարագրաֆներում ստացված արտահայտությունների վրա, հաճախ լինում է բավականին բարդ կամ նույնիսկ գործնականորեն անհնարին: Ինչպես պարզ երևում է (8.2.21), (8.2.26), (8.2.27), (8.3.9) և (8.4.14) գնահատականներից, այն ենթադրում է  $M_p \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|$  մեծությունների իմացությունը: Ուստի գործնականում օգտագործվում է մեկ այլ եղանակ, որի հիմքում ընկած է ընտրված քառակուսացման բանաձևով ինտեգրալի կրկնակի վերահաշվումը՝ տարբեր քայլերով:

Դիցուք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է վերը դիտարկված քառակուսացման բանաձևերից մեկը՝

$$I(f) \approx Q(f, h) \equiv \sum_{k=0}^n A_k^{(h)} f(x_k^{(h)}), \quad (8.5.1)$$

որտեղ  $h = (b - a)/n$ : Դիտարկենք այդ բանաձևի սխալանքը՝

$$R(f, h) \equiv I(f) - Q(f, h) : \quad (8.5.2)$$



Համաձայն սխալանքի համար ստացված (8.2.20), (8.2.24), (8.2.25), (8.3.8) և (8.4.13) արտահայտությունների ունենք

$$R(f, h) = C f^{(p)}(\xi)(b-a)h^p, \quad \xi \in (a, b), \quad (8.5.3)$$

որտեղ  $C$ -ն ոչ զրոյական հաստատուն է, որը կախված է ընտրված քառակուսացման բանաձևից: Ընդ որում՝  $p = 1$  ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերի համար,  $p = 2$  միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի համար, իսկ Միմպսոնի բանաձևի համար  $p = 4$ : Հիմնվելով (8.5.3) արտահայտության վրա՝ կհամարենք, որ

$$R(f, h) \approx M h^p, \quad (8.5.4)$$

որտեղ  $M$ -ը որոշակի հաստատուն է:

Փոքրացնենք (8.5.1) քառակուսացման բանաձևի քայլը երկու անգամ, այսինքն՝ վերցնենք քայլը հավասար  $h/2$ -ի: Դա հավասարագոր է հանգույցների քանակի կրկնապատկմանը: Կստանանք ինտեգրալի նոր մոտավոր արժեքը.

$$I(f) \approx Q(f, h/2) \equiv \sum_{k=0}^{2n} A_k^{(h/2)} f(x_k^{(h/2)}) : \quad (8.5.5)$$

Համաձայն (8.5.4)-ի

$$R(f, h/2) \equiv I(f) - Q(f, h/2) \quad (8.5.6)$$

սխալանքի համար ունենք՝

$$R(f, h/2) \approx M \left(\frac{h}{2}\right)^p : \quad (8.5.7)$$

Համեմատելով (8.5.4) և (8.5.7)-ը՝ գտնում ենք, որ

$$R(f, h/2) \approx \frac{1}{2^p} R(f, h) : \quad (8.5.8)$$

Այսինքն, քայլի կիսման արդյունքում սխալանքը փոքրանում է մոտավորապես  $2^p$  անգամ: Այնուհետև, (8.5.2) և (8.5.6)-ից ունենք

$$R(f, h/2) = R(f, h) + Q(f, h) - Q(f, h/2)$$

հավասարությունը: Այստեղից, հաշվի առնելով (8.5.8)-ը, ստանում ենք

$$R(f, h/2) \approx \frac{Q(f, h/2) - Q(f, h)}{2^p - 1} \quad (8.5.9)$$

մոտավոր արտահայտությունը (8.5.5) քառակուսացման բանաձևի սխալանքի համար: Մխալանքի գնահատման նկարագրված մեթոդը կրում է *Ռունգեի կանոն* անվանումը:

## 8.6 Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևեր

Ընդհանրացնելով սույն գլխի նախորդ պարագրաֆներում ստացված արդյունքները, մշակենք քառակուսացման բանաձևերի կառուցման մեկ եղանակ, որը հիմնված է ենթահնտեգրալային ֆունկցիան ինտերպոլացիոն բազմանդամով փոխարինման վրա:

Ընտրենք  $[a, b]$  հատվածում զույգ առ զույգ իրարից տարբեր  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցներ և ենթահնտեգրալային  $f(x)$  ֆունկցիայի համար կառուցենք  $L_n(x)$  ինտերպոլացիոն բազմանդամ: Ունենք

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

որտեղ  $R_n(x)$ -ը ինտերպոլացիայի սխալանքն է: Ինտեգրելով այս հավասարությունը՝ կստանանք

$$I(f) = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx : \quad (8.6.1)$$

Այստեղից հանգում ենք ինտեգրալի մոտավոր հաշվման հետևյալ եղանակին.

$$I(f) \approx \int_a^b L_n(x) dx : \quad (8.6.2)$$

Ըստ Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևի

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)},$$

որտեղ  $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ : Այդ դեպքում

$$\int_a^b L_n(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (8.6.3)$$

որտեղ

$$A_k \equiv \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (8.6.4)$$

Այսպիսով, (8.6.2) և (8.6.3)-ից ստանում ենք *ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձև*

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (8.6.5)$$

որի գործակիցները որոշվում են ըստ (8.6.4) բանաձևի:

Ինչպես հետևում է (8.6.1)-ից, (8.6.5) քառակուսացման բանաձևի սխալանքը հետևյալն է.

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x) dx : \quad (8.6.6)$$

Եթե  $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ , ապա հաշվի առնելով ինտերպոլացիայի սխալանքի (6.2.9) արտահայտությունը՝ կստանանք

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \omega_{n+1}(x) dx : \quad (8.6.7)$$

Այսպիսով, ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի կառուցման ժամանակ կամայականությունը վերաբերում է միայն հանգույցների ընտրությանը: Իսկ գործակիցները հաշվվում են ըստ (8.6.4) բանաձևի:

**Թեորեմ 8.6.1 :** *Որպեսզի (8.6.5) քառակուսացման բանաձևը լինի ինտերպոլացիոն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ճշգրիտ հանրահաշվական բազմանդամների  $H_n$  դասում:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ (8.6.5) քառակուսացման բանաձևն ինտերպոլացիոն է: Եթե  $f(x) \in H_n$ , ապա ակնհայտ է, որ  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ : Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (8.6.7) -ից,  $R_n(f) = 0$ : Անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք (8.6.5) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է  $H_n$  դասում: Մասնավորապես, այն ճշգրիտ է կամայական

$$l_n^{(m)}(x) \equiv \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_m) \omega'_{n+1}(x_m)} \in H_n, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

բազմանդամի համար: Հաշվի առնելով այդ բազմանդամների (6.2.2) հատկությունը, կստանանք, որ

$$\int_a^b l_n^{(m)}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k l_n^{(m)}(x_k) = A_m$$

բոլոր  $m = 0, 1, \dots, n$  արժեքների համար: Իսկ դա նշանակում է (տես (8.6.4) -ը), որ (8.6.5) քառակուսացման բանաձևն ինտերպոլացիոն է:  $\square$

Եթե ինտեգրման  $a$  և  $b$  սահմանները ինտերպոլացիայի հանգույցներ են, ապա (8.6.5) քառակուսացման բանաձևը կոչվում է *փակ տիպի* բանաձև, հակառակ դեպքում՝ *բաց տիպի*:

Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի  $A_k$  գործակիցները կարելի է գտնել այլ եղանակով՝ առանց (8.6.4) ինտեգրալները հաշվելու: Իրոք, 8.6.1 թեորեմի հիման վրա ունենք

$$\sum_{k=0}^n A_k x_k^m = \int_a^b x^m dx, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

հավասարությունները: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\mu_m \equiv \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, n : \quad (8.6.8)$$

Այսպիսով, հանգում ենք հանրահաշվական հավասարումների

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k & = \mu_0 \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k & = \mu_1 \\ \dots\dots\dots & \dots \dots \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^n & = \mu_n \end{cases} \quad (8.6.9)$$

համակարգի: Այս համակարգը միարժեքորեն լուծելի է, քանի որ նրա որոշիչը Վանդերմոնդի որոշիչն է: Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների որոշման շարադրված եղանակը կոչվում է *անորոշ գործակիցների մեթոդ*:

Նշենք, որ (8.6.9) համակարգի առաջին հավասարումը բացահայտում է ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների կարևոր հատկություն՝

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a : \quad (8.6.10)$$

Ըստ հավասարահեռ հանգույցների կառուցված փակ տիպի ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևերը կոչվում են *Նյուտոն-Կոտսի բանաձևեր*:

Ընտրենք  $[a, b]$  հատվածում հավասարահեռ հանգույցներ

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b - a}{n} :$$

Ինչպես ցույց է տրված 6.5 պարագրաֆում, Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը հավասարահեռ հանգույցների դեպքում գրվում է

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n f(x_k) (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k}$$

տեսքով, որտեղ  $t = (x - x_0)/h$ : Հետևաբար

$$\int_a^b L_n(x) dx = h \int_0^n L_n(x_0 + th) dt = h \sum_{k=0}^n f(x_k) (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt :$$

Քառակուսացման բանաձևի գործակիցներն են՝

$$A_k = h \frac{(-1)^{n-k} C_n^k}{n!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (8.6.11)$$

Բացի (8.6.10) հատկությունից, Նյուտոն-Կոտսի բանաձևի գործակիցներն ունեն մեկ կարևոր հատկություն ևս, այն է՝

$$A_k = A_{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n : \quad (8.6.12)$$

Դա ապացուցվում է անմիջական ստուգումով՝ ելնելով (8.6.11) արտահայտությունից:

Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերի մասնավոր դեպքերն են սեղանների բանաձևը ( $n = 1$ ) և Սիմպսոնի բանաձևը ( $n = 2$ ):

## 8.7 Գաուսի քառակուսացման բանաձևը

Նախորդ պարագրաֆում մենք ստացել ենք ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (8.7.1)$$

որտեղ  $A_k$  գործակիցներն ունեն (8.6.4) տեսքը: Ընդ որում՝  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  հանգույցների կամայական ընտրության դեպքում այդ բանաձևը ճշգրիտ է  $H_n$  դասում: Պարզվում է, որ հանգույցների հատուկ ընտրության դեպքում կարելի է ստանալ բանաձև, որը ճշգրիտ է ավելի բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

Ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը. *կառուցել (8.7.1) քառակուսացման բանաձև, որը ճշգրիտ է հնարավորին չափով բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:*

Նախ և առաջ պարզենք, թե ո՞ր աստիճանի բազմանդամների համար այդ բանաձևը ճշգրիտ լինել չի կարող:

**Լեմմա 8.7.1 :** *(8.7.1) քառակուսացման բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել հանրահաշվական բազմանդամների  $H_{2n+2}$  դասում:*

Ապացույց: Իրոք, դիտարկենք

$$P_{2n+2}(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 \in H_{2n+2}$$

բազմանդամը: Ակնհայտ է, որ այս բազմանդամի համար (8.7.1) բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել, քանի որ

$$\int_a^b P_{2n+2}(x) dx > 0, \quad \text{իսկ} \quad \sum_{k=0}^n A_k P_{2n+2}(x_k) = 0 : \quad \square$$

Ինչպես ցույց է տվել Կ.Գաուսը, հանգույցների հատուկ ընտրության դեպքում (8.7.1) քառակուսացման բանաձևը կարող է ճշգրիտ լինել  $H_{2n+1}$  դասում: Այդպիսի քառակուսացման բանաձևը կոչվում է *ճշտության բարձրագույն հանրահաշվական աստիճանի բանաձև* կամ *Գաուսի բանաձև*:

Նախքան բանաձևի կառուցմանն անցնելը՝ հիշեցնենք մեկ հասկացություն, որին մենք արդեն հանդիպել ենք 7.6 պարագրաֆում:

**Սահմանում 8.7.1 :** Կասենք, որ  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  ֆունկցիաներն *օրթոգոնալ են*  $[a, b]$  հատվածում, եթե

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0 :$$

Ձևակերպենք և ապացուցենք մեկ պնդում, որի հիման վրա կառուցվում է Գաուսի բանաձևը:

**Թեորեմ 8.7.1 :** *Որպեսզի (8.7.1) քառակուսացման բանաձևը լինի ճշգրիտ  $H_{2n+1}$  դասում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ինտերպոլացիոն և  $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \in H_{n+1}$  բազմանդամը  $[a, b]$  հատվածում լինի օրթոգոնալ կամայական բազմանդամի  $H_n$  դասից :*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Գիցուք (8.7.1) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է  $H_{2n+1}$  դասում: Հետևաբար այն կլինի ճշգրիտ  $H_n$  դասում և, ըստ 8.6.1 թեորեմի, ինտերպոլացիոն է:

Վերցնենք ցանկացած  $P_n(x) \in H_n$  բազմանդամ: Համաձայն ենթադրության՝

$$S_{2n+1}(x) \equiv \omega_{n+1}(x)P_n(x) \in H_{2n+1}$$

բազմանդամի համար (8.7.1) բանաձևը ճշգրիտ է, այսինքն՝

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k S_{2n+1}(x_k) :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k \omega_{n+1}(x_k)P_n(x_k) = 0 :$$

Բավարարություն: Գիցուք (8.7.1) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է, և  $\omega_{n+1}(x)$ -ը օրթոգոնալ է  $H_n$  դասի կամայական բազմանդամի: Վերցնենք ցանկացած  $S_{2n+1}(x) \in H_{2n+1}$  բազմանդամ: Բաժանելով այդ բազմանդամը  $\omega_{n+1}(x)$ -ի վրա՝ կստանանք

$$S_{2n+1}(x) = \omega_{n+1}(x)P_n(x) + r_n(x), \quad (8.7.2)$$

որտեղ  $P_n(x), r_n(x) \in H_n$ : Ինտեգրենք այդ հավասարությունը.

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx :$$

Ըստ ենթադրության աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է գրոյի, իսկ երկրորդ ինտեգրալը, համաձայն 8.6.1 թեորեմի, հավասար է քառակուսացման գումարին: Այսպիսով,

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k r_n(x_k) :$$

Ինչպես հետևում է (8.7.2)-ից,  $r_n(x_k) = S_{2n+1}(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ : Ուստի

$$\int_a^b S_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k S_{2n+1}(x_k) :$$

Իսկ դա նշանակում է, որ (8.7.1) բանաձևը ճշգրիտ է  $H_{2n+1}$  դասում:  $\square$

Այսպիսով,  $H_{2n+1}$  դասում ճշգրիտ քառակուսացման բանաձևի գոյության հարցը հանգում է  $(n + 1)$ -րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի գոյությանը, որն օրթոգոնալ է բոլոր բազմանդամներին  $H_n$  դասից և որի արմատներն իրական են, իրարից տարբեր են և պատկանում են  $[a, b]$  հատվածին: Այդ բազմանդամի արմատներն էլ կլինեն որոնելի քառակուսացման բանաձևի հանգույցները:

Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգերը դիտարկելիս 7.6 պարագրաֆում ասվել է (առանց ապացույցի), որ

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.7.3)$$

*Լեժանդրի բազմանդամները* կազմում են օրթոգոնալ համակարգ  $[-1, 1]$  հատվածում: Այստեղ մենք կապացուցենք հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 8.7.2 :**  $\mathcal{L}_{n+1}(x)$  բազմանդամը  $[-1, 1]$  հատվածում օրթոգոնալ է կամայական բազմանդամի  $H_n$  դասից:

Ապացույց: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումը.

$$\varphi(x) \equiv (x^2 - 1)^{n+1} :$$

Համաձայն (8.7.3)-ի՝ պետք է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիայի  $(n + 1)$ -րդ ածանցյալը օրթոգոնալ է  $H_n$  դասի կամայական բազմանդամին:

Վերցնենք ցանկացած բազմանդամ  $P_n(x) \in H_n$ : Հաջորդաբար օգտագործելով մասերով ինտեգրումը՝ կստանանք

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi^{(n+1)}(x) P_n(x) dx &= \varphi^{(n)}(x) P_n(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi^{(n)}(x) P_n'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \varphi^{(n)}(x) P_n'(x) dx = -\varphi^{(n-1)}(x) P_n'(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \varphi^{(n-1)}(x) P_n''(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \varphi^{(n-1)}(x) P_n''(x) dx = \dots \\ &= (-1)^n \varphi(x) P_n^{(n)}(x) \Big|_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 \varphi(x) P_n^{(n+1)}(x) dx = 0 : \quad \square \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք կամայական  $[a, b]$  հատվածը: Արտապատկերենք այդ հատվածը  $[-1, 1]$  հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}, \quad \xi \in [-1, 1] : \quad (8.7.4)$$

Սահմանենք

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) \equiv \mathcal{L}_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right) \in H_{n+1} \quad (8.7.5)$$

բազմանդամը, որտեղ  $\mathcal{L}_{n+1}(\xi)$ -ը Լեժանդրի բազմանդամն է:

**Լեմմա 8.7.3 :**  $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$  բազմանդամը  $[a, b]$  հատվածում օրթոգոնալ է  $H_n$  դասի ցանկացած բազմանդամին:

Ապացույց: Իրոք, կատարելով ինտեգրալի նշանի տակ փոփոխականի փոխարինում, ցանկացած  $P_n(x) \in H_n$  բազմանդամի համար ունենք

$$\begin{aligned} \int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)P_n(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right) P_n(x) dx = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1}(\xi)P_n\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) d\xi = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1}(\xi)\hat{P}_n(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

որտեղ  $\hat{P}_n(\xi) \equiv P_n((b-a)\xi/2 + (b+a)/2)$ : Վերջին ինտեգրալը, համաձայն 8.7.2 լեմմայի, հավասար է զրոյի:  $\square$

Այսպիսով,  $H_n$  դասի բոլոր բազմանդամներին օրթոգոնալ  $(n+1)$ -րդ աստիճանի բազմանդամի գոյությունը ապացուցված է:

**Լեմմա 8.7.4 :**  $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$  բազմանդամի արմատներն իրական են, իրարից տարբեր են և պատկանում են  $(a, b)$  միջակայքին:

Ապացույց: Այստեղ մենք, ըստ էության, կկրկենք 7.6.3 լեմմայի ապացույցը: Քանի որ

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) dx = 0,$$

ապա  $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$  բազմանդամը  $(a, b)$  միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  կետերը  $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$  բազմանդամի  $(a, b)$  միջակայքին պատկանող իրարից տարբեր կենտ պատիկության արմատներն են: Պարզ է, որ  $m \leq n+1$ : Դիտարկենք

$$R_m(x) \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$$



բազմանդամը:  $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x)$  բազմանդամի  $(a, b)$  միջակայքին պատկանող բոլոր արմատներն ունեն գույգ պատիկություն: Ուստի

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x) dx \neq 0 :$$

Հետևաբար, օգտվելով 8.7.3 լեմմայից, կարող ենք եզրակացնել, որ  $m > n$ : Այսպիսով,  $m = n + 1$ :  $\square$

**Լեմմա 8.7.5 :**  $H_n$  դասի կամայական բազմանդամին օրթոգոնալ  $(n + 1)$ -րդ աստիճանի բազմանդամը միակն է հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ:

Ապացույց: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն երկու բազմանդամ՝

$$S_{n+1}^{(1)}(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

և

$$S_{n+1}^{(2)}(x) = x^{n+1} + b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0,$$

որոնք օրթոգոնալ են  $H_n$  դասի կամայական բազմանդամին: Այդ դեպքում  $P_n(x) \equiv S_{n+1}^{(1)}(x) - S_{n+1}^{(2)}(x)$  տարբերությունը  $n$ -րդ աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամ է: Ըստ ենթադրության

$$\int_a^b S_{n+1}^{(1)}(x)P_n(x) dx = 0 \quad \text{և} \quad \int_a^b S_{n+1}^{(2)}(x)P_n(x) dx = 0 :$$

Ուստի

$$\int_a^b P_n^2(x) dx = \int_a^b (S_{n+1}^{(1)}(x) - S_{n+1}^{(2)}(x))P_n(x) dx = 0 :$$

Հետևաբար  $P_n(x) \equiv 0$ , այսինքն՝  $S_{n+1}^{(1)}(x) \equiv S_{n+1}^{(2)}(x)$ :  $\square$

Այսպիսով, որպես քառակուսացման բանաձևի հանգույցներ կվերցնենք

$$x_k = \frac{b-a}{2} \xi_k + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{8.7.6}$$

կետերը, որտեղ  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ ՝ Լեժանդրի բազմանդամի արմատներն են: Այսինքն, (8.7.4) գծային արտապատկերմամբ  $x_0, x_1, \dots, x_n$  հանգույցներն ընտրվում են որպես Լեժանդրի բազմանդամի արմատների պատկերներ: Այնուհետև, քանի որ քառակուսացման բանաձևն ինտեգրալացիոն է, նրա գործակիցները հաշվվում են ըստ (8.6.4) բանաձևի:

Պարզվում է, որ կամայական  $[a, b]$  և  $[-1, 1]$  հատվածների համար Գաուսի բանաձևերի գործակիցների միջև գոյություն ունի պարզ առնչություն, այն է՝

$$A_k^{[a,b]} = \frac{b-a}{2} A_k^{[-1,1]}, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{8.7.7}$$

(այդ փաստի ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն): Արդյունքում Գաուսի քառակուսացման բանաձևը կարող ենք գրել նաև

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx \approx Q_n(f) \equiv \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k^{[-1,1]} f(x_k) \quad (8.7.8)$$

տեսքով, որտեղ հանգույցները որոշվում են համաձայն (8.7.6)-ի, իսկ գործակիցները՝ ըստ

$$A_k^{[-1,1]} = \int_{-1}^1 \frac{\omega_{n+1}(\xi)}{(\xi - \xi_k) \omega'_{n+1}(\xi_k)} d\xi, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (8.7.9)$$

բանաձևի (այստեղ  $\omega_{n+1}(\xi) \equiv (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n)$ ):

**Դիտողություն 8.7.1 :** Քանի որ Գաուսի բանաձևն ինտերպոլացիոն է, ապա նրա գործակիցների որոշման համար կարելի է օգտվել նաև անորոշ գործակիցների մեթոդից, որը հիշատակվել է 8.6 պարագրաֆում:

**Օրինակ 8.7.1 :** Ստանանք Գաուսի քառակուսացման բանաձևը  $[-1, 1]$  հատվածի համար, երբ  $n = 2$ :

Դիտարկենք

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Լեժանդրի բազմանդամը: Այդ բազմանդամի արմատներն են՝

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} :$$

Համաձայն (8.6.9)-ի՝  $A_0, A_1, A_2$  գործակիցների որոշման համար ունենք

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}A_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_2 = 0 \\ \frac{3}{5}A_0 + \frac{3}{5}A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այն՝ կստանանք

$$A_0 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9}, \quad A_2 = \frac{5}{9} :$$

Այսպիսով,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) :$$

Այս բանաձևը ճշգրիտ է բազմանդամների  $H_5$  դասում:  $\diamond$

Նշենք  $Q$ -աուսի բանաձևի գործակիցների ևս մեկ հատկություն:

**Լեմմա 8.7.6 :** *Q-աուսի քառակուսացման բանաձևի գործակիցները դրական են:*

Ապացույց: Գիցուք  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերը  $Q$ -աուսի բանաձևի հանգույցներն են: Բոլոր  $k = 0, 1, \dots, n$  արժեքների համար դիտարկենք

$$P_{2n}^{(k)}(x) \equiv (x - x_0)^2 \dots (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \dots (x - x_n)^2 \in H_{2n}$$

բազմանդամները: Ունենք

$$0 < \int_a^b P_{2n}^{(k)}(x) dx = \sum_{m=0}^n A_m P_{2n}^{(k)}(x_m) = A_k P_{2n}^{(k)}(x_k) :$$

Քանի որ  $P_{2n}^{(k)}(x_k) > 0$ , ապա  $A_k > 0$ :  $\square$

Վերջում առանց արտաձման բերենք  $Q$ -աուսի բանաձևի  $R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f)$  սխալանքի արտահայտությունը (տես, օրինակ, [5, 19, 37]): Եթե  $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$ , ապա

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi) [(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3 (2n+3)} (b-a)^{2n+3}, \quad \xi \in (a, b) : \tag{8.7.10}$$

## 8.8 Աղապտիվ ալգորիթմներ

Թվային ինտեգրման սխալանքների արտահայտություններից երևում է, որ հաշվման արդյունքների ճշտությունը կախված է ինչպես ենթահիտեգրալային ֆունկցիայի փոփոխման բնույթից, այնպես էլ քառակուսացման բանաձևի քայլից: Պարզ է, որ բաղդատելի ճշտություններ ստանալու համար արագ փոփոխվող ֆունկցիայի ինտեգրման ժամանակ բանաձևի քայլը պետք է ընտրել ավելի փոքր, քան դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիայի դեպքում: Գործնականում հաճախ լինում են դեպքեր, երբ ենթահիտեգրալային ֆունկցիան ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում փոփոխվում է տարբեր ձևերով: Հաշվի առնելով դա՝ կարելի է կառուցել ալգորիթմներ, որոնք ինքնաբերաբար հարմարվում են ֆունկցիայի փոփոխման բնույթին: Թվային ինտեգրման այդպիսի ալգորիթմները կոչվում են *աղապտիվ*: Դրանք թույլ են տալիս ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում օգտագործել տարբեր քայլեր: Դրանով նվազեցվում է մեքենայական ժամանակը՝ առանց հաշվարկների ճշտության կորստի:

Աղապտիվ ալգորիթմներ իրականացնող ծրագրերը սովորաբար մտնում են համակարգչի մաթեմատիկական ապահովման մեջ՝ ստանդարտ ենթածրագրերի տեսքով: Օգտագործողը տալիս է ինտեգրման սահմանները ( $a$  և  $b$ ), պահանջվող ճշտությունը ( $\varepsilon > 0$ ) և  $f(x)$  ֆունկցիայի հաշվման բլոկը: Ծրագիրը հաշվում է

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) dx$$

ինտեգրալի  $Q(f)$  մոտավոր արժեքը տրված  $\varepsilon$  ճշտությամբ՝

$$|Q(f) - I(f)| < \varepsilon :$$

Համառոտակի նկարագրենք ադապտիվ ալգորիթմի աշխատանքի սկզբունքը: Նախ  $[a, b]$  հատվածը տրոհվում է  $m$  մասերի

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b \quad (8.8.1)$$

բաժանման կետերի միջոցով: Նշանակենք  $h_i \equiv x_i - x_{i-1}$ : Յուրաքանչյուր  $[x_{i-1}, x_i]$  հատվածում

$$I_i(f) \equiv \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

ինտեգրալը հաշվվում է  $\delta_i$  լոկալ սխալանքով, որտեղ

$$|\delta_i| < \frac{h_i}{b-a} \varepsilon : \quad (8.8.2)$$

Դիցուք  $Q_i(f)$ -ը  $\delta_i$  ճշտությամբ հաշված  $I_i(f)$  ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է: Այդ դեպքում

$$I(f) = \sum_{i=1}^m I_i(f) = \sum_{i=1}^m [Q_i(f) + \delta_i] = \sum_{i=1}^m Q_i(f) + \sum_{i=1}^m \delta_i : \quad (8.8.3)$$

Եթե

$$Q(f) \equiv \sum_{i=1}^m Q_i(f)$$

մեծությունը դիտարկենք որպես  $I(f)$  ինտեգրալի մոտավոր արժեք, ապա կստանանք պահանջվող ճշտությունը: Իրոք, (8.8.2) և (8.8.3)-ից հետևում է, որ

$$|I(f) - Q(f)| \leq \sum_{i=1}^m |\delta_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^m h_i = \varepsilon :$$

Յուրաքանչյուր  $[x_{i-1}, x_i]$  հատվածում  $I_i(f)$  ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է որոշակի քառակուսացման բանաձև, օրինակ, Սիմպսոնի բանաձևը: Նախ  $h_i/2$  քայլով հաշվվում է

$$Q_i^{(1)}(f) = \frac{h_i}{6} \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + f(x_i) \right]$$

մոտավոր արժեքը: Այնուհետև կատարվում են հաշվարկներ  $h_i/4$  քայլով, այսինքն՝

$$Q_i^{(2)}(f) = \frac{h_i}{12} \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{4}\right) + 2f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{3h_i}{4}\right) + f(x_i) \right]$$

և այլն: Այս ընթացքը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ չի ապահովվել  $\delta_i$  ճշտությունը: Այդ նպատակի համար կարելի է կիրառել, օրինակ, սխալանքի գործնական գնահատման Ռունգեի կանոնը (տե՛ս (8.5.9) բանաձևը), այն է՝ որպես ընթացքի ավարտման չափանիշ օգտագործել

$$\frac{|Q_i^{(k)}(f) - Q_i^{(k-1)}(f)|}{2^p - 1} < |\delta_i|$$

պայմանը (հիշեցնենք, որ Սիմպսոնի բանաձևի դեպքում  $p = 4$ ): Հենց որ նշված պայմանը բավարարված է, ընթացքը դադարեցվում է և վերցվում է  $Q_i(f) \equiv Q_i^{(k)}(f)$ :

Հատուկ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ քառակուսացման բանաձևի քայլի կիսման գործողությունը հնարավորություն է տալիս օգտագործել  $f(x)$  ֆունկցիայի արդեն հաշվված արժեքները  $[x_{i-1}, x_i]$  հատվածի նախորդ տրոհման հանգույցներում: Դա էապես տնտեսում է մեքենայական ժամանակը:

Սեկ անգամ ևս նշենք, որ այստեղ մենք նկարագրեցինք ադապտիվ ալգորիթմների կառուցման միայն հիմնական սկզբունքները՝ չմտնելով մանրամասնությունների մեջ: Այդ հարցերի ավելի մանրամասն և ամբողջական շարադրանքը կարելի է գտնել հատուկ գրականության մեջ (տե՛ս [3, 38, 64, 77] գրքերը):

## Խնդիրներ և վարժություններ - 8

1. Տրված են հետևյալ ինտեգրալները.

$$\text{ա) } \int_0^1 \sin x^2 dx, \quad \text{բ) } \int_0^1 e^{x^2} dx :$$

Գնահատել հանգույցների թիվը, որը բավարար է այդ ինտեգրալները միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերով  $10^{-4}$  ճշտությամբ հաշվելու համար:

2. Գնահատել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքը՝ ըստ

$$Q(f) = [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \dots + 2f(0.9) + f(1.0)]/20$$

քառակուսացման բանաձևի:

3. Դիցուք

$$\int_0^1 f(x) dx$$

ինտեգրալը հաշվվում է սեղանների բանաձևով: Գնահատել հանգույցների թիվը, որն ապահովում է  $0.5 \cdot 10^{-4}$  ճշտությամբ  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \leq 1$  պայմանին բավարարող  $f(x)$  ֆունկցիաների դասում:

## 4. Դիցուք

$$\int_0^2 f(x) dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար օգտագործվում է Սիմպսոնի բանաձևը: Գնահատել հանգույցների թիվը, որն ապահովում է  $0.5 \cdot 10^{-4}$  ճշտությամբ  $\max_{0 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| \leq 1$  պայմանին բավարարող  $f(x)$  ֆունկցիաների դասում:

## 5. Սիմպսոնի բանաձևում քանի՞ հանգույց պետք է վերցնել

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

ինտեգրալը  $10^{-4}$  ճշտությամբ հաշվելու համար:

## 6. Գնահատել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքը՝ ըստ

$$Q(f) = [f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + \dots + 4f(0.9) + f(1.0)]/30$$

քառակուսացման բանաձևի:

## 7. Վերցնելով ինը հանգույց, ի՞նչ ճշտությամբ կարելի է հաշվել

$$\int_0^1 \sin(e^x) dx$$

ինտեգրալը միջին ուղղանկյունների և Սիմպսոնի բանաձևերի միջոցով:

## 8. Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{90} \left[ 7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1) \right]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

9. Կիրառելով անորոշ գործակիցների մեթոդը՝ արտածել սեղանների և Միմպսոնի բանաձևերը:

10. Ելնելով

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

հավասարությունից՝ գտնել  $\pi$  թվի մոտավորությունները:

11. Կառուցել երկրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար ճշգրիտ

$$\int_1^3 f(x) dx \approx Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$$

քառակուսացման բանաձևը:

12. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0f(0) + A_1f\left(\frac{2}{3}\right),$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորինս բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

13. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0f\left(\frac{1}{2}\right) + A_1f\left(\frac{2}{3}\right)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորինս բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

14. Կառուցել

$$\int_0^2 f(x) dx \approx A_0f(0) + A_1f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2f(2)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորինս բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

15. Գտնել  $f(x) = ae^x + b \cos(\pi x/2)$  տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0f(0) + A_1f(1)$$

քառակուսացման բանաձևի գործակիցները:

16. Գտնել  $f(x) = a + b \cos x$  տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$$

քառակուսացման բանաձևի գործակիցները:

17. Դիցուք  $A, B, C$  կետերը հարթության մեջ գտնվող  $T$  եռանկյան միջնակետերն են: Ցույց տալ, որ

$$\int_T f(x) dx \approx \frac{\text{mes}(T)}{3} [f(A) + f(B) + f(C)]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երկու փոփոխականի երկրորդ աստիճանի

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

բազմանդամների համար ( $x = (x_1, x_2)$  -ը հարթության կետ է):

18. Դիցուք  $R$ -ը  $x = (x_1, x_2)$  հարթության վրա գտնվող ուղղանկյուն է,  $A, B, C, D$  կետերը նրա կողմերի միջնակետերն են, իսկ  $E$ -ն նրա կենտրոնն է: Ցույց տալ, որ

$$\int_R f(x) dx \approx \frac{\text{mes}(R)}{6} [f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 2f(E)]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երկու փոփոխականի երրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

19.  $[-1, 1]$  հատվածում արտածել Գաուսի քառակուսացման բանաձևը  $n = 3$  դեպքի համար:

20.  $\alpha$ -ի ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(\alpha) + f(2 - \alpha)$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների դասում:



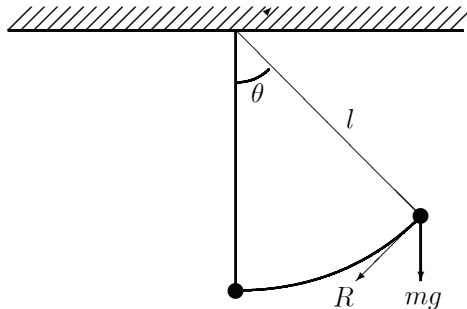
## Գլուխ 9

# ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

### 9.1 Կոշիի խնդիրը

Մեխանիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի, գիտության և տեխնիկայի այլ բնագավառների շատ խնդիրների մաթեմատիկական մոդելավորումը ի վերջո հանգում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների: Ուստի այդ հավասարումների լուծումը կարևոր տեղ է զբաղեցնում կիրառական մաթեմատիկայում: Բերենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող խնդիրների մի քանի օրինակ:

**Օրինակ 9.1.1** (ճոճանակի ազատ տատանումների խնդիրը): Գիցուք  $l$  երկարության ձողի վրա ամրացված  $m$  զանգվածով նյութական մարմինը ծանրության ուժի ազդեցության տակ կատարում է ազատ տատանումներ դիմադրող միջավայրում (նկ. 9.1.1): Ենթադրվում է, որ ձողի կշիռը  $m$ -ի համեմատությամբ չնչին է: Այդպիսի ֆիզիկական համակարգը կոչվում է *ճոճանակ*:



Նկ. 9.1.1 Ճոճանակի ազատ տատանումները

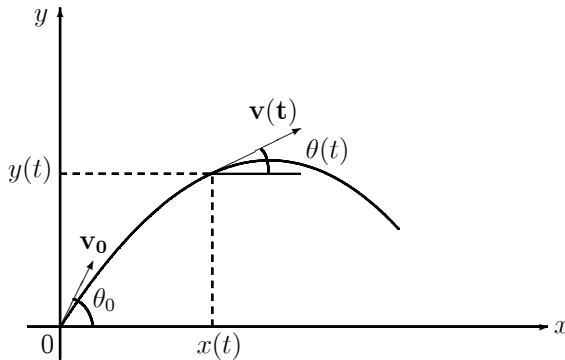
Ճոճանակի ուղղաձիգ առանցքից շեղման  $\theta(t)$  անկյունը ժամանակի  $t$  պահին որոշվում է

$$\theta''(t) + a\theta'(t) + b\sin\theta(t) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարումից, որտեղ  $a$ -ն և  $b$ -ն դրական հաստատուններ են, որոնք կախված են  $l$ -ից,  $m$ -ից, ազատ անկման  $g$  արագացումից և միջավայրի  $R$  դիմադրությունից: Ընդ որում, ժամանակի  $t = t_0$  սկզբնական պահին տրվում են սկզբնական շեղումը և սկզբնական անկյունային արագությունը.

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \omega_0 : \quad \diamond$$

**Օրինակ 9.1.2** (հետագծի խնդիրը): Գիտարկվում է երկրագնդի մակերևույթին որոշ անկյան տակ արձակվող արկի շարժումը: Մաթեմատիկական մոդելի պարզեցման համար ենթադրվում է, որ արկը տեղափոխվում է այնպիսի հեռավորություն, որի դեպքում երկրագնդի մակերևույթը կարելի է համարել տափակ: Ենթադրվում է նաև, որ արկի հետագիծը գտնվում է միևնույն հարթության մեջ, այսինքն՝ ենթադրվում է քամու և այլ արգելքների բացակայությունը: Նշված ենթադրությունների պայմաններում ընտրվում է կոորդինատական համակարգ, որի սկզբնակետը համընկնում է արձակման կետի հետ: Արկի հետագիծը պատկերված է նկ. 9.1.2-ում:



**Նկ. 9.1.2** Արկի հետագիծը

Գիցուք  $x(t)$ -ն և  $y(t)$ -ն արկի կոորդինատներն են ժամանակի  $t$  պահին: Համարելով, որ արկն արձակված է  $t = 0$  պահին, ունենք

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad (9.1.1)$$

սկզբնական պայմանները: Գիցուք  $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ -ն արկի արագության վեկտորն է: Նշանակենք այդ վեկտորի մեծությունը  $v(t)$ -ով, իսկ նրա անկյունը հորիզոնի հետ  $\theta(t)$ -ով, ինչպես ցույց է տրված նկ. 9.1.2-ում: Այդ մեծությունները որոշվում են

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}, \quad \theta(t) = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (9.1.2)$$

արտահայտություններից: Արկի շարժման հավասարումները գրվում են

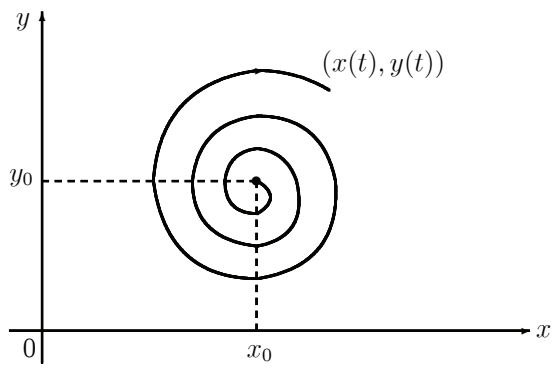
$$x''(t) = -\frac{c\rho s}{2m} v^2(t) \cos \theta(t), \quad y''(t) = -\frac{c\rho s}{2m} v^2(t) \sin \theta(t) - g \quad (9.1.3)$$

տեսքով, որտեղ  $m$ -ը արկի զանգվածն է,  $s$ -ը արկի լայնական հատույթն է,  $c$ -ն դիմադրության գործակիցն է,  $\rho$ -ն օդի խտությունն է, իսկ  $g$ -ն՝ ազատ անկման արագացումը: Այսպիսով, ունենք երկու ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Այդ համակարգի լուծումը պետք է բավարարի (9.1.1) սկզբնական պայմաններին: Երկու այլ պայմանները տրվում են

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (9.1.4)$$

հավասարություններով, որտեղ  $v_0$ -ն արկի մեկնարկային արագությունն է, իսկ  $\theta_0$ -ն՝ արձակման անկյունը:  $\diamond$

**Օրինակ 9.1.3** (գիշատիչ-գոհ մոդելը): Ուսումնասիրվում է երկու կենսաբանական տեսակների պոպուլյացիայի դինամիկան, որոնք միմյանց վրա փոխազդում են *գիշատիչ-գոհ* սկզբունքով: Ընդ որում, ենթադրվում է, որ գոհը կարող է հայթայթել բավարար սնունդ, բայց գիշատչի հետ ամեն մի հանդիպման ժամանակ վերջինս սպանում է գոհին:



**Նկ. 9.1.3** Գիշատիչների և գոհերի պոպուլյացիայի դինամիկան

Դիցուք  $x(t)$ -ն և  $y(t)$ -ն համապատասխանաբար գոհերի և գիշատիչների քանակներն են ժամանակի  $t$  պահին: Որոշ պարզեցումներից հետո դիֆերենցիալ հավասարումները քանակների նկատմամբ գրվում են

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) + \beta x(t)y(t), \\ y'(t) &= \gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

տեսքով, որտեղ  $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta > 0$  որոշ հաստատուններ են: Ժամանակի սկզբնական պահին տրվում են նաև

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (9.1.6)$$

պայմանները: Վերը բերված (9.1.5) հավասարումներն առաջին անգամ արտաձվել են 1925 թ. և հայտնի են որպես *Լոտկա-Վոլտերայի հավասարումներ*:

Պարզվում է, որ գոհերի և գիշատիչների պոպուլյացիայի դինամիկան  $(x, y)$  հարթության մեջ գրաֆիկորեն բնութագրվում է բացվող պարուրագծով, որը հեռանում է  $(x_0, y_0)$  կետից (նկ. 9.1.3):  $\diamond$

Մի շարք հավասարումների համար (օրինակ, անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ, հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարումներ և այլն) հաջողվում է լուծումն ստանալ բացահայտ տեսքով: Սակայն այն հավասարումների դասերը, որոնց համար մշակված են ճշգրիտ լուծման մեթոդներ, բավականին նեղ են և ընդգրկում են գործնականում հանդիպող խնդիրների միայն փոքր մասը: Օրինակ,

$$u'(x) = x^2 + u^2(x) \quad (9.1.7)$$

հավասարման լուծումը չի ներկայացվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Ուստի այդպիսի հավասարումների լուծման համար օգտագործվում են մոտավոր մեթոդներ:

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մոտավոր մեթոդները տրոհվում են հիմնականում երկու խմբի՝ *վերլուծական* և *թվային*:

*Վերլուծական* սովորաբար անվանում են այն մեթոդները, որոնց միջոցով կառուցվում է ճշգրիտ լուծմանը ձգտող ֆունկցիաների հաջորդականություն: Ընդհատելով հաջորդականությունը՝ ստանում են մոտավոր արտահայտություն ճշգրիտ լուծման համար: Սակայն վերլուծական մեթոդները հարմար են միայն այն դեպքում, երբ միջանկյալ հաշվարկների մեծ մասը հաջողվում է կատարել ճշգրիտ: Դա իրագործելի է համեմատաբար պարզ հավասարումների համար, ինչը խիստ սահմանափակում է մեթոդի կիրառումը: Բացի այդ, վերլուծական մեթոդներում երբեմն օգտագործվում են հավասարումների պարզեցումներ, որոնք էապես չեն ազդում լուծման վրա: Որոշ խնդիրներում հաջողվում է լուծումը ներկայացնել երկու բաղադրիչների գումարի տեսքով, որոնցից մեկը տալիս է լուծման մեջ հիմնական ներդրումը, իսկ երկրորդը փոքր հավելում է, որը կարելի է անտեսել:

*Թվային մեթոդների* միջոցով հաշվվում են լուծման արժեքները արգումենտի արժեքների որոշ դիսկրետ բազմության կետերում: Գործնականում շատ տարածված է *վերջավոր տարբերությունների* կամ *տարբերական* մեթոդը: Նրա էությունն այն է, որ դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալները փոխարինվում են վերջավոր տարբերական առնչություններով (տես պարագրաֆ 9.3): Տարբերական մեթոդները կիրառելի են խնդիրների լայն դասի համար: Բավականաչափ մեծ օպերատիվ հիշողության ծավալ ունեցող արագագործ համակարգիչների երևան գալու հետ մեկտեղ՝ այդ մեթոդները դարձել են դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական գործիքներից մեկը:

Մոտավոր մեթոդների ուսումնասիրումը սկսենք Կոշիի խնդրից:

Գիտարկենք  $n$ -րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարում

$$u^{(n)}(x) = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) : \tag{9.1.8}$$

Կոշիի խնդիրը այդ հավասարման համար ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. գտնել (9.1.8) հավասարման լուծումը, որը  $x = x_0$  կետում բավարարում է

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_0^{(1)}, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \tag{9.1.9}$$

սկզբնական պայմաններին, որտեղ  $u_0, u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(n-1)}$  տրված արժեքներ են:

Սույն դասագրքում մենք կուսումնասիրենք

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \tag{9.1.10}$$

Կոշիի խնդրի լուծման մոտավոր մեթոդները: Ձևակերպենք այդ խնդրի լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները (տե՛ս, օրինակ, [36, 53, 74]):

Գիցուք  $f(x, u)$  ֆունկցիան սահմանված է և անընդհատ

$$D = \{(x, u) : |x - x_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\} \tag{9.1.11}$$

փակ սահմանափակ տիրույթում: Ուստի այն սահմանափակ է  $D$  տիրույթում, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի  $M > 0$  թիվ, որ

$$|f(x, u)| \leq M \quad \forall (x, u) \in D : \tag{9.1.12}$$

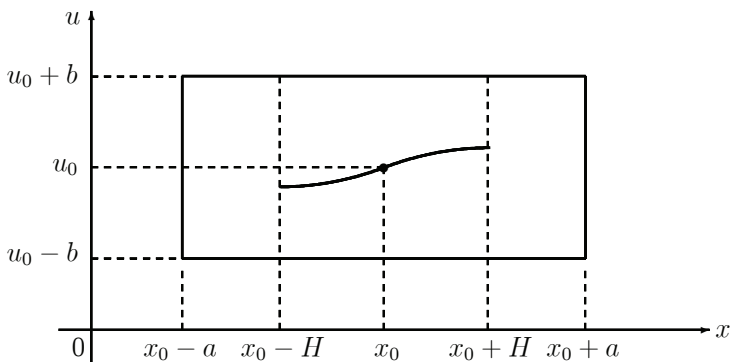
Այնուհետև, դիցուք  $f(x, u)$  ֆունկցիան  $D$  տիրույթում  $u$  փոփոխականի նկատմամբ բավարարում է *Լիպշիցի պայմանին*, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի  $L > 0$  թիվ, որ

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2| \quad \forall (x, u_1), (x, u_2) \in D : \tag{9.1.13}$$

Այդ դեպքում  $x_0$  կետի  $|x - x_0| \leq H$  շրջակայքում, որտեղ

$$H \equiv \min(a, b/M), \tag{9.1.14}$$

գոյություն ունի (9.1.10) խնդրի միակ լուծումը (նկ. 9.1.4):



**Նկ. 9.1.4** Լուծումը սկզբնական կետի շրջակայքում

Եթե  $f(x, u)$  ֆունկցիան  $D$  տիրույթում ունի սահմանափակ  $f'_u(x, u)$  մասնական ածանցյալ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի  $L > 0$  թիվ, որ

$$|f'_u(x, u)| \leq L \quad \forall (x, u) \in D, \quad (9.1.15)$$

ապա այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Իրոք, ըստ Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմի, ունենք

$$f(x, u_1) - f(x, u_2) = f'_u(x, \theta u_1 + (1 - \theta)u_2)(u_1 - u_2), \quad 0 < \theta < 1 :$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (9.1.13) անհավասարությունը:

## 9.2 Վերլուծական մոտավոր մեթոդներ

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք (9.1.10) Կոշիի խնդրի լուծման երկու վերլուծական մեթոդ: Ընդ որում՝ կենթադրենք, որ տեղի ունեն նախորդ պարագրաֆում բերված խնդրի լուծման գոյության և միակության (9.1.11)–(9.1.14) բավարար պայմանները:

### 9.2.1 Պիկարի մեթոդը

Կառուցենք մոտավոր լուծումներ  $x \geq x_0$  արժեքների համար ( $x \leq x_0$  դեպքը լիովին համանման է): Ինտեգրելով (9.1.10) հավասարումը  $x_0$ -ից  $x$  սահմաններում՝ կստանանք

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt : \quad (9.2.1)$$

Վերջին հավասարության մեջ փոխարինենք ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող  $u$  անհայտ ֆունկցիան  $u_0$  սկզբնական արժեքով: Արդյունքում կստանանք որոնելի լուծման առաջին մոտարկումը.

$$u_1(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_0) dt :$$

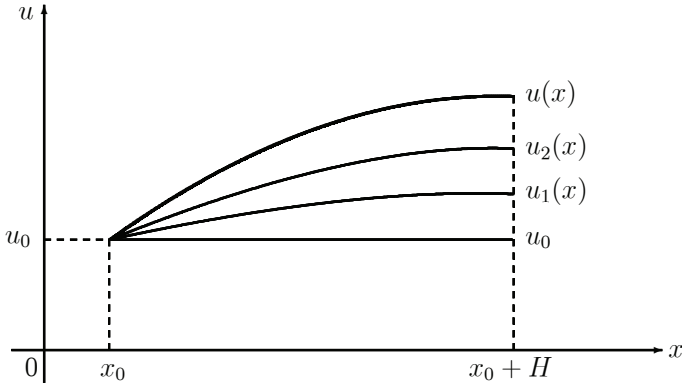
Այնուհետև, տեղադրելով (9.2.1) հավասարության աջ մասում  $u$ -ի փոխարեն գտնված  $u_1$  ֆունկցիան, կստանանք երկրորդ մոտարկումը.

$$u_2(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_1(t)) dt :$$

Ընդհանուր դեպքում հաջորդական մոտարկումները ստացվում են

$$u_n(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.2.2)$$

բանաձևով (այստեղ  $u_0(x) \equiv u_0$ ): Գրաֆիկորեն  $u_n(x)$  հաջորդական մոտարկումները  $M_0(x_0, u_0)$  կետով անցնող կորեր են (նկ. 9.2.1):



**Նկ. 9.2.1** Մոտարկումներ ըստ Պիկարի մեթոդի

Ապացուցենք, որ (9.2.2) բանաձևով ստացված  $u_n(x)$  մոտավոր լուծումները  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածում, որտեղ  $H$  մեծությունը որոշվում է համաձայն (9.1.14)-ի, հավասարաչափ գուգամիտում են (9.1.10) խնդրի ճշգրիտ լուծմանը:

Նախ ցույց տանք, որ բոլոր  $n = 0, 1, 2, \dots$  արժեքների համար  $(x, u_n(x))$  կետերը, որտեղ  $x \in [x_0, x_0 + H]$ , պատկանում են (9.1.11)-ում որոշված  $D$  փակ ուղղանկյուն տիրույթին: Իրոք,  $n = 0$  արժեքի համար դա սկնհայտ է: Դիցուք պնդումը ճիշտ է  $n - 1$ -ի համար: Այդ դեպքում (9.2.2)-ից, հաշվի առնելով (9.1.12) և (9.1.14)-ը, կստանանք

$$|u_n(x) - u_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, u_{n-1}(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq MH \leq b,$$

ինչն ապացուցում է պնդումը:

Դիտարկենք  $n = 0, 1, \dots$  արժեքների համար

$$\varepsilon_n(x) \equiv |u(x) - u_n(x)|, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H \tag{9.2.3}$$

սխալանքները: Երբ  $n = 0$ , օգտվելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմից, ունենք

$$\varepsilon_0(x) = |u(x) - u_0| = |u(x) - u(x_0)| = |u'(\xi)|(x - x_0), \quad \xi \in (x_0, x) :$$

Քանի որ ըստ (9.1.12) գնահատականի  $|u'(\xi)| = |f(\xi, u(\xi))| \leq M$ , ապա

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - x_0) : \tag{9.2.4}$$

Երբ  $n \geq 1$ , (9.2.1) և (9.2.2)-ից հետևում է

$$u(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^x [f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))] dt$$

հավասարությունը: Վերջինից ստանում ենք

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| dt$$

անհավասարությունը: Ըստ Լիպշիցի պայմանի ունենք

$$|f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| \leq L |u(t) - u_{n-1}(t)| = L \varepsilon_{n-1}(t) :$$

Ուստի

$$\varepsilon_n(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (9.2.5)$$

Օգտվելով (9.2.5) անդրադարձ առնչություններից և (9.2.4) գնահատականից՝ հաջորդաբար ստանում ենք հետևյալ գնահատականները.

$$\varepsilon_1(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_0(t) dt \leq LM \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_1(t) dt \leq L^2 M \int_{x_0}^x \frac{(t - x_0)^2}{2!} dt = L^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

և այլն: Այսպիսով,

$$\varepsilon_n(x) \leq L^n M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots : \quad (9.2.6)$$

Այս գնահատականից հետևում է, որ  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածում  $\varepsilon_n(x)$  սխալանքը հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, երբ  $n \rightarrow \infty$ :

Պիկարի մեթոդը հարմար է կիրառել, երբ (9.2.2) բանաձևի աջ մասի ինտեգրալները հաջողվում է արտահայտել տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Իսկ եթե (9.1.10) հավասարման աջ մասը այնքան բարդ է, որ ինտեգրալները ստիպված ենք հաշվել մոտավոր, ապա մեթոդը դառնում է գործնականորեն քիչ պիտանի:

**Օրինակ 9.2.1 :** Կիրառենք Պիկարի մեթոդը

$$u'(x) = x^2 + u^2, \quad u(0) = 0$$

հավասարման համար, որի լուծումը, ինչպես արդեն ասվել էր նախորդ պարագրաֆում, չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով:



Այս դեպքում (9.2.2) բանաձևերում ինտեգրալները հաշվվում են ճշգրիտ, և մենք հեշտությամբ ստանում ենք

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 0, \\ u_1(x) &= \frac{x^3}{3}, \\ u_2(x) &= \frac{x^3}{3} \left( 1 + \frac{x^4}{21} \right), \\ u_3(x) &= \frac{x^3}{3} \left( 1 + \frac{x^4}{21} + \frac{2x^8}{693} + \frac{x^{12}}{19845} \right) \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

և այլն: Դժվար չէ տեսնել, որ  $x \leq 1$  արժեքների համար այս մոտարկումները արագ գուգամիտում են և թույլ են տալիս հաշվել լուծումը բարձր ճշտությամբ:  $\diamond$

## 9.2.2 Աստիճանային շարքերի մեթոդը

Նկարագրենք մեկ այլ վերլուծական մեթոդ, որը հիմնված է լուծումը աստիճանային շարքով ներկայացնելու գաղափարի վրա: Հաճախ այդ նպատակով օգտագործվում են Թեյլորի շարքերը: Ենթադրելով, որ Կոշիի խնդրի լուծումը բավականաչափ ողորկ է, փնտրենք մոտավոր լուծումը

$$u_n(x) = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (9.2.8)$$

տեսքով: Այստեղ  $u^{(k)}(x_0)$  ածանցյալները արտահայտվում են (9.1.10) հավասարման աջ մասի մասնական ածանցյալների միջոցով.

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= f(x_0, u_0), \\ u''(x_0) &= f'_x(x_0, u_0) + f'_u(x_0, u_0) f(x_0, u_0), \\ u'''(x_0) &= f''_{xx}(x_0, u_0) + 2f''_{xu}(x_0, u_0) f(x_0, u_0) + f''_{uu}(x_0, u_0) f^2(x_0, u_0) + \\ &\quad f'_u(x_0, u_0) [f'_x(x_0, u_0) + f'_u(x_0, u_0) f(x_0, u_0)] \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

և այլն:

Այս մեթոդը բավականաչափ մեծ  $n$ -երի համար  $x_0$ -ի շրջակայքում տալիս է (9.1.10) խնդրի ճշգրիտ լուծման բավականին լավ մոտարկում: Սակայն սխալանքը,  $x_0$  սկզբնական կետից հեռացմանը զուգընթաց, ընդհանրապես ասած, աճում է: Դեռ ավելին, մեթոդը դառնում է անընդունելի, երբ  $x$ -ը դուրս է գալիս  $u(x)$  ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի գուգամիտության տիրույթից: Շարքի գուգամիտության շառավիղի գնահատման հարցը բավականին բարդ է (տե՛ս, օրինակ, [45]), և այստեղ մենք այն չենք քննարկի:

**Օրինակ 9.2.2 :** Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը.

$$u'(x) = x^2 + u^2, \quad u(0) = 0 :$$

Ըստ (9.2.9) բանաձևերի գտնում ենք  $u'(0) = 0, u''(0) = 0, u'''(0) = 2$ : Այդ դեպքում համաձայն (9.2.8) -ի կստանանք

$$u_3(x) = \frac{x^3}{3}$$

(համեմատել Պիկարի մեթոդով ստացված (9.2.7) մոտավոր լուծումների հետ):  $\diamond$

Աստիճանային շարքերի մեթոդի թերություններից մեկն այն է, որ (9.2.9) բանաձևերը մեծածավալ են. դրանք պահանջում են  $f(x, u)$  ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների հաշվում:

## 9.3 Թվային դիֆերենցման բանաձևեր

Թվային դիֆերենցման խնդիրը առաջանում է այն ժամանակ, երբ  $u(x)$  ֆունկցիան, որի ածանցյալը պետք է հաշվել, տրված է աղյուսակով կամ ունի բավականաչափ բարդ վերլուծական տեսք: Առաջին դեպքում դիֆերենցիալ հաշվի մեթոդները կիրառելի չեն, իսկ երկրորդ դեպքում մենք կարող ենք առնչվել տեսական և հաշվողական բարդությունների հետ:

### 9.3.1 Թվային դիֆերենցման պարզագույն բանաձևերը

Ֆունկցիայի ածանցյալի մոտավոր արժեքը հաշվելու համար օգտվենք ածանցյալի սահմանումից: Ընտրելով բավականաչափ փոքր քայլ  $h > 0$ , կարող ենք գրել՝

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \equiv u_x(x_0), \quad (9.3.1)$$

կամ

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} \equiv u_{\bar{x}}(x_0), \quad (9.3.2)$$

կամ էլ

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} \equiv u_{\circ}(x_0) : \quad (9.3.3)$$

Այս արտահայտություններից առաջինը անվանում են *աջակողմյան տարբերական ածանցյալ*, երկրորդը *ձախակողմյան տարբերական ածանցյալ*, իսկ երրորդը՝ *կենտրոնական տարբերական ածանցյալ*:

Հարց է ծագում. ինչպիսի՞ն է թվային դիֆերենցման (9.3.1) – (9.3.3) բանաձևերի սխալանքը: Այդ հարցի պատասխանը տալիս են հետևյալ երեք պնդումները:

**Լեմմա 9.3.1 :** Եթե  $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + h]$ , ապա

$$|u'(x_0) - u_x(x_0)| \leq \frac{M_2}{2}h, \quad (9.3.4)$$

որտեղ  $M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0+h} |u''(x)|$ :

Ապացույց: Գրենք Թեյլորի վերլուծությունը.

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1 :$$

Այստեղից կստանանք

$$u_x(x_0) = u'(x_0) + \frac{h}{2}u''(x_0 + \theta h)$$

հավասարությունը, որից անմիջապես հետևում է (9.3.4) գնահատականը:  $\square$

**Լեմմա 9.3.2 :** Եթե  $u(x) \in C^2[x_0 - h, x_0]$ , ապա

$$|u'(x_0) - u_{\bar{x}}(x_0)| \leq \frac{M_2}{2}h, \quad (9.3.5)$$

որտեղ  $M_2 \equiv \max_{x_0-h \leq x \leq x_0} |u''(x)|$ :

Ապացույց: Ըստ Թեյլորի բանաձևի

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0 - \theta h), \quad 0 < \theta < 1 :$$

Այստեղից հետևում է

$$u_{\bar{x}}(x_0) = u'(x_0) - \frac{h}{2}u''(x_0 - \theta h)$$

հավասարությունը և (9.3.5) գնահատականը:  $\square$

**Լեմմա 9.3.3 :** Եթե  $u(x) \in C^3[x_0 - h, x_0 + h]$ , ապա

$$|u'(x_0) - u_x(x_0)| \leq \frac{M_3}{6}h^2, \quad (9.3.6)$$

որտեղ  $M_3 \equiv \max_{x_0-h \leq x \leq x_0+h} |u'''(x)|$ :

Ապացույց: Գրենք Թեյլորի վերլուծությունները.

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u'''(x_0 + \theta_1 h),$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) - \frac{h^3}{6}u'''(x_0 - \theta_2 h),$$

որտեղ  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ : Հանելով առաջին հավասարությունից երկրորդը և կատարելով պարզ ձևափոխություններ՝ կստանանք

$$u_{x_0}''(x_0) = u'(x_0) + \frac{h^2}{12} (u'''(x_0 + \theta_1 h) + u'''(x_0 - \theta_2 h)) :$$

Այստեղից կստանանք (9.3.6) գնահատականը:  $\square$

Այժմ արտաձենք տարբերական բանաձև երկրորդ կարգի ածանցյալի համար.

$$\begin{aligned} u''(x_0) &\approx \frac{u'(x_0 + h) - u'(x_0)}{h} \approx \frac{(u(x_0 + h) - u(x_0))/h - (u(x_0) - u(x_0 - h))/h}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$u''(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \equiv u_{x\bar{x}}(x_0) : \quad (9.3.7)$$

**Լեմմա 9.3.4 :** Եթե  $f(x) \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$ , ապա

$$|u''(x_0) - u_{x\bar{x}}(x_0)| \leq \frac{M_4}{12} h^2, \quad (9.3.8)$$

որտեղ  $M_4 \equiv \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} |u^{(4)}(x)|$ :

Ապացույց: Ըստ Թեյլորի բանաձևի ունենք

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0) + \frac{h^3}{6} u'''(x_0) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_0 + \theta_1 h),$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0) - \frac{h^3}{6} u'''(x_0) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_0 - \theta_2 h),$$

որտեղ  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ : Անդամ առ անդամ գումարենք այս հավասարությունները.

$$u(x_0 + h) + u(x_0 - h) = 2u(x_0) + h^2 u''(x_0) + \frac{h^4}{24} (u^{(4)}(x_0 + \theta_1 h) + u^{(4)}(x_0 - \theta_2 h)) :$$

Այստեղից կստանանք

$$u_{x\bar{x}}(x_0) = u''(x_0) + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(x_0 + \theta_1 h) + u^{(4)}(x_0 - \theta_2 h))$$

հավասարությունը, որից հետևում է (9.3.8) գնահատականը:  $\square$

### 9.3.2 Բանաձևերի հաշվողական սխալանքի մասին

Վերը ստացված լեմմաներից հետևում է, որ քայլի փոքրացումը բերում է թվային դիֆերենցման բանաձևերի սխալանքի նվազեցմանը: Խոսքն այնտեղ մեթոդի սխալանքի մասին է: Իսկ ինչ վերաբերում է իրական հաշվարկներին, ապա բանաձևերի քայլի փոքրացումը կարող է առաջացնել հաշվողական սխալանքի անսահմանափակ աճ: Որպես օրինակ դիտարկենք (9.3.1) բանաձևը: Ենթադրենք  $u(x_0)$  և  $u(x_0 + h)$  արժեքների փոխարեն իրականում ունենք համապատասխանաբար  $u^*(x_0)$  և  $u^*(x_0 + h)$  արժեքները այնպես, որ

$$u^*(x_0) = u(x_0) + \varepsilon_0, \quad u^*(x_0 + h) = u(x_0 + h) + \varepsilon_1, \quad (9.3.9)$$

$$|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1| \leq \varepsilon :$$

Նշենք, որ  $\varepsilon_i$  սխալանքները կարող են առաջանալ հաշվարկների արդյունքների կլորացման ժամանակ, կա՛մ ֆունկցիան մոտավոր բանաձևով հաշվելիս, կա՛մ էլ որոշվում է չափումների միջոցով և այլն: Այսինքն, (9.3.1) մոտավոր հավասարության աջ մասում իրականում կունենանք այլ արտահայտություն, այն է՝

$$u'(x_0) \approx \frac{u^*(x_0 + h) - u^*(x_0)}{h} : \quad (9.3.10)$$

Գնահատենք սխալանքը: Պարզության համար (9.3.10) մոտավոր հավասարության աջ մասի հաշվման ժամանակ առաջացած կլորացումները կանտեսենք: Այսպիսով, համաձայն (9.3.9)-ի՝ ունենք

$$u'(x_0) - \frac{u^*(x_0 + h) - u^*(x_0)}{h} = u'(x_0) - \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{h} :$$

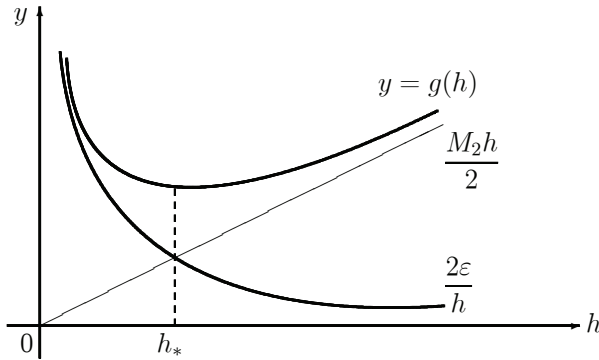
Այստեղից, օգտվելով (9.3.4) գնահատականից, կստանանք, որ

$$\left| u'(x_0) - \frac{u^*(x_0 + h) - u^*(x_0)}{h} \right| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\varepsilon}{h} \equiv g(h) : \quad (9.3.11)$$

Այսպիսով,  $g(h)$  գումարային սխալանքը բաղկացած է երկու բաղադրիչներից՝  $M_2 h / 2$  մեթոդի սխալանքից և  $2\varepsilon / h$  հաշվողական սխալանքից: Գծվար չէ նկատել, որ  $h$ -ի փոքրացմանը զուգընթաց մեթոդի սխալանքը նվազում է, մինչդեռ մեծանում է հաշվողական սխալանքը (նկ. 9.3.1):

Լուծելով  $g'(x) = 0$  հավասարումը՝ կստանանք (9.3.1) բանաձևի քայլի կրիտիկական արժեքը՝

$$h_* = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}} :$$



**Նկ. 9.3.1** Հաշվողական սխալանքի ազդեցությունը

Հարկ է նշել, որ ժամանակակից համակարգիչները օգտագործելիս՝  $h_*$  մեծությունը բավականաչափ փոքր է: Ուստի իրական հաշվարկների ժամանակ մենք որպես օրենք հասնում ենք պահանջվող ճշտությանը  $h > h_*$  քայլերի համար:

### 9.4 Տարբերական մեթոդների դասակարգումը

Դիտարկենք

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H \tag{9.4.1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(x_0) = u_0 \tag{9.4.2}$$

սկզբնական պայմանով: Դասակարգենք խնդրի լուծման տարբերական մեթոդները:

Դիցուք  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածում ընտրված է *հանգույցների* բազմություն՝

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_0 + H, \tag{9.4.3}$$

որը կանվանենք *ցանց*: Դիսկրետ արգումենտի  $v = \{v_n \equiv v(x_n)\}_{n=0}^N$  ֆունկցիա, որոշված ցանցի հանգույցներում, կանվանենք *ցանցային ֆունկցիա*:

Տարբերական մեթոդները թույլ են տալիս հաջորդաբար գտնել (9.4.1), (9.4.2) Կոշիի խնդրի մոտավոր լուծման  $v_n$  արժեքները (9.4.3) ցանցի հանգույցներում ըստ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, v_{n-p+1}, \dots, v_n, v_{n+s}) \tag{9.4.4}$$

օրենքի, որտեղ  $F$ -ը նշված արգումենտների ֆունկցիա է: Այդ ֆունկցիայի տեսքը կախված է մեթոդի կառուցման եղանակից և (9.4.1) հավասարման աջ մասից: Ընդունենք նաև, որ  $p$  պարամետրը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է (սովորաբար  $p \ll N$ ), իսկ  $s$  մեծությունը կարող է ընդունել երկու արժեք՝ 0 կամ 1: Եթե  $p = 0$ , ապա մեթոդը կոչվում է *միաքայլ*, իսկ եթե  $p \geq 1$ ՝ *բազմաքայլ*: Ինչպես միաքայլ,

այնպես էլ բազմաբայլ մեթոդները կոչվում են *բացահայտ*, երբ  $s = 0$ , և *անբացահայտ*, երբ  $s = 1$ : Այսպիսով, ունենք՝

- միաբայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (9.4.5)$$

- միաբայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (9.4.6)$$

- բազմաբայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \dots, v_n), \quad n = p, p + 1, \dots, N - 1, \quad (9.4.7)$$

- բազմաբայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \dots, v_n, v_{n+1}), \quad n = p, p + 1, \dots, N - 1 : \quad (9.4.8)$$

Բոլոր (9.4.5) – (9.4.8) մեթոդներում վերցվում է  $v_0 = u_0$ : Բացի դրանից, (9.4.7) և (9.4.8) բազմաբայլ մեթոդներում օգտագործվում են առաջին  $p$  արժեքները՝  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , որոնք որոշվում են այլ մեթոդների միջոցով կամ այլ լրացուցիչ նկատառումներից:

Թեև  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածի (9.4.3) անհավասարաչափ տրոհումը վերջավոր քվով մասերի չի առաջացնում հատուկ դժվարություններ, գործնականում հաճախ օգտագործվում է

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{H}{N} \quad (9.4.9)$$

*հավասարաչափ* ցանց, որտեղ  $h$  մեծությունը կոչվում է ցանցի *քայլ*:

Սահմաններ ցանցային ֆունկցիաների տարածության մեջ *նորմ*.

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} |w_n| : \quad (9.4.10)$$

Տարբերական մեթոդների զուգամիտությունը ուսումնասիրելիս մեզ անհրաժեշտ կլինի հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 9.4.1 :** *Դիցուք (9.4.9) հավասարաչափ ցանցի հանգույցներում որոշված  $z = \{z_n\}_{n=0}^N$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ*

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + hE, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (9.4.11)$$

*որտեղ  $L \geq 0$  և  $E \geq 0$  որոշ հաստատումներ են: Այդ դեպքում*

$$\|z\| \leq e^{HL}|z_0| + \frac{E}{L}(e^{HL} - 1) : \quad (9.4.12)$$

*Մասնավորապես, եթե  $z_0 = 0$ , ապա*

$$\|z\| \leq \frac{E}{L}(e^{HL} - 1) : \quad (9.4.13)$$

**Ապացույց:** Հաջորդաբար օգտագործելով (9.4.11) անհավասարությունները, կամայական  $n$ -ի համար, որտեղ  $n = 1, 2, \dots, N$ , կստանանք՝

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq (1 + hL)|z_{n-1}| + hE \leq (1 + hL)[(1 + hL)|z_{n-2}| + hE] + hE = \\ &(1 + hL)^2|z_{n-2}| + [1 + (1 + hL)]hE \leq \dots \leq (1 + hL)^n|z_0| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + hL)^k \cdot hE : \end{aligned}$$

Այնուհետև,

$$|z_n| \leq (1 + hL)^n|z_0| + \frac{E}{L}((1 + hL)^n - 1)$$

և

$$\|z\| \leq (1 + hL)^N|z_0| + \frac{E}{L}((1 + hL)^N - 1) :$$

Այստեղից, քանի որ

$$(1 + hL)^N = \left(1 + \frac{HL}{N}\right)^N \leq e^{HL}$$

(տե՛ս, օրինակ, [62]), կստանանք (9.4.12) գնահատականը, որի ակնհայտ հետևանքն է (9.4.13)-ը:  $\square$

## 9.5 Էյլերի մեթոդը

Նկարագրենք (9.4.1), (9.4.2) Կոշիի խնդրի թվային լուծման պարզագույն եղանակը: Գիցոք  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածում տրված է (9.4.9) հավասարաչափ ցանցը: Ցանցի  $x_n$  հանգույցում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , ունենք

$$u'(x_n) = f(x_n, u(x_n)) \quad (9.5.1)$$

հավասարությունը: Փոխարինենք  $u'(x_n)$  անանցյալը

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h}$$

տարբերական հարաբերությունով: Եթե  $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$ , ապա օգտագործելով Թեյլորի վերլուծությունը կստանանք

$$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

հավասարությունը (տե՛ս 9.3.1 լեմմայի ապացույցը): Վերջին հավասարությունից և (9.5.1)-ից հետևում է, որ  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_n, u(x_n)) + \varepsilon_n, \quad (9.5.2)$$



որտեղ

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1 : \quad (9.5.3)$$

Անտեսելով (9.5.2) հավասարությունում  $\varepsilon_n$  անդամը՝ հանգում ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1; \quad v_0 = u_0 \quad (9.5.4)$$

հավասարումների համակարգի, որից որոշվում է Կոշիի խնդրի  $v = \{v_n\}_{n=0}^N$  մոտավոր լուծումը: Այս մեթոդը կոչվում է *Էյլերի մեթոդ*: Սկսած  $v_0 = u_0$ -ից՝  $v_n$  մեծությունները հաջորդաբար հաշվվում են ըստ

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (9.5.5)$$

բանաձևի: Այսպիսով, Էյլերի մեթոդը միաբայլ բացահայտ մեթոդ է: Համեմատության համար՝

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) + h \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 : \quad (9.5.6)$$

Անվանենք  $\varepsilon_n$  մեծությունը (9.5.4) մեթոդի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Համաձայն (9.5.3)-ի՝  $\varepsilon_n = O(h)$ : Ուստի ասում են, որ Էյլերի մեթոդն ունի *մոտարկման առաջին կարգ*:

Տանք Էյլերի մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը: Ենթադրենք, որ  $x_n$  հանգույցում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, այսինքն՝  $v_n = u(x_n)$ : Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (9.5.1) և (9.5.5)-ից,

$$v_{n+1} = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) = u(x_n) + h u'(x_n) : \quad (9.5.7)$$

Հիմնվելով այս հավասարության վրա, նկ. 9.5.1-ում պատկերված է  $v_{n+1}$  մեծության ստացումը: Հիշեցնենք, որ  $u'(x_n) = \operatorname{tg} \alpha$ , որտեղ  $\alpha$ -ն շոշափողի կազմված անկյունն է  $Ox$  առանցքի հետ: Այնուհետև, (9.5.5) և (9.5.6)-ից գտնում ենք ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների տարբերությունը  $x_{n+1}$  հանգույցում, այն է՝

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h \varepsilon_n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (9.5.3)-ը, կստանանք

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2} h^2, \quad (9.5.8)$$

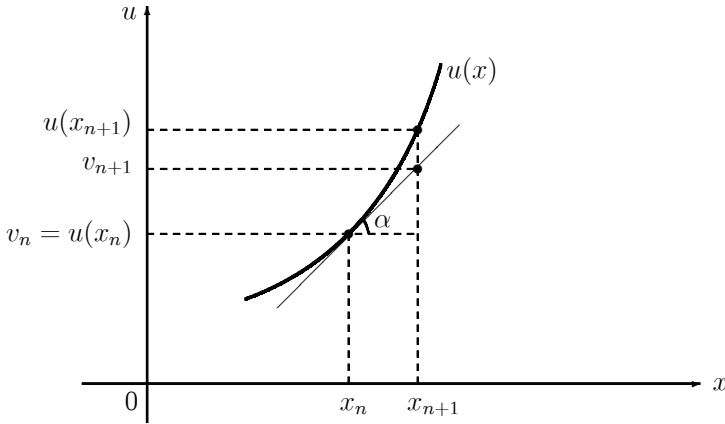
որտեղ  $M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)|$ : Այս մեծությունը, ելնելով

$$u''(x) = f'_x(x, u) + f'_u(x, u) f(x, u)$$

հավասարությունից, կարելի է գնահատել հետևյալ կերպ.

$$M_2 \leq \max_D |f'_x(x, u)| + LM$$

(տե՛ս (9.1.12) և (9.1.15)): Ստացված (9.5.8) գնահատականի հիման վրա ասում են, որ Էյլերի մեթոդի *տեղային սխալանքը*  $O(h^2)$  է:



**Նկ. 9.5.1** Էյլերի մեթոդի քայլը

Անցնենք Էյլերի մեթոդի գուգամիտության հարցի քննարկմանը: Դիտարկենք

$$z_n \equiv u(x_n) - v_n, \quad n = 0, 1, \dots, N \tag{9.5.9}$$

ցանցային սխալանքի ֆունկցիան: Սովորաբար տարբերում են սխալանքի հետևյալ երկու բաղադրիչները.

ա) մոտարկման սխալանք, որն առաջանում է (9.4.1) դիֆերենցիալ հավասարումը (9.5.4) տարբերական հավասարումներով փոխարինելու արդյունքում,

բ) հաշվողական սխալանք, որն առաջանում է  $f(x, u)$  ֆունկցիայի արժեքները հաշվելիս և ըստ (9.5.5) բանաձևերի թվաբանական գործողությունները կատարելու ընթացքում:

Մենք կքննարկենք հաշվողական սխալանքի ազդեցությունը ավելի ուշ, իսկ այժմ ուսումնասիրենք միայն մոտարկման սխալանքով պայմանավորված մեթոդի գուգամիտությունը: Այլ կերպ ասած, կհամարենք, որ  $v_{n+1}$  արժեքները հաշվվում են ըստ (9.5.5) բանաձևերի ճշգրիտ՝ առանց կլորացումների:

Ելնելով (9.5.5), (9.5.6) և (9.5.9)-ից՝ բոլոր  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար գրենք

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h \varepsilon_n$$

հավասարությունները և, համապատասխանաբար՝

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + h|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| + h|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները: Համաձայն (9.1.13) Լիպշիցի պայմանի՝ ունենք

$$|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| \leq L|z_n| :$$

Ուստի

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + h|\varepsilon_n| :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով  $\varepsilon_n$  մեծության (9.5.3) արտահայտությունը, կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + hE, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (9.5.10)$$

որտեղ

$$E \equiv \frac{M_2}{2} h \quad \text{և} \quad M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)| : \quad (9.5.11)$$

Գրանով  $z$  սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 9.4.1 լեմմայի պայմաններին: Իսկ քանի որ  $z_0 = 0$ , ապա համաձայն (9.4.13) անհավասարության, կստանանք Էյլերի մեթոդի սխալանքի

$$\|z\| \leq \frac{M_2}{2L}(e^{HL} - 1)h \quad (9.5.12)$$

զնահատականք: Այսպիսով,  $\|z\| = O(h)$ : Ուստի ասում են, որ Էյլերի մեթոդն ունի *առաջին կարգի ճշտություն*:

**Օրինակ 9.5.1 :** Կիրառենք Էյլերի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

Կոշիի խնդրի լուծման համար: Այդ խնդրի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$  ֆունկցիան է: Համեմատենք ստացված լուծումները  $h = 0.5, 0.25, 0.125$  և  $0.0625$  քայլերի դեպքում: Հաշվման արդյունքները բերված են հետևյալ աղյուսակում.

$x_n$	$v_n$				ճշգրիտ լուծում
	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125			0.9375	0.9404	0.9432392
0.250		0.8750	0.8867	0.8922	0.8974907
0.375			0.8469	0.8547	0.8620873
0.500	0.7500	0.7969	0.8174	0.8271	0.8364023
0.625			0.7976	0.8089	0.8198469
0.750		0.7598	0.7868	0.7996	0.8118678
0.875			0.7845	0.7985	0.8119456
1.000	0.6875	0.7585	0.7902	0.8051	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, քայլի փոքրացմանը զուգընթաց ճշտությունն աճում է:  $\diamond$

Հետազոտենք այժմ հաշվողական սխալանքի ազդեցությունը: Ենթադրենք, որ (9.5.5) բանաձևի աջ մասի հաշվման ժամանակ թույլ է տրված ինչ-որ  $\delta_n$  սխալանք: Փաստորեն ունենք

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n) + \delta_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 :$$

Այդ դեպքում (9.5.9) սխալանքի ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h\varepsilon_n - \delta_n \quad (9.5.13)$$

հավասարությունները: Ենթադրենք, որ  $|\delta_n| \leq \delta$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ : Ելնելով (9.5.13)-ից և կրկնելով վերը արված դատողությունները, (9.5.10) անհավասարությունների փոխարեն կստանանք

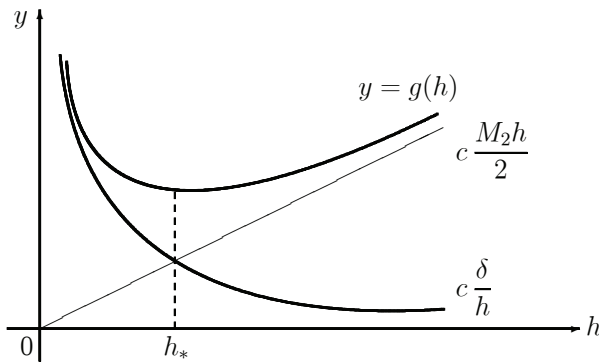
$$|z_{n+1}| \leq (1 + hL)|z_n| + h \left( E + \frac{\delta}{h} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

անհավասարությունները, որտեղ  $E$  մեծությունը որոշված է (9.5.11)-ում: Այնուհետև, կիրառելով 9.4.1 լեմման, կստանանք

$$\|z\| \leq \frac{e^{HL} - 1}{L} \left( \frac{M_2}{2} h + \frac{\delta}{h} \right) \equiv g(h) \quad (9.5.14)$$

գնահատականը:

Այսպիսով, Էյլերի մեթոդի  $g(h)$  գումարային սխալանքը ներառում է երկու բաղադրիչ. մոտարկման սխալանքով պայմանավորված  $c \cdot M_2 h/2$  մեթոդի սխալանքը և  $c \cdot \delta/h$  հաշվողական սխալանքը, որտեղ  $c \equiv (e^{HL} - 1)/L$ : Ընդ որում,  $h$  քայլի փոքրացմանը զուգընթաց մեթոդի սխալանքը գծորեն նվազում է, սակայն աճում է հաշվողական սխալանքը: Այս իրավիճակը գրաֆիկորեն պատկերված է նկ. 9.5.2-ում: Համանման երևույթի հետ մենք առնչվել ենք 9.4 պարագրաֆում՝ թվային դիֆերենցման բանաձևերը դիտարկելիս:



### Նկ. 9.5.2 Գումարային սխալանքի վարքը Էյլերի մեթոդում

Դժվար չէ ստանալ արտահայտություն  $h_*$  կրիտիկական քայլի համար, որի դեպքում (9.5.14) անհավասարության աջ մասը ընդունում է փոքրագույն արժեք՝

$$h_* = \sqrt{\frac{2\delta}{M_2}} :$$

Միաժամանակ նշենք, որ ժամանակակից համակարգիչների համար  $\delta$  մեծությունը շատ փոքր է: Գործնականում օգտագործվող քայլերը, որպես օրենք, ավելի մեծ են, քան  $h_*$ -ը և գումարային սխալանքի մեջ հիմնական ներդրումը կատարում է մոտարկման սխալանքը:

Տանք Էյլերի մեթոդի մեկ այլ տարբերակ, որը կրում է *Էյլերի անբացահայտ մեթոդ* անունը: Ունենալով

$$u'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \quad (9.5.15)$$

հավասարությունը՝ փոխարինենք  $u'(x_{n+1})$  ածանցյալը ձախակողմյան տարբերական ածանցյալով (տե՛ս (9.3.2)): Ընդ որում, եթե  $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$ , ապա

$$u'(x_{n+1}) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \varepsilon_{n+1}, \quad (9.5.16)$$

որտեղ

$$\varepsilon_{n+1} \equiv -\frac{h}{2} u''(x_{n+1} - \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

(տե՛ս 9.3.2 լեմմայի պայացույցը): Այսպիսով, (9.5.15) և (9.5.16)-ից հետևում է, որ բոլոր  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) + \varepsilon_{n+1} : \quad (9.5.17)$$

Գեն նետելով (9.5.17) հավասարություններում  $\varepsilon_{n+1} = O(h)$  անդամները, Կոշիի խնդրի  $v = \{v_n\}_{n=0}^N$  մոտավոր լուծումը որոշելու համար ստանում ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad v_0 = u_0 \quad (9.5.18)$$

հավասարությունների համակարգը: Այս մեթոդը անբացահայտ է, քանի որ  $v_{n+1}$  անհայտը գտնելու համար պահանջվում է լուծել

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_{n+1}, v_{n+1}) \quad (9.5.19)$$

հավասարումը, որն ընդհանուր դեպքում ոչ գծային է: Սովորաբար այդ նպատակի համար օգտագործվում են իտերացիոն մեթոդներ: Ուստի անբացահայտ մեթոդի կիրառումը պահանջում է բացահայտ մեթոդի համեմատությամբ ավելի ծավալուն հաշվողական աշխատանք: Չնայած դրան, (9.5.18) մեթոդը լայնորեն կիրառվում է հաշվարկներում, քանի որ որոշ խնդիրների համար հաշվողական ընթացքի կայունության տեսակետից այն ունի էական առավելություն բացահայտ մեթոդի նկատմամբ (տե՛ս 9.10 պարագրաֆը):

Վերջում նշենք, որ Էյլերի բացահայտ և անբացահայտ մեթոդները կարող են արտածվել նաև թվային ինտեգրման բանաձևերից: Իրոք,

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

հավասարության աջ մասում կիրառելով (8.2.2) ձախ ուղղանկյունների բանաձևը, կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf(x_n, u(x_n))$$

մոտավոր հավասարությունը, որից էլ հետևում է Էյլերի մեթոդի (9.5.5) հաշվարկային բանաձևը: Իսկ եթե ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք (8.2.3) աջ ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf(x_{n+1}, u(x_{n+1})),$$

որտեղից հանգում ենք (9.5.19) Էյլերի անբացահայտ մեթոդին:

## 9.6 Էյլերի վերահաշվման մեթոդները

Պարզվում է, որ Էյլերի մեթոդի գույամիտության արագությունը կարելի է մեծացնել՝ հաշվողական սխեմայի բարդացման հաշվին:

Նկարագրենք այսպես կոչված *Էյլերի վերահաշվման մեթոդը*: Ըստ այդ մեթոդի՝  $v_{n+1}$ -ի հաշվարկը իրականացվում է երկու փուլով: Նախ գտնվում է

$$\bar{v}_n = v_n + \alpha hf(x_n, v_n) \quad (9.6.1)$$

միջանկյալ արժեքը, որտեղ  $\alpha > 0$  (փաստորեն դա սովորական Էյլերի մեթոդն է  $\alpha h$  քայլով): Այնուհետև հաշվվում է  $v_{n+1}$  արժեքը ըստ

$$v_{n+1} = v_n + h[(1 - \sigma)f(x_n, v_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, \bar{v}_n)] \quad (9.6.2)$$

բանաձևի, որտեղ  $\sigma > 0$ : Արտաքսելով (9.6.1) և (9.6.2)-ից  $\bar{v}_n$ -ը, կստանանք հետևյալ մեթոդը.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = (1 - \sigma)f(x_n, v_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, v_n + \alpha hf(x_n, v_n)), \quad (9.6.3)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad v_0 = u_0 :$$

Սկզբից քննարկենք մեթոդի մոտարկման սխալանքի հարցը և դրա հետ կապված  $\alpha$  և  $\sigma$  պարամետրերի ընտրությունը: Գիցուք  $u(x) \in C^3[x_0, x_0 + H]$ : Գրենք արտահայտություն մեթոդի *անկապակցության* կամ *մոտարկման սխալանքի* համար.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - (1 - \sigma)f(x_n, u(x_n)) - \sigma f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha hf(x_n, u(x_n))), \quad (9.6.4)$$

որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ : Ըստ Թեյլորի վերլուծության՝ ունենք

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = u'(x_n) + \frac{h}{2} u''(x_n) + \frac{h^2}{6} u'''(x_n + \theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1 :$$

Քանի որ  $u'(x_n) = f(x_n, u(x_n))$ , ապա (9.6.4)-ից կստանանք

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n))] + \mu_n, \quad (9.6.5)$$

որտեղ  $\mu_n$  մեծությունը գնահատվում է հետևյալ կերպ.

$$|\mu_n| \leq \frac{M_3}{6} h^2, \quad M_3 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u'''(x)| : \quad (9.6.6)$$

Ձևափոխենք (9.6.5) արտահայտությունը: Գրենք այն

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n))] + \\ & f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n \end{aligned}$$

տեսքով: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումը.

$$\nu_n \equiv f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n)) : \quad (9.6.7)$$

Այդ դեպքում

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2} u''(x_n) + \sigma [u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n + \sigma \nu_n : \quad (9.6.8)$$

Շարունակենք ձևափոխությունները: Գրենք Թեյլորի վերլուծությունը.

$$u'(x_n + \alpha h) = u'(x_n) + \alpha h u''(x_n) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u'''(x_n + \theta_2 \alpha h), \quad 0 < \theta_2 < 1 :$$

Այստեղից

$$u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h) = -\alpha h u''(x_n) + \rho_n, \quad (9.6.9)$$

որտեղ  $\rho_n$  մեծության գնահատականը հետևյալն է.

$$|\rho_n| \leq \frac{M_3}{2} \alpha^2 h^2 : \quad (9.6.10)$$

Այսպիսով, (9.6.8) և (9.6.9)-ից կստանանք

$$\varepsilon_n = \left( \frac{1}{2} - \alpha \sigma \right) h u''(x_n) + \mu_n + \sigma (\nu_n + \rho_n) : \quad (9.6.11)$$

Մենք արդեն գնահատել էինք  $\mu_n$  և  $\rho_n$  մեծությունները (տե՛ս (9.6.6) և (9.6.10) գնահատականները): Մնացել է գնահատել  $\nu_n$  մեծությունը (9.6.7)-ից: Ըստ Լիպշիցի պայմանի ունենք

$$|\nu_n| \leq L |u(x_n + \alpha h) - u(x_n) - \alpha h u'(x_n)|$$

անհավասարությունը: Նորից օգտվենք Թեյլորի վերլուծությունից.

$$u(x_n + \alpha h) = u(x_n) + \alpha h u'(x_n) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u''(x_n + \theta_3 \alpha h), \quad 0 < \theta_3 < 1 :$$

Կստանանք

$$|\nu_n| \leq \frac{LM_2}{2} \alpha^2 h^2, \quad M_2 \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u''(x)| \quad (9.6.12)$$

գնահատականը: Այսպիսով, (9.6.11) և (9.6.6), (9.6.10), (9.6.12)-ից գտնում ենք, որ

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha\sigma\right) h u''(x_n) + O(h^2) : \quad (9.6.13)$$

Ավելի ճիշտ՝

$$|\varepsilon_n| \leq \left| \left(\frac{1}{2} - \alpha\sigma\right) h u''(x_n) \right| + \left( \frac{M_3}{6} + \frac{\alpha^2\sigma}{2} (LM_2 + M_3) \right) h^2 : \quad (9.6.14)$$

Ստացված (9.6.13) արտահայտությունից հետևում է, որ  $\varepsilon_n$  անկապակցությունը կլինի  $h$ -ի նկատմամբ երկրորդ կարգի մեծություն, եթե

$$\alpha\sigma = \frac{1}{2} : \quad (9.6.15)$$

Ընդ որում, համաձայն (9.6.14)-ի՝

$$|\varepsilon_n| \leq C(\alpha)h^2, \quad (9.6.16)$$

որտեղ

$$C(\alpha) \equiv \frac{M_3}{6} + \frac{\alpha}{4} (LM_2 + M_3) : \quad (9.6.17)$$

Այսինքն, (9.6.15) պայմանի առկայությամբ մեթոդն ունի *մոտարկման երկրորդ կարգ*: Մեթոդի *տեղային սխալանքը*  $O(h^3)$  է: Իրոք, (9.6.4)-ից ունենք

$$\begin{aligned} u(x_{n+1}) &= u(x_n) + h[(1 - \sigma)f(x_n, u(x_n)) + \\ &\quad \sigma f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h f(x_n, u(x_n)))] + h\varepsilon_n : \end{aligned} \quad (9.6.18)$$

Ենթադրենք, որ  $v_n = u(x_n)$ : Այդ դեպքում (9.6.3) և (9.6.18)-ից հետևում է, որ

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h\varepsilon_n :$$

Այստեղից, ըստ (9.6.16) գնահատականի՝

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq C(\alpha)h^3 : \quad (9.6.19)$$

Այսպիսով, (9.6.15) լրացուցիչ պայմանով (9.6.3) Էյլերի վերահաշվման մեթոդը փաստորեն *մոտարկման երկրորդ կարգ* ունեցող բացահայտ մեթոդների ընտանիք է:

Նշենք, որ (9.6.3) մեթոդը պատկանում է *սլոպիկատոր-կոռեկտոր* տիպի մեթոդների դասին: Մեթոդի յուրաքանչյուր քայլը ներառում է երկու փուլ. նախ հաշվարկ ըստ (9.6.1) բանաձևի, որը տալիս է սկզբնական մոտավորություն (*սլոպիկատոր*), այնուհետև՝  $v_{n+1}$  արժեքի ճշգրտումն ըստ (9.6.2) բանաձևի (*կոռեկտոր*):



Հիմնականում կիրառվում են հետևյալ երկու մասնավոր դեպքերը:

- Յոյնի մեթոդը ( $\alpha = 1, \sigma = 0.5$ ).

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{2} [f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, v_n + hf(x_n, v_n))] , \quad (9.6.20)$$

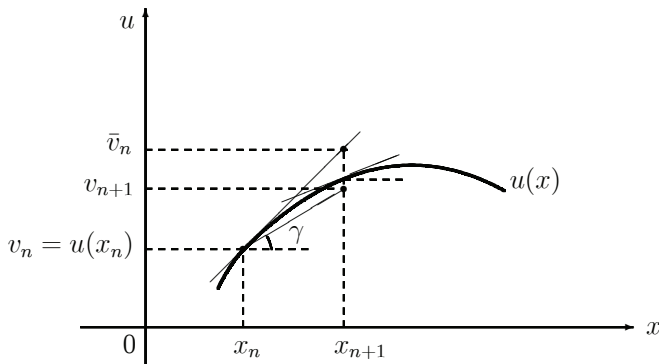
$$n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad v_0 = u_0 :$$

Մեթոդի քայլը իրականացվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + hf(x_n, v_n) \quad (\text{պրեդիկտոր}) , \quad (9.6.21)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, \bar{v}_n)] \quad (\text{կորեկտոր}) : \quad (9.6.22)$$

Երկրաչափորեն  $v_{n+1}$ -ի ստացումը ( $O(h^3)$  ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 9.6.1-ում: Ենթադրվում է, որ  $v_n = u(x_n)$ : Որպես բացատրություն նշենք, որ  $\text{tg } \gamma = (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)/2$ , որտեղ  $\text{tg } \alpha = u'(x_n)$  և  $\text{tg } \beta = u'(x_{n+1})$ :



**Նկ. 9.6.1** Հոյնի մեթոդի քայլը

- Միջին կետի մեթոդը ( $\alpha = 0.5, \sigma = 1$ ).

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f \left( x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n) \right) , \quad (9.6.23)$$

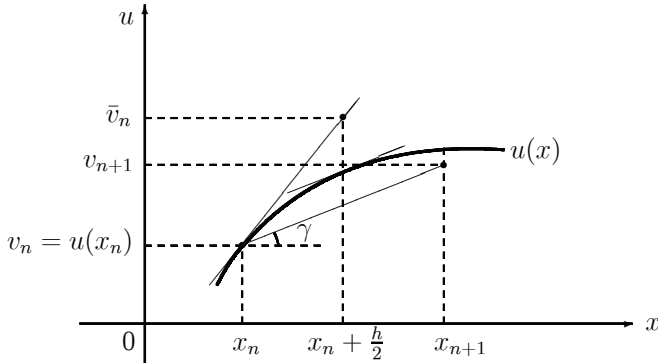
$$n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad v_0 = u_0 :$$

Այստեղ  $v_n$ -ից  $v_{n+1}$  անցումը կատարվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n) \quad (\text{պրեդիկտոր}) , \quad (9.6.24)$$

$$v_{n+1} = v_n + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, \bar{v}_n \right) \quad (\text{կորեկտոր}) : \quad (9.6.25)$$

Մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը ( $O(h^3)$  ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 9.6.2-ում: Այստեղ  $\text{tg } \gamma = u'(x_n + \frac{h}{2})$ :



**Նկ. 9.6.2** Միջին կետի մեթոդի քայլը

**Օրինակ 9.6.1 :** Դիտարկենք

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

Կոշիի խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է  $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$  ֆունկցիան: Համեմատենք Էյլերի, Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված մոտավոր լուծումները (ցանցի քայլն է  $h = 0.125$ ): Հաշվարկների արդյունքները տրված են հետևյալ աղյուսակում.

$x_n$	Էյլերի մեթոդ	Հոյնի մեթոդ	միջին կետի մեթոդ	ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125	0.9375	0.9434	0.9434	0.9432392
0.250	0.8867	0.8977	0.8977	0.8974907
0.375	0.8469	0.8624	0.8624	0.8620873
0.500	0.8174	0.8368	0.8368	0.8364023
0.625	0.7976	0.8203	0.8203	0.8198469
0.750	0.7868	0.8124	0.8124	0.8118678
0.875	0.7845	0.8125	0.8125	0.8119456
1.000	0.7902	0.8202	0.8202	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, Հոյնի և միջին կետի մեթոդները Էյլերի մեթոդի համեմատությամբ տալիս են ավելի ճշգրիտ արդյունքներ:  $\diamond$

Համառոտակի քննարկենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված մեթոդի զուգամիտությունը: Դիցուք  $z = \{z_n\}_{n=0}^N$ , որտեղ  $z_n \equiv u(x_n) - v_n$ , սխալանքի ցանցային ֆունկցիա է: Էյլերի մեթոդի դեպքում մենք պարզել էինք, որ ճշտության կարգը համընկնում է մոտարկման կարգի հետ: Նման համապատասխանություն

պահպանվում է նաև Էյլերի վերահաշվման մեթոդում: (9.5.12) գնահատականին բերող դատողությունների միջոցով դժվար չէ ցույց տալ, որ  $\|z\| = O(h^2)$ : Մասնավորապես, Հոյնի և միջին կետի մեթոդների համար ճիշտ է

$$\|z\| \leq \frac{C(\alpha)}{L(1 + 0.5hL)} \left( e^{HL(1+0.5hL)} - 1 \right) h^2 \quad (9.6.26)$$

գնահատականը, որտեղ  $C(\alpha)$  մեծությունը հաշվվում է (9.6.17) բանաձևով ( $\alpha = 1$  (9.6.20) մեթոդի համար և  $\alpha = 0.5$  (9.6.23) մեթոդի համար): Թողնում ենք (9.6.26) գնահատականի արտածումը ընթերցողին որպես վարժություն:

Վերջում նշենք, որ Հոյնի և միջին կետի մեթոդները կարելի է ստանալ թվային ինտեգրման բանաձևերի միջոցով: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

հավասարության աջ մասում (8.3.1) սեղանների բանաձևը՝ կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, u(x_n)) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))]$$

մոտավոր հավասարությունը: Փոխարինենք աջ մասում  $u(x_{n+1})$ -ը նրա մոտավոր արժեքով.

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) :$$

Գրանով հանգում ենք Հոյնի մեթոդի (9.6.21), (9.6.22) հաշվարկային բանաձևերին: Իսկ եթե ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf \left( x_n + \frac{h}{2}, u \left( x_n + \frac{h}{2} \right) \right) :$$

Այստեղից, եթե  $u(x_n + \frac{h}{2})$ -ը փոխարինենք նրա մոտավոր արժեքով, այն է՝

$$u \left( x_n + \frac{h}{2} \right) \approx u(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, u(x_n)),$$

ապա կստանանք միջին կետի (9.6.24), (9.6.25) հաշվարկային բանաձևերը:

## 9.7 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

Գիտարկենք (9.4.1), (9.4.2) Կոշիի խնդրի լուծման առավել գործածելի մեթոդը, որը հայտնի է որպես *Ռունգե-Կուտայի մեթոդ*.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{6} [k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}], \quad (9.7.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, N - 1; \quad v_0 = u_0,$$

որտեղ

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= f(x_n, v_n), \\ k_2^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} k_1^{(n)}\right), \\ k_3^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} k_2^{(n)}\right), \\ k_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, v_n + h k_3^{(n)}) : \end{aligned} \quad (9.7.2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, սա միաբայլ բացահայտ մեթոդ է: Մոտավոր լուծման արժեքները հաշվվում են հաջորդաբար՝ սկսած  $v_0 = u_0$ -ից, ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6} [k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 : \quad (9.7.3)$$

Ռունգե-Կուտայի մեթոդն ունի *մոտարկման չորրորդ կարգ*: Գիտարկենք մեթոդի *անկապակցությունը* կամ *մոտարկման սխալանքը*.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{1}{6} [\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (9.7.4)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1^{(n)} &= f(x_n, u(x_n)), \\ \tilde{k}_2^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, u(x_n) + \frac{h}{2} \tilde{k}_1^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_3^{(n)} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, u(x_n) + \frac{h}{2} \tilde{k}_2^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, u(x_n) + h \tilde{k}_3^{(n)}) : \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե  $u(x) \in C^5[x_0, x_0 + H]$ , ապա

$$|\varepsilon_n| \leq C_{RK} h^4, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (9.7.6)$$

որտեղ  $C_{RK}$ -ն դրական հաստատուն է: Այս գնահատականի արտաձումը բավականին ծավալուն է, ուստի մենք այն այստեղ չենք բերի (տե՛ս, օրինակ, [5, 37, 46]):

Ռունգե-Կուտայի մեթոդի *տեղային սխալանքը*  $O(h^5)$  մեծությունն է: Իրոք, (9.7.4)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = \frac{h}{6} [\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}] + h \varepsilon_n : \quad (9.7.7)$$

Եթե ենթադրենք, որ  $x_n$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  հանգույցում մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, ապա (9.7.3) և (9.7.7)-ից կունենանք

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h \varepsilon_n :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (9.7.6) գնահատականը, կստանանք՝

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \leq C_{RK} h^5 : \quad (9.7.8)$$

Անցնենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված Ռունգե-Կուտայի մեթոդի գլոբալ սխալանքի գնահատմանը: Ներմուծենք սխալանքի ցանցային ֆունկցիան  $z = \{z_n\}_{n=0}^N$ , որտեղ  $z_n \equiv u(x_n) - v_n$ : Ինչպես հետևում է (9.7.3) և (9.7.7)-ից, բոլոր  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար ճիշտ են

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + \frac{h}{6} \left[ |\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| + 2|\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| + 2|\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| + |\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}| \right] + h|\varepsilon_n| \quad (9.7.9)$$

անհավասարությունները: Ունենալով  $k_i^{(n)}$  և  $\tilde{k}_i^{(n)}$  մեծությունների համար համապատասխանաբար (9.7.2) և (9.7.5) արտահայտությունները և օգտվելով (9.1.13) Լիպշիցի պայմանից, դժվար չէ ստանալ հետևյալ գնահատականները.

$$\begin{aligned} |\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| &\leq L|z_n|, \\ |\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| &\leq L \left( 1 + \frac{hL}{2} \right) |z_n|, \\ |\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| &\leq L \left( 1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{4} \right) |z_n|, \\ |\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}| &\leq L \left( 1 + hL + \frac{(hL)^2}{2} + \frac{(hL)^3}{4} \right) |z_n| : \end{aligned} \quad (9.7.10)$$

Այնուհետև, (9.7.9) և (9.7.10)-ից հետևում է

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hQ(h))|z_n| + h|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունը, որտեղ

$$Q(h) \equiv L \left( 1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{6} + \frac{(hL)^3}{24} \right) : \quad (9.7.11)$$

Ի վերջո, հաշվի առնելով (9.7.6) գնահատականը, կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq (1 + hQ(h))|z_n| + hC_{RK}h^4, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

անհավասարությունները: Դրանով  $z$  սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 9.4.1 լեմմայի պայմաններին: Քանի որ  $z_0 = 0$ , ապա ըստ (9.4.13) անհավասարության կստանանք

$$\|z\| \leq \frac{C_{RK}}{Q(h)} \left( e^{HQ(h)} - 1 \right) h^4 \quad (9.7.12)$$

գնահատականը, որտեղ  $C_{RK}$ -ն հաստատուն է (9.7.6)-ից, իսկ  $Q(h)$  մեծությունը որոշված է (9.7.11)-ում (նկատենք, որ  $Q(h) \rightarrow L$ , երբ  $h \rightarrow 0$ ): Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդն ունի չորրորդ կարգի ճշտության:

**Օրինակ 9.7.1 :** Կիրառենք Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1$$

խնդրի լուծման համար, որի ճշգրիտ լուծումն է  $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$  ֆունկցիան: Ստորև բերված աղյուսակում տրված են  $h = 0.125$  քայլով կատարված հաշվարկների արդյունքները: Համեմատության համար տրված են նաև Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված տվյալները:

$x_n$	Հոյնի մեթոդ	միջին կետի մեթոդ	Ռունգե-Կուտայի մեթոդ	ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000000	1.0000000
0.125	0.9434	0.9434	0.9432392	0.9432392
0.250	0.8977	0.8977	0.8974907	0.8974907
0.375	0.8624	0.8624	0.8620874	0.8620873
0.500	0.8368	0.8368	0.8364024	0.8364023
0.625	0.8203	0.8203	0.8198470	0.8198469
0.750	0.8124	0.8124	0.8118679	0.8118678
0.875	0.8125	0.8125	0.8119457	0.8119456
1.000	0.8202	0.8202	0.8195921	0.8195920

Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը տալիս է խնդրի ճշգրիտ լուծման բավականին լավ մոտարկում:  $\diamond$

Վերջում նշենք կապը Ռունգե-Կուտայի մեթոդի և Սիմպսոնի քառակուսացման բանաձևի միջև: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx$$

հավասարության աջ մասի ինտեգրալի նկատմամբ (8.4.3) Սիմպսոնի բանաձևը, կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6} \left[ f(x_n, u(x_n)) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \right]$$

մոտավոր հավասարությունը: Համաձայն (9.7.5)-ում մտցված նշանակումների  $f(x_n, u(x_n)) = \tilde{k}_1^{(n)}$ : Այնուհետև, ոչ բարդ դատողությունների միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ

$$4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \approx 2(\tilde{k}_2^{(n)} + \tilde{k}_3^{(n)}), \quad f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \approx \tilde{k}_4^{(n)} :$$

Այսինքն՝

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6} [\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}],$$

որտեղից էլ հետևում է Ռունգե-Կուտայի մեթոդի (9.7.3) հաշվարկային բանաձևը:

## 9.8 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Սույն գլխի նախորդ բաժիններում մենք դիտարկել ենք Կոշիի խնդրի լուծման միաքայլ մեթոդները և գնահատել ենք այդ մեթոդների սխալանքները: Սակայն (9.5.12), (9.6.26) և (9.7.12) գնահատականները գործնականում որպես օրենք չեն կիրառվում, քանի որ դրանք պահանջում են բավականին բարդ տեսական հաշվարկներ: Դրա փոխարեն օգտագործվում են այլ եղանակներ: Այդպիսի եղանակներից է *Ռունգեի կանոնը*, որի հիմքում ընկած է կրկնակի վերահաշվարկի գաղափարը: Հիշեցնենք, որ այդ կանոնի հետ մենք արդեն առնչվել ենք 8.5 պարագրաֆում՝ քառակուսացման բանաձևերի սխալանքները գնահատելիս:

### 9.8.1 Ռունգեի կանոնը

Դիցուք

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H; \quad u(x_0) = u_0 \quad (9.8.1)$$

Կոշիի խնդրի լուծման համար օգտագործվում է *p-րդ կարգի ճշտության* միաքայլ մեթոդ, որտեղ  $p \geq 1$ : Ենթադրենք, որ հաշվարկները կատարվում են  $h = H/N$  քայլով

$$x_n^{(h)} = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (9.8.2)$$

ցանցի վրա և  $v^{(h)} = \{v_n^{(h)}\}_{n=0}^N$ ՝ մոտավոր լուծումն է: Բոլոր դիտարկված մեթոդներում կարելի է նկատել հետևյալ օրինաչափությունը. *մեթոդի ճշտության կարգը մեկով ցածր է տեղային սխալանքի կարգից*: Վերլուծության պարզեցման համար կենթադրենք, որ մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում սխալանքը մոտավորապես հավասար է  $Ch^{p+1}$ -ի, որտեղ  $C$ -ն ինչ-որ ոչ զրոյական հաստատուն է: Այդ դեպքում  $x_{n+1}^{(h)}$  հանգույցում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , սխալանքի համար կունենանք

$$z_{n+1}^{(h)} \equiv u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n + 1)Ch^{p+1} \quad (9.8.3)$$

մոտավոր արտահայտությունը:

Երկու անգամ փոքրացնենք քայլը՝ վերցնելով այն հավասար  $h/2$ -ի: Պարզ է, որ նոր մանրացված ցանցը՝

$$x_k^{(h/2)} = x_0 + k \frac{h}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N \quad (9.8.4)$$

ներառում է (9.8.2) ցանցի բոլոր հանգույցները, այն է՝

$$x_{2n}^{(h/2)} = x_n^{(h)}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (9.8.5)$$

(տե՛ս նկ. 9.8.1): Դիցուք  $v^{(h/2)} = \{v_k^{(h/2)}\}_{k=0}^{2N}$ ՝ նույն մեթոդով (9.8.4) ցանցի վրա ստացված (9.8.1) խնդրի մոտավոր լուծումն է: Համանմանորեն (9.8.3)-ի,  $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$  հանգույցում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , ունենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n + 1)C \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} : \quad (9.8.6)$$

Հաշվի առնելով (9.8.5)-ը, (9.8.3) և (9.8.6) -ից գտնում ենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{z_{n+1}^{(h)}}{2^p} \tag{9.8.7}$$

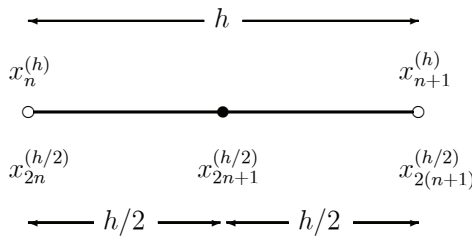
առնչությունը: Այնուհետև,

$$\begin{aligned} z_{2(n+1)}^{(h/2)} &= u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} = \\ &= z_{n+1}^{(h)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2^p z_{2(n+1)}^{(h/2)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} : \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք սխալանքի գնահատման

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \tag{9.8.8}$$

մոտավոր բանաձևը:



**Նկ. 9.8.1** Ռունգեի կանոնի արտաձման վերաբերյալ պատկերը

### 9.8.2 Ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Պարզվում է, որ (9.8.8) բանաձևի աջ մասում գրված

$$E_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \tag{9.8.9}$$

մեծությունը կարելի է օգտագործել մոտավոր լուծումը ճշգրտելու համար: Իրոք, առանձնացնենք մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում ստացվող սխալանքի գլխավոր մասը՝ ներկայացնելով այդ սխալանքը

$$C_1 h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

տեսքով, որտեղ  $C_1$ -ը ինչ-որ ոչ գրոյական հաստատուն է: Հաշվի առնելով այդ ճշտումը, արտագրենք (9.8.3) և (9.8.6) մոտավոր հավասարությունները հետևյալ կերպ.

$$z_{n+1}^{(h)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n + 1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \tag{9.8.10}$$



և

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n+1)C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + O(h^{p+1}) \quad (9.8.11)$$

համապատասխանաբար (նշենք, որ բավականաչափ մեծ  $n$ -երի համար  $nh = O(1)$ ): Ուստի (9.8.10) և (9.8.11)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}^{(h)}) \approx v_{n+1}^{(h)} + (n+1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \quad (9.8.12)$$

և

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx v_{2(n+1)}^{(h/2)} + (n+1)C_1 \frac{h^{p+1}}{2^p} + O(h^{p+1}) : \quad (9.8.13)$$

Հանելով  $2^p$ -ով բազմապատկված (9.8.13) հավասարությունից (9.8.12) հավասարությունը, կստանանք

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} + O(h^{p+1}) : \quad (9.8.14)$$

Այս մոտավոր հավասարության աջ մասում գրված

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \quad (9.8.15)$$

մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես ճշգրտված մոտավոր լուծում (9.8.4) ցանցի  $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$  հանգույցում: Նկարագրված հնարքը կրում է *ճշգրտումը ըստ Ռիչարդսոնի* անունը: Ինչպես երևում է (9.8.14)-ից,  $V_{2(n+1)}^{(h/2)}$  մոտավոր լուծման ճշտության կարգը հավասար է  $(p+1)$ -ի, թեև կիրառվող մեթոդն ունի ճշտության  $p$ -րդ կարգ: Վերջապես, (9.8.9) և (9.8.15)-ից հետևում է, որ

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} = v_{2(n+1)}^{(h/2)} + E_{2(n+1)}^{(h/2)} : \quad (9.8.16)$$

Այսպիսով,  $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$  մեծությունը (9.8.9)-ից կարելի է դիտարկել որպես մոտավոր լուծման շտկում (9.8.4) ցանցի  $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$  հանգույցում:

Ստացված  $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$  մեծությունը գործնականում օգտագործվում է հաշվարկների ճշտության վերահսկման և քայլի ավտոմատիկ փոփոխման համար: Դա կարելի է իրականացնել, օրինակ, հետևյալ կերպ: Ընտրվում է բավականին փոքր  $\varepsilon > 0$  թիվ: Եթե  $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \leq \varepsilon$ , ապա հասած ճշտությունը համարվում է բավարար, և ընթացքը շարունակվում է նույն քայլով: Դեռ ավելին, եթե  $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \ll \varepsilon$ , ապա կարելի է փորձել այնուհետև շարժվել ավելի մեծ քայլով (օրինակ,  $2h$  քայլով): Իսկ եթե  $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| > \varepsilon$ , ապա ճշտությունը համարվում է անբավարար: Այդ դեպքում կարելի է ետ դառնալ դեպի  $x_n^{(h)}$  հանգույց և կրկնել հաշվարկները ավելի փոքր քայլով (օրինակ,  $h/2$  քայլով): Այդպիսի բավականին պարզ եղանակը հաճախ թույլ է տալիս խնդիրը լուծել էապես ավելի արագ՝ միաժամանակ պահպանելով արդյունքի ճշտությունը:

## 9.9 Ադամսի մեթոդը

Վերադառնանք

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H; \quad u(x_0) = u_0 \quad (9.9.1)$$

Կոշիի խնդրին: Վերը դիտարկված Ռունգե-Կուտայի մեթոդն ունի ինչպես բարձր կարգի ճշտություն, այնպես էլ բավականին պարզ հաշվողական սխեմա: Միաժամանակ ցանցի յուրաքանչյուր հանգույցում մոտավոր լուծումը ստանալու համար պետք է հաշվել (9.9.1) հավասարման աջ մասի արժեքները չորս կետում (տե՛ս (9.7.1) և (9.7.2) բանաձևերը): Եթե հավասարման աջ մասն ունի բարդ անալիտիկ տեսք, ապա դա կապված է որոշակի հաշվողական ծախսերի հետ: Սույն պարագրաֆում մենք կշարադրենք բազմաքայլ *Ադամսի մեթոդը*, որի կիրառումը ամեն մի քայլում պահանջում է հավասարման աջ մասի միապատիկ հաշվարկ: Գոյություն ունի մեթոդի երկու տարբերակ, այն է՝ *Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդ* և *Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդ*:

### 9.9.1 Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդը

Ընտրենք  $[x_0, x_0 + H]$  հատվածում

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{H}{N} \quad (9.9.2)$$

հավասարաչափ ցանցը: Ընտրենք  $p \geq 0$  ամբողջ թիվը (սովորաբար,  $p \ll N$ ): Գրենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} u'(x) dx \quad (9.9.3)$$

ակնհայտ նույնությունը: Ենթադրելով, որ  $n \geq p$ , փոխարինենք  $[x_n, x_{n+1}]$  հատվածում  $u'(x)$  ենթահինտեգրալային ֆունկցիան  $x_{n-p}, \dots, x_{n-1}, x_n$  հանգույցներով կառուցված  $p$ -րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Ըստ Լագրանժի բանաձևի ունենք

$$u'(x) = \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} + R_p(x), \quad (9.9.4)$$

որտեղ  $\omega_{p+1}(x) \equiv (x - x_{n-p}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$ , իսկ  $R_p(x)$ -ը մնացորդային անդամն է: Եթե  $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0 + H]$ , ապա համաձայն (6.2.9) բանաձևի՝

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!} \omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p}, x_n) : \quad (9.9.5)$$

Եթե ինտեգրենք  $u'(x)$ -ի համար ստացված (9.9.4) արտահայտությունը, ապա (9.9.3) նույնությունից կստանանք՝

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx : \quad (9.9.6)$$

Կատարենք (9.9.6) հավասարության աջ մասի ինտեգրացնելու  $t = (x - x_n)/h$  փոփոխականի փոխարինում: Պարզ ձևափոխություններից հետո կունենանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt \quad (9.9.7)$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi)t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (9.9.8)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$A_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (9.9.9)$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi)t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (9.9.10)$$

Արդյունքում (9.9.6) – (9.9.10) -ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + h \varepsilon_n \quad (9.9.11)$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + \varepsilon_n \quad (9.9.12)$$

հավասարությունը: Դեն նետելով (9.9.12) հավասարության մեջ  $\varepsilon_n$  մեծությունը՝ հանգում ենք հետևյալ տարբերական մեթոդին, որը կոչվում է *Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդ*.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \quad (9.9.13)$$

$$n = p, p+1, \dots, N-1 :$$

Այստեղ  $v_0 = u_0$  և  $v_1, v_2, \dots, v_p$  արժեքները տրված են:

Մոտավոր լուծման արժեքները սկսած  $v_{p+1}$ -ից, որոշվում են հաջորդաբար

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \quad n = p, p+1, \dots, N-1 \quad (9.9.14)$$

բացահայտ բանաձևով: Այսպիսով, համաձայն 9.4 պարագրաֆում ընդունված տարբերական մեթոդների դասակարգման, Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդը *բազմաբայլ բացահայտ մեթոդ է* (եթե  $p > 0$ ):

Ինչպես երևում է (9.9.12) և (9.9.13)-ից,  $\varepsilon_n$ -ը մեթոդի *անկապակցությունն է* կամ *մոտարկման սխալանքը*: Օգտվելով (9.9.10) արտահայտությունից՝ հեշտ է ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \leq M_{p+2} h^{p+1}, \quad (9.9.15)$$

որտեղ  $M_{p+2} \equiv \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + H} |u^{(p+2)}(x)|$ : Այսինքն, (9.9.13) մեթոդն ունի *մոտարկման*  $(p+1)$ -րդ կարգ: Ընդ որում *տեղային սխալանքը*  $O(h^{p+2})$  կարգի է: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ  $x_{n-p}, \dots, x_{n-1}, x_n$  հանգույցներում ճշգրիտ և մոտավոր լուծումները համընկնում են, ապա (9.9.11), (9.9.14) և (9.9.15)-ից կունենանք հետևյալ գնահատականը.

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| = h |\varepsilon_n| \leq M_{p+2} h^{p+2} : \quad (9.9.16)$$

**Դիտողություն 9.9.1 :** *Որպեսզի (9.9.14) բանաձևով հաշվենք առաջին արժեքը՝  $v_{p+1}$ , բացի  $v_0$ -ից անհրաժեշտ են նաև  $v_1, v_2, \dots, v_p$  «մեկնարկային» արժեքները: Դրանք կարելի է ստանալ որևէ միաքայլ մեթոդով:*

Դիտարկենք Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդի մասնավոր դեպքեր: Տալով  $p$ -ին տարբեր արժեքներ, (9.9.9) և (9.9.14) բանաձևերից ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա)  $p = 0$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(Էյլերի մեթոդ),

բ)  $p = 1$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [3f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

գ)  $p = 2$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12} [23f(x_n, v_n) - 16f(x_{n-1}, v_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, v_{n-2})],$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1 :$$

Այժմ գնահատենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված մեթոդի գլոբալ սխալանքը: Դիտարկենք սխալանքի  $z = \{z_n\}_{n=0}^N$  ցանցային ֆունկցիան, որտեղ  $z_n \equiv u(x_n) - v_n$ : Պարզ է, որ (9.9.11) և (9.9.14)-ից հետևում են

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + h \sum_{k=0}^p |A_k| |f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| + h |\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները, որտեղ  $n = p, p+1, \dots, N-1$ : Ըստ Լիպշիցի (9.1.13) պայմանի ունենք

$$|f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| \leq L |z_{n-k}|,$$

ուստի

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + hL \sum_{k=0}^p |A_k| |z_{n-k}| + h |\varepsilon_n| :$$

Այստեղից, օգտվելով (9.9.15) գնահատականից, ստանում ենք

$$|z_{n+1}| \leq |z_n| + hAL \sum_{k=0}^p |z_{n-k}| + hE, \quad n = p, p+1, \dots, N-1 \quad (9.9.17)$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$A \equiv \max_{0 \leq k \leq p} |A_k|, \quad E \equiv M_{p+2} h^{p+1} : \quad (9.9.18)$$

Հաջորդաբար կիրառելով (9.9.17) անհավասարությունները՝ կստանանք

$$|z_{n+1}| \leq |z_p| + hAL \sum_{m=p}^n \sum_{k=0}^p |z_{m-k}| + (n-p+1)hE, \quad n = p, p+1, \dots, N-1,$$

իսկ քանի որ  $(n-p+1)h \leq Nh = H$ , ապա

$$|z_{n+1}| \leq |z_p| + hAL \sum_{m=p}^n \sum_{k=0}^p |z_{m-k}| + HE, \quad n = p, p+1, \dots, N-1 :$$

Այնուհետև,  $n = p, p+1, \dots, N-1$  արժեքների համար

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| \leq & |z_p| + hAL(|z_0| + 2|z_1| + \dots + (p+1)|z_p|) + \\ & hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^n |z_k| + HE : \end{aligned} \quad (9.9.19)$$

Ենթադրենք, որ  $v_1, v_2, \dots, v_p$  «մեկնարկային» արժեքները հաշվված են  $\delta$  ճշտությամբ, այսինքն՝

$$|z_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, p : \quad (9.9.20)$$

Այդ դեպքում (9.9.19)-ից կստանանք

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| \leq & \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right) \delta + hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^n |z_k| + HE, \\ & n = p, p+1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (9.9.21)$$

անհավասարությունները: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$a \equiv \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right) \delta, \quad b \equiv hAL(p+1), \quad c \equiv HE : \quad (9.9.22)$$

Արդյունքում (9.9.21) անհավասարությունները կգրվեն

$$|z_{n+1}| \leq a + b \sum_{k=p+1}^n |z_k| + c, \quad n = p, p+1, \dots, N-1$$

տեսքով: Ելնելով վերջին անհավասարությունից և կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը ըստ  $n$ -ի, կստանանք՝

$$|z_n| \leq (a+c)(1+b)^{n-p-1}, \quad n = p+1, p+2, \dots, N :$$

Այնուհետև, օգտվելով  $b$  մեծության (9.9.22) արտահայտությունից, կստանանք

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq (a+c)(1+b)^{N-p-1} \leq (a+c)(1+b)^N \leq (a+c)(1+hAL(p+1))^N \\ &= (a+c) \left(1 + \frac{ALH(p+1)}{N}\right)^N \leq (a+c)e^{ALH(p+1)} : \end{aligned}$$

Տեղադրենք վերջին անհավասարության մեջ  $a$  և  $c$  մեծությունների արժեքները (9.9.22)-ից և  $E$  մեծության արժեքը (9.9.18)-ից: Կստանանք

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq e^{ALH(p+1)} \left[ \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right) \delta + HM_{p+2} h^{p+1} \right], \\ n &= p+1, p+2, \dots, N \end{aligned} \quad (9.9.23)$$

անհավասարությունները: Այսպիսով, (9.9.20) և (9.9.23)-ից հետևում է

$$\|z\| \leq C_1 \delta + C_2 h^{p+1} \quad (9.9.24)$$

գնահատականը, որտեղ

$$C_1 \equiv e^{ALH(p+1)} \left(1 + hAL \frac{p(p+3)}{2}\right), \quad C_2 \equiv e^{ALH(p+1)} HM_{p+2} :$$

Ստացված (9.9.24) գնահատականից բխում է, որ  $\delta$  շտուքյան  $(p+1)$ -րդ կարգը ապահովելու համար  $v_1, v_2, \dots, v_p$  արժեքները նույնպես պետք է հաշվվեն  $\delta = O(h^{p+1})$  ճշտությամբ (տես 9.9.1 դիտողությունը):

## 9.9.2 Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդը

Դիցուք  $p$ -ն ոչ բացասական ամբողջ թիվ է ( $p \ll N$ ): Ենթադրելով, որ  $n \geq p-1$ , փոխարինենք (9.9.3) նույնության մեջ  $u'(x)$  ենթահիմտեգրալային ֆունկցիան  $x_{n-p+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$  հանգույցներով կառուցված  $p$ -րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Օգտվելով Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևից՝ կարող ենք գրել

$$u'(x) = \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k+1}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x-x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} + R_p(x), \quad (9.9.25)$$

որտեղ  $\omega_{p+1}(x) \equiv (x-x_{n-p+1}) \dots (x-x_n)(x-x_{n+1})$ , իսկ  $R_p(x)$ -ը մնացորդային անդամն է: Եթե  $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0+H]$ , ապա (6.2.9) բանաձևից ունենք

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!} \omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p+1}, x_{n+1}) : \quad (9.9.26)$$

Ինտեգրելով  $u'(x)$  ածանցյալի (9.9.25) արտահայտությունը, (9.9.3)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^p u'(x_{n-k+1}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx$$

հավասարությունը: Կատարենք հավասարության աջ մասում գտնվող ինտեգրալներում  $t = (x - x_{n+1})/h$  փոփոխականի փոխարինում: Արդյունքում կստանանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x) dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_{-1}^0 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt :$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$B_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^0 \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k} dt, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (9.9.27)$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_{-1}^0 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p) dt : \quad (9.9.28)$$

Այսպիսով,

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + h \varepsilon_n \quad (9.9.29)$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + \varepsilon_n : \quad (9.9.30)$$

Գեն նետելով (9.9.30) հավասարությունում  $\varepsilon_n$  մեծությունը՝ կստանանք հետևյալ տարբերական մեթոդը, որը կոչվում է *Աղանս-Մոուլթոնի մեթոդ*.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}), \quad (9.9.31)$$

$$n = p - 1, p, \dots, N - 1 :$$

Այստեղ  $v_0 = u_0$  և  $v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$  արժեքները տրված են:

Մոտավոր լուծման արժեքները սկսած  $v_p$ -ից, որոշվում են

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}), \quad n = p - 1, p, \dots, N - 1 \quad (9.9.32)$$

բանաձևով: Այսպիսով, Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդը, երբ  $p > 1$ , բազմաքայլ անբացահայտ մեթոդ է:

Եթե համեմատենք (9.9.30) և (9.9.31)-ը, ապա կտեսնենք, որ  $\varepsilon_n$  մեծությունը մեթոդի անկապակցությունն է կամ մոտարկման սխալանքը: Օգտվելով (9.9.28) արտահայտությունից՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M_{p+2}}{p+1} h^{p+1} : \quad (9.9.33)$$

Դա նշանակում է, որ Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդն ունի մոտարկման  $(p+1)$ -րդ կարգ: Ընդ որում, մեթոդի տեղային սխալանքը, ինչպես և Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդում,  $O(h^{p+2})$  կարգի է (դրա ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին): Այստեղ մենք չենք արտածելու Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդի գլոբալ սխալանքի գնահատականը (տե՛ս, օրինակ, [5]): Նշենք միայն, որ եթե  $v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$  «մեկնարկային» արժեքները հաշվված են  $O(h^{p+1})$  ճշտությամբ, ապա գլոբալ սխալանքը նույնպես ունի այդ ճշգրտությունը:

Դիտարկենք Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդի մի քանի մասնավոր դեպք: Համաձայն (9.9.27) և (9.9.32)-ի՝ ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա)  $p = 0$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + hf(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

(Էյլերի անբացահայտ մեթոդ),

բ)  $p = 1$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, v_{n+1}) + f(x_n, v_n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

գ)  $p = 2$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12} [5f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 8f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})], \\ n = 1, 2, \dots, N-1,$$

դ)  $p = 3$  դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{24} [9f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 19f(x_n, v_n) - 5f(x_{n-1}, v_{n-1}) + f(x_{n-2}, v_{n-2})], \\ n = 2, 3, \dots, N-1 :$$

### 9.9.3 Պրեդիկտոր-կորեկտոր տիպի մեթոդներ

Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդը տալիս է ոչ թե  $v_{n+1}$ -ի հաշվման բացահայտ բանաձև, այլ հավասարում (ընդհանուր դեպքում՝ ոչ գծային) այդ արժեքը որոշելու համար:



Այդ տեսակետից Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդի թվային իրականացումն ավելի բարդ է, քան Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդինը: Չնայած դրան, Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդը նույնպես օգտագործվում է: Բանն այն է, որ նույն թվով ինտերպոլացիայի հանգույցներ օգտագործելիս Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդը սովորաբար տալիս է ավելի ճշգրիտ արդյունք, քան Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդը (տե՛ս, օրինակ, [31]):

Նշենք, որ գործնականում այդ մեթոդները հաճախ կիրառվում են միասին: Դրանք այսպես կոչված *պրեդիկտոր-կոռեկտոր* մեթոդներն են (այլ կերպ ասած, *նախագուշակման* և *շտկման* մեթոդներ): Հիմնական գաղափարն այն է, որ սկզբից Ադամս-Բաշֆորթի բացահայտ մեթոդով գտնվում է ընթացիկ հանգույցում ճշգրիտ լուծման սկզբնական մոտավորությունը (*նախագուշակում*), իսկ այնուհետև այդ արժեքը Ադամս-Մոուլթոնի մեթոդի միջոցով ճշգրտվում է (*շտկում*): Այս դեպքում հաշվողական սխեման գրվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1}^{AB} &= v_n + h \sum_{k=0}^p A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}), \\
 v_{n+1} &= v_n + h \sum_{k=1}^p B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}) + h B_0 f(x_{n+1}, v_{n+1}^{AB}), \\
 n &= p, p+1, \dots, N-1 :
 \end{aligned}
 \tag{9.9.34}$$

Պրեդիկտոր-կոռեկտոր տիպի մեթոդները բացահայտ մեթոդներ են:

## 9.10 Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ

Կայունությունը հաշվողական ալգորիթմի կարևորագույն հատկություններից է: Այս հասկացության հետ մենք բազմիցս առնչվել ենք գրքի նախորդ բաժիններում: Սույն պարագրաֆում կքննարկենք այդ երևույթի ազդեցությունը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման վրա: Ընդ որում, մենք կտարբերենք ինչպես դիֆերենցիալ հավասարումների բուն լուծումների, այնպես էլ դրանց թվային լուծման տարբերական մեթոդների կայունությունը:

### 9.10.1 Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների կայունությունը

Նախ դիտարկենք երկու օրինակ:

**Օրինակ 9.10.1 :** Դիցուք տրված է

$$\begin{aligned}
 u' &= xu(u-2), \quad x \geq 0, \\
 u(0) &= u_0
 \end{aligned}
 \tag{9.10.1}$$

Կոշտի խնդիրը: Այս խնդրի ճշգրիտ լուծումը հետևյալն է.

$$u(x) = \frac{2u_0}{u_0 + (2 - u_0)e^{x^2}} :$$

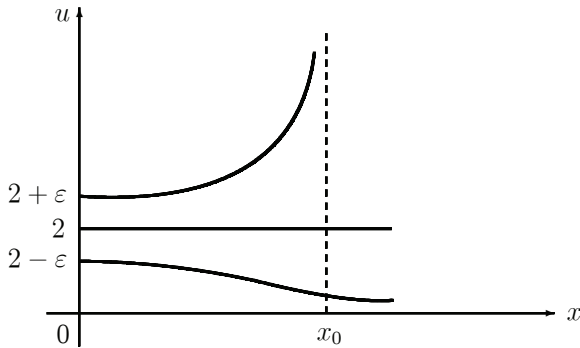
Եթե  $u_0 = 2$ , ապա  $u(x) \equiv 2$ : Եթե  $u_0 = 2 - \varepsilon$ , որտեղ  $\varepsilon > 0$ , ապա

$$u(x) = \frac{2(2 - \varepsilon)}{2 - \varepsilon + \varepsilon e^{x^2}}$$

և  $u(x) \rightarrow 0$ , երբ  $x \rightarrow \infty$ : Իսկ եթե  $u_0 = 2 + \varepsilon$ , որտեղ  $\varepsilon > 0$ , ապա

$$u(x) = \frac{2(2 + \varepsilon)}{2 + \varepsilon - \varepsilon e^{x^2}} :$$

Այս լուծումը ունի եզակիություն  $x_0 = \sqrt{\ln(1 + 2\varepsilon^{-1})}$  կետում:



**Նկ. 9.10.1** Խնդրի լուծումների վարքը

Լուծումների բնորոշ վարքը ցույց է տրված նկ. 9.10.1-ում:  $\diamond$

### Օրինակ 9.10.2 : Դիտարկենք

$$u'' - 2u' - 3u = 0, \quad x \geq 0 \quad (9.10.2)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1 \quad (9.10.3)$$

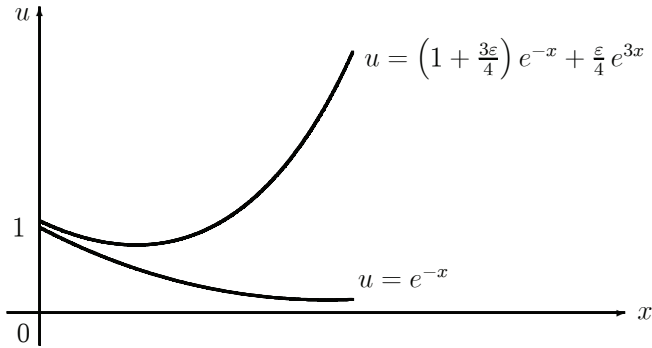
սկզբնական պայմաններով: Խնդրի լուծումը  $u(x) = e^{-x}$  ֆունկցիան է: Պարզ է, որ  $u(x) \rightarrow 0$ , երբ  $x \rightarrow \infty$ : Փոփոխենք (9.10.3) պայմաններից առաջինը  $\varepsilon > 0$  փոքր մեծությամբ՝

$$u(0) = 1 + \varepsilon, \quad u'(0) = -1 : \quad (9.10.4)$$

Դժվար չէ ստուգել, որ (9.10.4) պայմաններով (9.10.2) հավասարման լուծումը կլինի

$$u(x) = \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\right)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{4}e^{3x} \quad (9.10.5)$$

ֆունկցիան: Երբ  $x \rightarrow \infty$ , ապա (9.10.5)-ի աջ մասի առաջին գումարելին ձգտում է զրոյի, իսկ երկրորդ գումարելին ցանկացած  $\varepsilon$ -ի համար ձգտում է անվերջության:



**Նկ. 9.10.2** Հավասարման լուծումները

Հավասարման երկու լուծումները պատկերված են նկ. 9.10.2-ում:  $\diamond$

Գիտարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ որոշ հավասարումների համար սկզբնական պայմանների փոքր փոփոխությունները կարող են առաջացնել լուծման ահռելի փոփոխություններ: Այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարումները կոչվում են *անկայուն*՝ սկզբնական պայմանների նկատմամբ: Գործնականում հնարավոր չէ ստանալ այդպիսի հավասարումների ընդունելի թվային լուծում, քանի որ մոտարկման և հաշվողական սխալանքների ազդեցությունը համադրելի է սկզբնական պայմանների փոփոխության հետ և կարող է բերել արդյունքի աղետալի աղավաղման:

Տարբերական մեթոդների կայունությունը մենք կհետազոտենք

$$u' = \lambda u, \quad x \geq 0 \tag{9.10.6}$$

պարզ հավասարման օրինակով, որտեղ  $\lambda$ -ն ոչ գրոյական հաստատուն է, իսկ սկզբնական պայմանը հետևյալն է՝

$$u(0) = u_0 : \tag{9.10.7}$$

Այդ հավասարումը դիտարկում են որպես *մոդելային հավասարում* (տե՛ս ստորև 9.10.1 դիտողությունը): Հեշտ է ստուգել, որ խնդրի լուծումը

$$u(x) = u_0 e^{\lambda x} \tag{9.10.8}$$

ֆունկցիան է: Եթե  $\lambda < 0$ , ապա լուծումը ձգտում է գրոյի, երբ  $x \rightarrow \infty$ : Իսկ եթե  $\lambda > 0$ , ապա այն բացարձակ արժեքով անսահմանորեն աճում է :

**Դիտողություն 9.10.1 :** *Գիտարկենք*

$$u' = f(x, u), \quad x \geq 0$$

*հավասարումը  $u(0) = u_0$  սկզբնական պայմանով: Դիցուք  $\tilde{u}(x)$ -ը նույն հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է  $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$  սկզբնական պայմանին: Ստանանք հավասարում  $z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$  սխալանքի համար: Ունենք*

$$z'(x) = \tilde{u}'(x) - u'(x) = f(x, \tilde{u}) - f(x, u) = f'_u(x, u + \theta z) z(x),$$

որտեղ  $0 < \theta < 1$ : Ներմուծենք  $\lambda(x) \equiv f'_u(x, u + \theta z)$  նշանակումը: Այսպիսով,  $z(x)$  ֆունկցիան

$$\begin{aligned} z' &= \lambda(x)z, & x \geq 0, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned}$$

խնդրի լուծումն է, ինչի շնորհիվ (9.10.6) հավասարումը անվան են մոդելային:

Եթե  $\lambda < 0$ , ապա (9.10.6) հավասարումը կայուն է (9.10.7) սկզբնական պայմանի նկատմամբ: Հակառակ դեպքում, այսինքն՝ երբ  $\lambda > 0$ , հավասարումն անկայուն է: Իրոք, դիցուք  $\tilde{u}(x)$ -ը  $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$  խոտորված սկզբնական պայմանին բավարարող (9.10.6) հավասարման լուծումն է: Այդ դեպքում  $z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$  սխալանքը

$$\begin{aligned} z' &= \lambda z, & x \geq 0, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned} \tag{9.10.9}$$

խնդրի լուծումն է: Համաձայն (9.10.8)-ի՝ այդ լուծումը հետևյալն է.

$$z(x) = \varepsilon e^{\lambda x} : \tag{9.10.10}$$

Այսպիսով, եթե  $\lambda < 0$ , ապա սխալանքը ձգտում է գրոյի, երբ  $x \rightarrow \infty$ : Իսկ եթե  $\lambda > 0$ , ապա այն անսահմանորեն աճում է  $x$ -ի աճման հետ մեկտեղ: Ուստի հետագայում կհամարենք, որ մոդելային հավասարման մեջ  $\lambda < 0$ :

## 9.10.2 Տարբերական մեթոդների կայունությունը

Ինչպես հետևում է (9.10.8)-ից, մոդելային խնդրի լուծման համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.

$$|u(x)| \leq |u_0| \quad \forall x \geq 0 : \tag{9.10.11}$$

Տարբերական մեթոդը կհամարենք կայուն, եթե  $v_n, n = 0, 1, \dots$  մոտավոր լուծման համար տեղի ունի (9.10.11) անհավասարության նմանակը, այն է՝

$$|v_n| \leq |v_0|, \quad n = 0, 1, \dots : \tag{9.10.12}$$

Էյլերի մեթոդը: Ըստ (9.5.5) օրենքի ունենք

$$v_{n+1} = (1 + h\lambda)v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$v_n = (1 + h\lambda)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

բանաձևը: Ակնհայտ է, որ (9.10.12) անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|1 + h\lambda| \leq 1,$$

այսինքն՝

$$-h\lambda \leq 2 : \quad (9.10.13)$$

Այսպիսի սահմանափակման դեպքում ասում են, որ Էյլերի մեթոդը *պայմանականորեն կայուն է*:

Էյլերի անբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (9.5.19)-ի լուծումն ընթացիկ հանգույցում որոշվում է

$$v_{n+1} = v_n + h\lambda v_{n+1}$$

հավասարումից: Լուծելով այն  $v_{n+1}$ -ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այս առնչությունից բխում է

$$v_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} v_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

բանաձևը: Պարզ է, որ (9.10.12) անհավասարությունը տեղի ունի ցանկացած  $h$  քայլի դեպքում: Այսպիսով, Էյլերի անբացահայտ մեթոդը *բացարձակապես կայուն է*:

Էյլերի վերահաշվման մեթոդները: Հաշվի առնելով (9.6.15) պայմանը՝ մոդելային հավասարման համար (9.6.3)-ից ստանում ենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right) v_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

առնչությունը, որտեղից էլ հետևում է

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

բացահայտ արտահայտությունը մոտավոր լուծման համար: Դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2\right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի, երբ  $-h\lambda \leq 2$ : Վերջինը նշանակում է, որ Էյլերի վերահաշվման մեթոդները, մասնավորապես՝ Հոյնի և միջին կետի մեթոդները, *պայմանականորեն կայուն են*:

Ռունգե-Կուտայի մեթոդը: Համաձայն (9.7.3) բանաձևի, ունենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4\right) v_n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղից ստանում ենք արտահայտություն մոտավոր լուծման համար.

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Ինչպես ցույց են տալիս հաշվարկները,

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 + \frac{1}{6} h^3 \lambda^3 + \frac{1}{24} h^4 \lambda^4 \right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի, երբ  $-h\lambda \leq 2.78$ : Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը նույնպես *պայմանականորեն կայուն է*, թեև այստեղ կայունության պայմանը փոքր-ինչ ավելի թույլ է, քան Էյլերի մեթոդում:

Այստեղ մենք չենք զբաղվելու Ադամսի բազմաբայլ մեթոդների կայունության հետազոտմամբ, քանի որ այն պահանջում է հատուկ եղանակների կիրառում: Օրինակի միջոցով կսահմանափակվենք միայն երկբայլ մեթոդի դիտարկմամբ:

### Օրինակ 9.10.3 : Դիտարկենք

$$u' = -2u, \quad u(0) = 1 \quad (9.10.14)$$

Կոշիի խնդիրը, որի լուծումը  $u(x) = e^{-2x}$  ֆունկցիան է: Կիրառենք խնդրի թվային լուծման համար

$$\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = -2v_n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad v_0 = 1, v_1 = e^{-2h} \quad (9.10.15)$$

երկբայլ տարբերական մեթոդը: Ինչպես տեսնում ենք, առաջին երկու հանգույցներում մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են: Մոտավոր լուծման արժեքները հաջորդ հանգույցներում հաշվվում են

$$v_{n+1} = -4hv_n + v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.10.16)$$

օրենքով, որը հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի համասեռ տարբերական հավասարում է (տե՛ս, օրինակ, [17],[49]): Փնտրենք (9.10.16) հավասարման մասնավոր լուծումները

$$v_n = q^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

տեսքով, որտեղ  $q \neq 0$ : Տեղադրելով այն (9.10.16) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$q^2 + 4hq - 1 = 0$$

*բնութագրիչ հավասարումը*: Այդ հավասարումն ունի երկու տարբեր իրական արմատ.

$$q_1 = -2h + \sqrt{4h^2 + 1}, \quad q_2 = -2h - \sqrt{4h^2 + 1} :$$

Համաձայն երկրորդ կարգի տարբերական հավասարումների տեսության (տե՛ս [17, 49]), (9.10.16) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$v_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n, \quad n = 0, 1, \dots :$$

Այստեղ  $C_1$  և  $C_2$  հաստատունները որոշվում են  $v_0 = 1$  և  $v_1 = e^{-2h}$  պայմաններից, այսինքն՝

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 q_1 + C_2 q_2 = e^{-2h} \end{cases}$$

հավասարումների համակարգից: Լուծելով այդ համակարգը՝ կգտնենք

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2 + 1}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2 + 1}} :$$

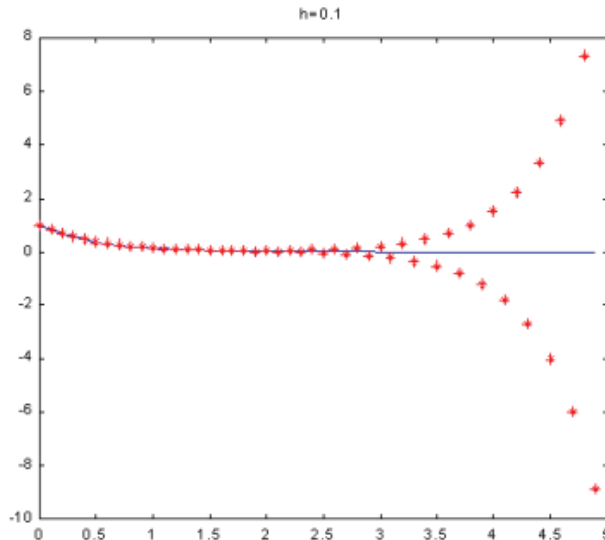
Այսպիսով, ստանում ենք

$$v_n = C_1(-2h + \sqrt{4h^2 + 1})^n + C_2(-1)^n(2h + \sqrt{4h^2 + 1})^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9.10.17)$$

բացահայտ բանաձև (9.10.15) տարբերական մեթոդով որոշվող մոտավոր լուծման համար: Այս բանաձևը թույլ է տալիս հետազոտել  $v_n$  լուծման վարքը, երբ  $n \rightarrow \infty$ : Իրոք, կամայական  $h$  քայլի համար

$$0 < -2h + \sqrt{4h^2 + 1} < 1, \quad 2h + \sqrt{4h^2 + 1} > 1 :$$

Ուստի (9.10.17) արտահայտության աջ մասի առաջին անդամը ձգտում է զրոյի, երբ  $n \rightarrow \infty$ , իսկ երկրորդ անդամը, տատանվելով, ձգտում է անվերջության: Միաժամանակ, խնդրի ճշգրիտ լուծումը ձգտում է զրոյի, երբ  $x \rightarrow +\infty$  (նկ. 9.10.3): Այսինքն՝ (9.10.15) մեթոդը (9.10.14) խնդրի կիրառմամբ անկայուն է:



**Նկ. 9.10.3** (9.10.14) խնդրի ճշգրիտ (—) և մոտավոր (\*) լուծումները

Երկրորդ գումարելին (9.10.17)-ի աջ մասում իրենից ներկայացնում է այսպես կոչված *մակարոյժ* փաղաղրիչ:  $\diamond$

### 9.10.3 Կոշտ հավասարումներ

Գոյություն ունեն հավասարումներ, որոնց թվային լուծումը ստանդարտ մոտեցման դեպքում բերում է անբավարար արդյունքների: Այդպիսի հավասարումների թվին են պատկանում այսպես կոչված *կոշտ հավասարումները*: Պարզաբանենք կոշտության երևույթը հետևյալ օրինակի վրա (տե՛ս [41]):

Գիտարկենք

$$u' = -100u + 100, \quad u(0) = 2 \quad (9.10.18)$$

Կոշտի խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է

$$u(x) = 1 + e^{-100x} \quad (9.10.19)$$

Ֆունկցիան: Այդ լուծումը կայուն է և շատ արագ նվազում է  $u(0) = 2$  արժեքից մինչև իր սահմանային արժեքը, որը հավասար է մեկի: Այսպես, օրինակ,  $u(0.1) \approx 1 + 5 \cdot 10^{-5}$ :

Կիրառենք (9.10.18) խնդրի լուծման համար

$$v_{n+1} = (1 - 100h)v_n + 100h, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_0 = 2 \quad (9.10.20)$$

Էյլերի մեթոդը: Համաձայն (9.10.13) պայմանի պետք է վերցնել  $h \leq 0.02$ : Վերցնելով  $h = 0.02$ , ստանում ենք

$$v_{n+1} = -v_n + 2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_0 = 2$$

հաշվարկային բանաձևը: Այս բանաձևով ստացված

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 0, \dots$$

հաջորդականությունը ոչ մի դեպքում չի կարելի դիտարկել որպես (9.10.18) խնդրի (9.10.19) ճշգրիտ լուծման բավարար մոտարկում, թեև մոտավոր լուծումը կայուն է (9.10.12) իմաստով: Երբ  $h = 0.01$ , հաշվարկները տալիս են

$$v_0 = 2; \quad v_{n+1} = 1, \quad n = 0, 1, \dots:$$

Էսպես ավելի մանր քայլը՝ օրինակ,  $h = 0.001$ , բավականին լավ է արտացոլում լուծման վարքը.

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.9, \quad v_2 = 1.81, \dots:$$

Ստացված (9.10.20) մոտավոր լուծման համար դժվար չէ արտածել

$$v_n = 1 + (1 - 100h)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9.10.21)$$

բանաձևը (թողնում ենք այն ընթերցողին որպես վարժություն): Համեմատելով (9.10.19) և (9.10.21) արտահայտությունները, տեսնում ենք, որ  $(1 - 100h)^n$  մեծությունը բավականին լավ մոտարկում է ճշգրիտ լուծման  $e^{-100x}$  բաղադրիչը: Թեև  $e^{-100x}$  անդամը տալիս է չնչին ներդրում ճշգրիտ լուծման մեջ (համեմայն դեպս, երբ  $x \geq 0.1$ ), կայունության տեսակետից պահանջվում է, որ  $h$  քայլը լինի բավականաչափ փոքր:



Կարող ենք ասել, որ կոշտ են այն հավասարումները, որոնց լուծումը ներառում է արագ մարող բաղադրիչ, որի ներդրումը ոչ էական է, սակայն թվային մեթոդների կայունության տեսակետից պահանջվում է, որ այդ բաղադրիչը մոտարկվի մեծ ճշտությամբ՝ *h* քայլի փոքր ընտրության շնորհիվ: Իսկ դա բերում է ինչպես մեքենայական ժամանակի մեծ ծախսերի, այնպես էլ հաշվարկային սխալանքների կուտակման:

Թվային ալգորիթմների կառուցումը կոշտ հավասարումների լուծման համար ժամանակակից հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն ուղղություններից է: Սույն դասընթացում մենք չենք զբաղվելու այդ հարցով: Նշենք միայն, որ կոշտ հավասարումների լուծման համար որպես օրենք օգտագործվում են անբացահայտ մեթոդները: Օրինակ, կիրառենք (9.10.18) խնդրի լուծման համար բացարձակապես կայուն Էյլերի անբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (9.5.18)-ի՝ ունենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = -100v_{n+1} + 100, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_0 = 2 :$$

Քանի որ հավասարումը  $v_{n+1}$ -ի նկատմամբ գծային է, հաշվարկները կիրականացվեն

$$v_{n+1} = \frac{v_n + 100h}{1 + 100h}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_0 = 2$$

բանաձևով: Վերցնելով  $h = 0.02$  քայլը՝ գտնում ենք

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.3333, \quad v_2 = 1.1111, \quad v_3 = 1.0370, \dots :$$

Նույնիսկ համեմատաբար մեծ  $h = 0.1$  քայլի դեպքում կստանանք

$$v_0 = 2, \quad v_1 = 1.0909, \quad v_2 = 1.0083, \quad v_3 = 1.0008, \dots$$

հաջորդականությունը, որը որակապես ճիշտ է արտացոլում խնդրի ճշգրիտ լուծման վարքը:

## 9.11 Երկկետային եզրային խնդիր

Բացի Կոշիի խնդրից սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար գոյություն ունեն նաև *եզրային խնդիրներ*, որոնցում լուծման միակությունը ապահովող լրացուցիչ պայմանները տրվում են հասվածի ծայրակետերում:

**Օրինակ 9.11.1** (ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխումը): Պահանջվում է գտնել  $T$  ջերմաստիճանի բաշխումը  $l$  երկարության ձողում, որը պատրաստված է  $\kappa$  ջերմահաղորդականության գործակցով համասեռ նյութից: Չողի  $x = 0$  և  $x = l$  ծայրակետերում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան.

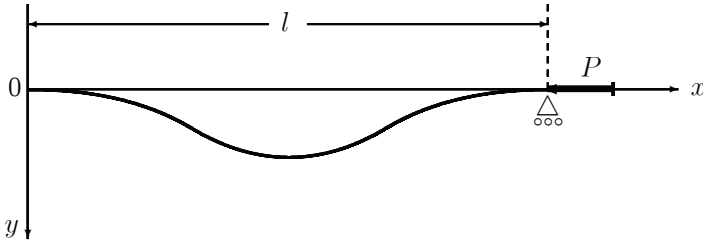
$$T(0) = T_0, \quad T(l) = T_l :$$

Ենթադրվում է, որ ձողում գեներացվում է ջերմություն  $q(x)$  արագությամբ: Պարզվում է, որ դիֆերենցիալ հավասարումը  $T(x)$  ջերմաստիճանի նկատմամբ գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$-\kappa T''(x) = q(x), \quad 0 \leq x \leq l :$$

Այսպիսով, գալիս ենք երկկետային եզրային խնդրի:  $\diamond$

**Օրինակ 9.11.2** (ձողի երկայնական ծռում): Դիտարկվում է հաստատուն կոշտությամբ ձողի առանցքով ուղղված  $P$  սեղմող ուժի ազդեցության տակ երկայնական ծռման խնդիրը (*Էյլերի խնդիրը*): Ենթադրվում է, որ ձողի  $x = 0$  ձախ ծայրը ամրացված, իսկ  $x = l$  աջ ծայրը հենված է (նկ. 9.11.1):



**Նկ. 9.11.1** Ձողի երկայնական ծռում

Հայտնի է, որ ձողի առանցքից շեղման  $y(x)$  ֆունկցիան բավարարում է

$$y^{IV} + \frac{P}{EI} y'' = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը ( $EI$ -ն ձողի կոշտությունն է): Ձողի ամրացված ծայրերի վրա ունենք հետևյալ եզրային պայմանները.

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0 :$$

Պահանջվում է գտնել  $P$ -ի փոքրագույն արժեքը (*կրիտիկական ուժ*), որի դեպքում առաջանում է ձողի երկայնական ծռում: Այլ կերպ ասած, հարցը հանգում է  $P$ -ի այն փոքրագույն դրական արժեքի որոշմանը, որի դեպքում եզրային խնդիրն ունի ոչ տրիվիալ լուծում:  $\diamond$

Դիտարկենք երկրորդ կարգի

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a < x < b \quad (9.11.1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (9.11.2)$$

եզրային պայմաններով: Այս խնդրի լուծման գոյության և միակության պայմանները սպառնիչ կերպով ուսումնասիրված են գիտական գրականության մեջ (տե՛ս, օրինակ, [39]): Ձևակերպենք այդպիսի պայմաններից մեկը:

Դիցուք  $f(x, u, z)$  ֆունկցիան և նրա  $f'_u(x, u, z)$  ու  $f'_z(x, u, z)$  մասնական ածանցյալները անընդհատ են  $D = \{(x, u, z) : a \leq x \leq b, -\infty < u, z < +\infty\}$  տիրույթում: Եթե

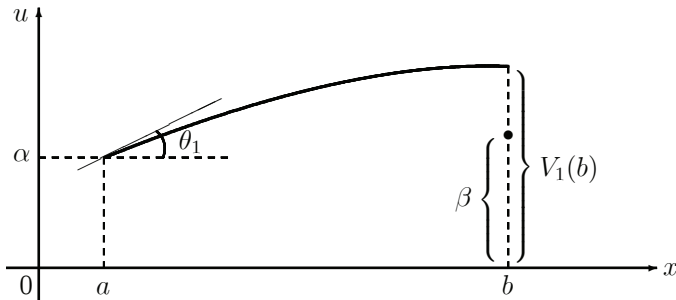
$$f'_u(x, u, z) > 0 \quad \forall (x, u, z) \in D$$

և գոյություն ունի այնպիսի  $M > 0$  հաստատուն, որ

$$|f'_z(x, u, z)| \leq M \quad \forall (x, u, z) \in D,$$

ապա (9.11.1), (9.11.2) եզրային խնդիրն ունի միակ լուծում:

Կիրառվում են եզրային խնդիրների թվային լուծման տարբեր եղանակներ: Օրինակ, եզրային խնդրի փոխարեն կարելի է հաջորդաբար լուծել Կոշիի խնդիրներ: Այս տիպի մեթոդներից համառոտակի նկարագրենք այսպես կոչված *հրաձգության մեթոդը*:



**Նկ. 9.11.2** Հրաձգության մեթոդ

Ընտրենք ինչ-որ  $K_1$  թիվ և դիտարկենք (9.11.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = K_1 \tag{9.11.3}$$

սկզբնական պայմաններով: Ենթադրենք, որ  $[a, b]$  հատվածում հաշվված է (9.11.1), (9.11.3) խնդրի  $V_1$  մոտավոր լուծումը: Համեմատելով  $V_1(b)$  արժեքը և  $\beta$  աջ եզրային պայմանը՝ կարող ենք շտկել  $\theta_1 = \arctg K_1$  թեքման անկյունը (նկ. 9.11.2): Դրանով (9.11.1) հավասարման համար ստանում ենք Կոշիի խնդիր

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = K_2$$

սկզբնական պայմաններով, որտեղ  $K_2$  թիվը ընտրված է այնպես, որ փոքրանա  $\beta - V_1(b)$  տարբերությունը: Օգտվելով ստացած ինֆորմացիայից, կարելի է կիրառել

$u'(a) = K_1, K_2, K_3, \dots$  արժեքների ընտրության այս կամ այն ստրատեգիան, որը կբերի  $V_1(b), V_2(b), V_3(b), \dots$  հաջորդականության գուգամիտությանը  $\beta$  թվին:

Նշենք, որ հրաձգության մեթոդը լավ արդյունքներ է տալիս այն դեպքում, երբ Կոշիի խնդրի լուծումը քիչ զգայուն է  $u'(a)$  տրվող արժեքների փոփոխման նկատմամբ: Հակառակ դեպքում կարող է ստացվել անկայուն հաշվարկ:

### Օրինակ 9.11.3 : Դիտարկենք

$$u'' = 100u, \quad 0 < x < 1 \quad (9.11.4)$$

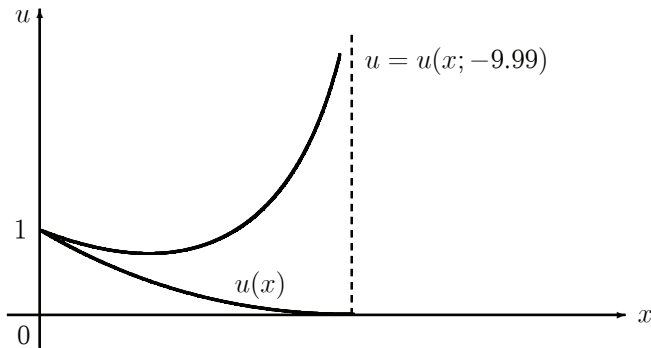
հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (9.11.5)$$

եզրային պայմաններով: Դժվար չէ ստուգել, որ (9.11.4), (9.11.5) խնդրի լուծումը

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{-20}} e^{-10x} - \frac{e^{-20}}{1 - e^{-20}} e^{10x} \quad (9.11.6)$$

ֆունկցիան է:



**Նկ. 9.11.3**  $u(x)$  և  $u(x; K)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները, երբ  $K = -9.99$

Այժմ դիտարկենք (9.11.4) հավասարումը

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = K \quad (9.11.7)$$

սկզբնական պայմաններով: Այդ խնդրի լուծումը կախված է  $K$  պարամետրից՝

$$u(x; K) = \frac{10 - K}{20} e^{-10x} + \frac{10 + K}{20} e^{10x} : \quad (9.11.8)$$

Հեշտ է տեսնել, որ  $u(1; K) = 0$  արժեքը հասանելի է, երբ

$$K = -10 \frac{1 + e^{-20}}{1 - e^{-20}} \approx -10 :$$

Պարզվում է, որ  $u(x; K)$  ֆունկցիան շատ զգայուն է  $K$  պարամետրի փոփոխման նկատմամբ: Օրինակ,  $K = -9.99$  արժեքի համար ֆունկցիայի վարքը ցույց է տրված նկ. 9.11.3-ում: Բանն այն է, որ Կոշիի խնդրի (9.11.8) լուծումը աճում է ինչպես  $e^{10x}$ , և այդ արագ աճող բաղադրիչի մարման համար սկզբնական պայմանը պետք է ընտրված լինի բավականին ճշգրիտ:  $\diamond$

Հրաձգության մեթոդում հարցը հանգում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծմանը, ինչը չի քննարկվել մեր դասընթացում: Այդպիսի խնդիրների լուծման եղանակներից մեկը հետևյալն է:

Եթե ունենք

$$u'' = f(x, u, u')$$

հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \gamma$$

սկզբնական պայմաններով, ապա  $u'(x) = y(x)$  տեղադրմամբ այն կարելի է բերել երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Այդ դեպքում  $u''(x) = y'(x)$ , և մենք ստանում ենք

$$\begin{cases} u'(x) = y(x), \\ y'(x) = f(x, u, y) \end{cases}$$

համակարգը  $u(a) = \alpha$ ,  $y(a) = \gamma$  սկզբնական պայմաններով: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել, օրինակ,

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1} - U_n}{h} &= Y_n, \\ \frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} &= f(x_n, U_n, Y_n), \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots$$

Էյլերի մեթոդը՝ վերցնելով  $U_0 = \alpha$ ,  $Y_0 = \gamma$  սկզբնական արժեքները:

## 9.12 Վերջավոր տարբերությունների մեթոդը

Այժմ դիտարկենք եզրային խնդիրների լուծման ամենատարածված եղանակը՝ վերջավոր տարբերությունների մեթոդը: Այս մեթոդի միջոցով եզրային խնդրի լուծումը հանգում է հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծմանը (զծային կամ ոչ զծային՝ կախված դիֆերենցիալ հավասարման տիպից): Դա կարելի է իրագործել փոխարինելով դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալները վերջավոր տարբերություններով (տես 9.3 պարագրաֆը):

Դիտարկենք

$$-u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (9.12.1)$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$\begin{aligned}\mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) &= \alpha, \\ \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) &= \beta\end{aligned}\quad (9.12.2)$$

եզրային պայմաններով, որտեղ  $\mu_0^2 + \mu_1^2 > 0$ ,  $\nu_0^2 + \nu_1^2 > 0$ : Երբ  $\mu_1 = \nu_1 = 0$ , այդ պայմանները կոչվում են *առաջին սեռի պայմաններ*: Եթե  $\mu_0 = \nu_0 = 0$ , ապա ունենք *երկրորդ սեռի պայմաններ*: Ընդհանուր դեպքում, երբ  $\mu_i, \nu_i \neq 0$ ,  $i = 0, 1$ , եզրային պայմանները անվանում են *երրորդ սեռի պայմաններ*: Որոշ խնդիրներում միջակայքի ձախ և աջ ծայրակետերում կարող են տրվել տարբեր սեռի պայմաններ:

Եզրային խնդրի լուծման գոյության և միակության պայմանները կարելի է գտնել, օրինակ, [39] մենագրության մեջ: Մասնավորապես, եթե  $p(x), q(x)$  և  $f(x)$  ֆունկցիաները անընդհատ են  $[a, b]$  հատվածում, ընդ որում՝  $q(x) \geq 0$ , ապա առաջին սեռի եզրային պայմաններով (9.12.1) հավասարումն ունի միակ լուծում  $u(x) \in C^2[a, b]$ : Ավելին, եթե  $p(x), q(x), f(x) \in C^2[a, b]$ , ապա  $u(x) \in C^4[a, b]$ :

Կառուցենք  $[a, b]$  հատվածում  $h = (b - a)/(N + 1)$  քայլով հավասարաչափ *ցանց*

$$\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh, n = 0, 1, \dots, N + 1\} : \quad (9.12.3)$$

Ցանցի  $x_n$  հանգույցները, որտեղ  $1 \leq n \leq N$ , կանվանենք *ներքին*, իսկ  $x_0 = a$  և  $x_{N+1} = b$  հանգույցները՝ *եզրային*: Ցանցի վրա որոշված  $v^h = \{v_n\}_{n=0}^{N+1}$  ֆունկցիան, որտեղ  $v_n \equiv v(x_n)$ , կանվանենք *ցանցային*: Նշանակենք  $G_h$ -ով ցանցային ֆունկցիաների գծային տարածությունը: Պարզ է, որ  $[a, b]$  հատվածում որոշված  $f(x)$  անընդհատ ֆունկցիան ծնում է  $f^h = \{f_n\}_{n=0}^{N+1}$  ցանցային ֆունկցիա, որտեղ  $f_n \equiv f(x_n)$ :

Գիտարկենք սկզբից (9.12.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (9.12.4)$$

եզրային պայմաններով: Կատարենք (9.12.1), (9.12.4) խնդրի վերջավոր տարբերական մոտարկումը՝ փոխարինելով հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալները վերջավոր տարբերություններով (տե՛ս 9.3 պարագրաֆը): Սահմանենք (9.12.1), (9.12.4) խնդրի մոտավոր լուծումը որպես

$$\begin{cases} -(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_x + q_n v_n = f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (9.12.5)$$

*ցանցային հավասարումներին* բավարարող  $v^h \in G_h$  ցանցային ֆունկցիա, որտեղ, համաձայն (9.3.3) և (9.3.7) նշանակումների,

$$(v_n)_x \equiv \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h}, \quad (v_n)_{x\bar{x}} \equiv \frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} :$$

Վերջավոր տարբերությունների մեթոդով ստացված ցանցային հավասարումների համակարգը անվանում են *տարբերական սխեմա*:

Գրենք (9.12.5) տարբերական սխեման

$$\begin{cases} -\left(1 + \frac{h}{2} p_n\right) v_{n-1} + \left(2 + h^2 q_n\right) v_n - \left(1 - \frac{h}{2} p_n\right) v_{n+1} = h^2 f_n, \\ n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (9.12.6)$$

տեսքով: Ստանում ենք երեքանկյունագծային մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Այդ համակարգը կարելի է արդյունավետորեն լուծել 4.6 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Մեթոդի կոռեկտության համար (9.12.6) համակարգի մատրիցը պետք է ունենա անկյունագծային գերիշխում, այսինքն՝ բավարարի

$$\left|2 + h^2 q_n\right| \geq \left|1 + \frac{h}{2} p_n\right| + \left|1 - \frac{h}{2} p_n\right|, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (9.12.7)$$

պայմաններին (տես 4.6.1 թեորեմը): Եթե ենթադրենք, որ  $q(x) \geq 0$ , ապա (9.12.7) անհավասարությունները տեղի կունենան բավականաչափ փոքր  $h$  քայլի դեպքում՝

$$h \leq \frac{2}{\max_{a \leq x \leq b} |p(x)|} :$$

Ցանցի քայլի վրա այդպիսի սահմանափակումը կարելի է շրջանցել, եթե (9.12.1) հավասարման մեջ առաջին ածանցյալի մոտարկման կենտրոնական տարբերական ածանցյալի փոխարեն օգտագործենք աջակողմյան կամ ձախակողմյան տարբերական ածանցյալները՝ կախված գործակցի նշանից: Ավելի ճիշտ, ձևափոխենք (9.12.5) տարբերական սխեման՝ գրելով  $n$ -րդ հավասարումը

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_x + q_n v_n = f_n, \quad \text{եթե } p_n < 0,$$

կամ

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_{\bar{x}} + q_n v_n = f_n, \quad \text{եթե } p_n \geq 0$$

տեսքով: Այդ դեպքում ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը կունենա անկյունագծային գերիշխում՝ անկախ  $h$  քայլի մեծությունից: Սակայն նշենք, որ եթե կենտրոնական տարբերություններով մոտարկումը ունի ճշտության երկրորդ կարգ ըստ  $h$ -ի (լեմմա 9.3.3), ապա միակողմանի տարբերություններով մոտարկումը ունի միայն առաջին կարգ (տես 9.3.1 և 9.3.2 լեմմաները):

Երրորդ սեռի պայմանների դեպքում տարբերական հավասարումները եզրային հանգույցներում կարելի է գրել, օրինակ, հետևյալ կերպ.

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{v_1 - v_0}{h} = \alpha, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{v_{N+1} - v_N}{h} = \beta :$$

Եթե (9.12.1), (9.12.2) խնդրի լուծումը բավականաչափ ողորկ է, ապա եզրային պայմանների ավելի ճշգրիտ մոտարկում տալիս են

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} = \alpha, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{3v_{N+1} - 4v_N + v_{N-1}}{2h} = \beta$$

հավասարումները: Իրոք, եթե  $u(x) \in C^3[a, b]$ , ապա օգտվելով Թեյլորի բանաձևից, կարելի է հեշտությամբ ցույց տալ, որ

$$\begin{aligned} \frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} &= u'(a) + O(h^2), \\ \frac{3u(x_{N+1}) - 4u(x_N) + u(x_{N-1}))}{2h} &= u'(b) + O(h^2) \end{aligned}$$

(թողնում ենք ընթերցողին դրանում համոզվել ինքնուրույն):

Տարբերական սխեմաների կառուցման ժամանակ ոչ միշտ է պետք ցուցաբերել շարժումային մոտեցում, այլ խելամտորեն օգտագործել խնդրի դիֆերենցիալ օպերատորի տեսքը, նրա եզրային պայմանները և այլն: Գիտարկենք, օրինակ, (9.12.4) եզրային պայմաններով

$$-(a(x)u')' = f(x), \quad a < x < b \quad (9.12.8)$$

հավասարումը, որտեղ  $a(x) > 0$ : Իհարկե, մենք կարող ենք գրել (9.12.8) հավասարումը

$$-a(x)u'' - a'(x)u' = f(x)$$

համարժեք տեսքով, որից հետո կիրառել մեզ հայտնի վերջավոր տարբերական բանաձևերը: Կարելի է վարվել նաև այլ կերպ: Ներմուծենք  $\omega_h$  ցանցի ցանկացած երկու հանգույցների մեջտեղում օժանդակ «ֆիկտիվ» հանգույցներ.

$$x_{n\pm 1/2} = x_n \pm \frac{h}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N :$$

Այդ դեպքում  $n = 1, 2, \dots, N$  արժեքների համար կունենանք՝

$$\begin{aligned} -(a(x)u')' \Big|_{x=x_n} &\approx -\frac{a_{n+1/2}u'(x_{n+1/2}) - a_{n-1/2}u'(x_{n-1/2})}{h} \approx \\ &-\frac{1}{h} \left[ a_{n+1/2} \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - a_{n-1/2} \frac{u(x_n) - u(x_{n-1}))}{h} \right] = \\ &\frac{1}{h^2} \left[ -a_{n-1/2}u(x_{n-1}) + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})u(x_n) - a_{n+1/2}u(x_{n+1}) \right] : \end{aligned}$$

Այստեղ  $a_{n\pm 1/2} \equiv a(x_{n\pm 1/2})$ : Հիմք ընդունելով ստացված արտահայտությունը՝ գրենք հետևյալ տարբերական սխեման.

$$\begin{cases} -a_{n-1/2}v_{n-1} + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})v_n - a_{n+1/2}v_{n+1} = h^2 f_n, \\ \quad \quad \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, v_{N+1} = \beta : \end{cases} \quad (9.12.9)$$

Հեշտ է տեսնել, որ (9.12.9) համակարգի մատրիցը սիմետրիկ է և ունի անկյունագծային գերիշխում:

Այսպիսով, սույն պարագրաֆում մենք համառոտակի ծանոթացանք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեմաների կառուցման հիմնական սկզբունքներին:



### 9.13 Տարբերական սխեմայի հետազոտումը

Գիտարկենք

$$Lu \equiv -u'' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (9.13.1)$$

զծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (9.13.2)$$

Եզրային պայմաններով: Ենթադրենք, որ  $q(x), f(x) \in C^2[a, b]$ , ընդ որում  $q(x) \geq 0$ : Այդ դեպքում գոյություն ունի (9.13.1), (9.13.2) խնդրի  $u(x) \in C^4[a, b]$  միակ լուծում (տես [39]):

Գրենք

$$\begin{cases} L_h v_n \equiv -(v_n)_{x\bar{x}} + q_n v_n = f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, \quad v_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (9.13.3)$$

սխեմա: Վերջավոր տարբերական հավասարման ձախ մասով սահմանվում է  $L_h$  տարբերական օպերատոր, որը  $L$  դիֆերենցիալ օպերատորի վերջավոր տարբերական մոտարկումն է:

Տարբերական սխեմայով որոշվում է սիմետրիկ երեքանկյունազծային մատրիցով

$$\begin{cases} -v_{n-1} + (2 + h^2 q_n) v_n - v_{n+1} = h^2 f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ v_0 = \alpha, \quad v_{N+1} = \beta \end{cases}$$

ցանցային հավասարումների համակարգը: Քանի որ համակարգի մատրիցն ունի անկյունազծային գերիշխում, ապա (9.13.3) վերջավոր տարբերական խնդրի լուծումը միակն է:

Սահմանենք  $w^h = \{w_n\}_{n=0}^{N+1}$  ցանցային ֆունկցիաների  $G_h$  տարածությունում

$$\|w^h\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N+1} |w_n|$$

նորմը:

Պարզ է, որ (9.13.1), (9.13.2) խնդրի ճշգրիտ լուծումը ընդհանուր առմամբ չի բավարարում (9.13.3) տարբերական սխեմային: Հետազոտենք հետևյալ հարցը. *ի՞նչ ճշտությամբ է այդ լուծումը բավարարում (9.13.3) տարբերական սխեմային*: Դրա համար ներմուծենք  $\varepsilon^h = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{N+1}$  ցանցային ֆունկցիան հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\equiv L_h u_n - f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \varepsilon_0 &\equiv u_0 - \alpha, \quad \varepsilon_{N+1} \equiv u_{N+1} - \beta : \end{aligned} \quad (9.13.4)$$

Այդ ֆունկցիան կոչվում է (9.13.3) տարբերական սխեմայի մոտարկման սխալանք: Համաձայն (9.13.2) եզրային պայմանների՝  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$ : Ներքին հանգույցներում ունենք

$$|\varepsilon_n| = |-(u_n)_{x\bar{x}} + q_n u_n + u''(x_n) - q_n u_n| = |u''(x_n) - (u_n)_{x\bar{x}}| :$$

Այստեղից, օգտվելով (9.3.8) գնահատականից, կստանանք

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M_4}{12} h^2, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ  $M_4 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|$ : Այսպիսով,

$$\|\varepsilon^h\| \leq \frac{M_4}{12} h^2 : \quad (9.13.5)$$

Քանի որ  $\|\varepsilon^h\| \rightarrow 0$ , երբ  $h \rightarrow 0$ , ապա ասում են, որ (9.13.3) տարբերական սխեման մոտարկում է (9.13.1), (9.13.2) խնդիրը և ունի մոտարկման երկրորդ կարգ:

Քննարկենք տարբերական սխեմայի մեկ այլ կարևոր հատկություն, որը կոչվում է կայունություն: Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

**Լեմմա 9.13.1** (մաքսիմումի սկզբունքը): Դիցուք  $\theta^h = \{\theta_n\}_{n=0}^{N+1}$  ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ

$$L_h \theta_n \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

և  $M \equiv \max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \geq 0$ : Այդ դեպքում ֆունկցիան եզրային հանգույցներում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, այսինքն՝  $\max(\theta_0, \theta_{N+1}) = M$ :

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ եզրային հանգույցներում նշված  $M$  մեծագույն արժեքը հասանելի չէ՝  $\theta_0 < M$ ,  $\theta_{N+1} < M$ : Այդ դեպքում  $M$  արժեքը հասանելի է ինչ-որ ներքին հանգույցում: Ավելին, կգտնվի այնպիսի  $x_m$  ներքին հանգույց, որ

$$\theta_{m-1} < M, \theta_m = M, \theta_{m+1} \leq M :$$

Այդ հանգույցի համար

$$L_h \theta_m = -\frac{\theta_{m-1} - 2\theta_m + \theta_{m+1}}{h^2} + q_m \theta_m \geq \frac{2M - (\theta_{m-1} + \theta_{m+1})}{h^2} > 0,$$

ինչը հակասում է լեմմայի պայմանին:  $\square$

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք հիմնական պնդումը: Դիցուք  $f^h = \{f_n\}_{n=0}^{N+1}$ :

**Թեորեմ 9.13.1**: Եթե  $v^h$  ցանցային ֆունկցիան բավարարում է (9.13.3) տարբերական սխեմային, ապա

$$\|v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|f^h\| + \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (9.13.6)$$

Ապացույց: Ներմուծենք

$$w_n = \frac{(x_n - a)(b - x_n)}{2} \|f^h\|, \quad n = 0, 1, \dots, N + 1$$

ցանցային ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ  $w_n \geq 0$ , ընդ որում՝  $w_0 = w_{N+1} = 0$ : Այդ դեպքում

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} w_n \leq \max_{a \leq x \leq b} \frac{(x-a)(b-x)}{2} \|f^h\| = \frac{(b-a)^2}{8} \|f^h\| : \quad (9.13.7)$$

Հեշտ է համոզվել, որ

$$L_h w_n \geq \|f^h\|, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (9.13.8)$$

Դիցուք  $\theta^h \equiv v^h - w^h$ : Այդ ցանցային ֆունկցիայի համար, հաշվի առնելով  $L_h$  տարբերական օպերատորի գծայնությունը և (9.13.8) անհավասարությունները, կստանանք.

$$L_h \theta_n = L_h v_n - L_h w_n = f_n - L_h w_n \leq f_n - \|f^h\| \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (9.13.9)$$

Նախ ենթադրենք, որ  $\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \geq 0$ : Այդ դեպքում  $\theta^h$  ցանցային ֆունկցիան բավարարում է 9.13.1 լեմմայի պայմաններին: Հետևաբար

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n = \max(\theta_0, \theta_{N+1}) = \max(\alpha, \beta) \leq \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (9.13.10')$$

Այժմ ենթադրենք, որ  $\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n < 0$ : Այդ դեպքում ակնհայտորեն բխում է

$$\max_{0 \leq n \leq N+1} \theta_n \leq \max(|\alpha|, |\beta|) : \quad (9.13.10'')$$

Օգտվելով (9.13.7) և (9.13.10) անհավասարություններից՝ բոլոր  $n = 0, 1, \dots, N + 1$  արժեքների համար ստանում ենք

$$v_n = w_n + \theta_n \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|f^h\| + \max(|\alpha|, |\beta|) \quad (9.13.11)$$

անհավասարությունները: Գիշտ են նաև

$$-v_n \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|f^h\| + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \dots, N + 1 \quad (9.13.12)$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե  $v^h$  ցանցային ֆունկցիան բավարարում է (9.13.3) տարբերական սխեմային, ապա  $-v^h$  ֆունկցիան կբավարարի

$$\begin{cases} L_h(-v_n) = -f_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ -v_0 = -\alpha, \quad -v_{N+1} = -\beta \end{cases}$$

տարբերական սխեմային: Ուստի (9.13.11) և (9.13.12) անհավասարություններից հետևում են

$$|v_n| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|f^h\| + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \dots, N + 1$$

անհավասարությունները, ուստի և (9.13.6) գնահատականը:  $\square$

Ստացված (9.13.6) գնահատականը բնութագրում է (9.13.3) տարբերական սխեմայի *կայունության* հատկությունը: Պարզաբանենք այդ հասկացության էությունը: Դիտարկենք (9.13.3) տարբերական սխեման և նրա խտտորված աջ մասերով

$$\begin{cases} L_h \bar{v}_n = f_n + \varepsilon_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \bar{v}_0 = \alpha + \varepsilon_0, \bar{v}_{N+1} = \beta + \varepsilon_{N+1} \end{cases}$$

սխեման: Այդ դեպքում  $\bar{v}^h - v^h$  տարբերության համար ունենք՝

$$\begin{cases} L_h(\bar{v}_n - v_n) = \varepsilon_n, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \bar{v}_0 - v_0 = \varepsilon_0, \bar{v}_{N+1} - v_{N+1} = \varepsilon_{N+1} : \end{cases}$$

Համաձայն (9.13.6) գնահատականի՝

$$\|\bar{v}^h - v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|\varepsilon^h\| + \max(|\varepsilon_0|, |\varepsilon_{N+1}|) : \quad (9.13.13)$$

Այսպիսով, (9.13.3) տարբերական խնդրի լուծման խտտորումը համաչափելի է աջ մասերի խտտորումների հետ:

Վերջապես, ցույց տանք (9.13.3) տարբերական սխեմայի *զուգամիտությունը*: Իրոք, (9.13.13) գնահատականից և (9.13.4) -ից, քանի որ  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$ , հետևում է

$$\|u^h - v^h\| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|\varepsilon^h\|$$

գնահատականը (այստեղ  $u^h = \{u_n\}_{n=0}^{N+1}$ ): Օգտվելով (9.13.5)-ից կստանանք՝

$$\|u^h - v^h\| \leq \frac{M_A}{96} (b-a)^2 h^2 : \quad (9.13.14)$$

Այսպիսով, (9.13.1), (9.13.2) եզրային խնդրի օրինակի վրա մենք ցուցադրել ենք գծային դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական դրույթը, որը կարելի է համառոտակի ձևակերպել այսպես. *մոտարկումից և կայունությունից հետևում է զուգամիտությունը*: Այդ գաղափարներին մենք ավելի մանրամասն կառնչվենք հաջորդ գլխում՝ մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները դիտարկելիս:

## Խնդիրներ և վարժություններ - 9

1. Գտնել  $D = \{(x, u) : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq u \leq 4\}$  տիրույթում  $u$  փոփոխականի նկատմամբ Լիպշիցի հաստատումը հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$\text{ա) } f(x, u) = x^2 - u, \quad \text{գ) } f(x, u) = 2xu^2,$$

$$\text{բ) } f(x, u) = -xu, \quad \text{դ) } f(x, u) = -\frac{x}{u} :$$

2. Կիրառելով աստիճանային շարքերի մեթոդը գտնել

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

Խնդրի մոտավոր լուծումը  $x = 0.2$  և  $x = 1.2$  կետերում: Համեմատել  $u(x) = (1-x)^{-1}$  ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ: Պարզաբանել, թե  $x = 1.2$ -ի դեպքում արդյունքը ինչո՞ւ է անբավարար:

3. Կիրառելի՞ է արդյոք Էյլերի մեթոդը

$$u' = 1 + u^2, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad u(0) = 0$$

Խնդրի համար: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = \operatorname{tg} x$  ֆունկցիան է:

4. Յույց տալ, որ

$$u' = \frac{3}{2} u^{1/3}, \quad u(0) = 0$$

Խնդրի համար Էյլերի մեթոդը տալիս է անբավարար արդյունք: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = x^{3/2}$  ֆունկցիան է:

5. Մշակել ալգորիթմ, որի միջոցով կարելի է գտնել

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{x} + v f(x) \\ v' = u + x \end{cases}, \quad u(0) = 0, v(0) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի մոտավոր լուծումը:

6. Տրված է երկրորդ կարգի

$$u''(x) + 3u'(x) = 12, \quad u(0) = 5, u'(0) = 1$$

դիֆերենցիալ հավասարումը: Բերել այն երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի և գրել Էյլերի մեթոդը: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = 4 + 4x + e^{-3x}$  ֆունկցիան է:

7. Տրված է երկրորդ կարգի

$$2u''(x) - 5u'(x) - 3u(x) = 45 e^{2x}, \quad u(0) = 2, u'(0) = 1$$

դիֆերենցիալ հավասարումը: Բերել այն երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի և գրել Էյլերի մեթոդը: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = 4e^{-x/2} + 7e^{3x} - 9e^{2x}$  ֆունկցիան է:

## 8. Գիտարկվում է Կոշիի խնդիրը

$$\begin{cases} u'' = x^2 - u' - v^2, \\ v'' = x + v' + u^3 \end{cases}$$

երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 1$ ,  $v(0) = 1$ ,  $v'(0) = 0$  սկզբնական պայմաններով: Հանգեցնել խնդիրը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի: Կառուցել Էյլերի քաջահայտ և անքաջահայտ մեթոդները:

## 9. Գիցուք

$$u' + a(x)u = f(x), \quad u(0) = u_0$$

Կոշիի խնդրի թվային լուծման համար կիրառվում է

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} + (\alpha_1 a(x_n) + \alpha_2 a(x_{n+1}))(\beta_1 v_n + \beta_2 v_{n+1}) = \gamma_1 f(x_n) + \gamma_2 f(x_{n+1}), \\ n = 0, 1, \dots, v_0 = u_0$$

տարբերական մեթոդը: Ընտրել  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$   $i = 1, 2$  գործակիցներն այնպես, որ մոտարկումը լինի երկրորդ կարգի:

## 10. Տրված է

$$u' = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0$$

Կոշիի խնդիրը: Մշակել ամենաբարձր մոտարկման կարգն ունեցող

$$\frac{v_n - v_{n-2}}{2h} = \alpha f(x_n, v_n) + \beta f(x_{n-1}, v_{n-1}) + \gamma f(x_{n-2}, v_{n-2})$$

տիպի տարբերական մեթոդը:

## 11. Գիտարկվում է

$$u' = x + u, \quad u(0) = 1$$

Կոշիի խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումը  $u(x) = 2e^x - x - 1$  ֆունկցիան է: Ռունգե-Կուտայի մեթոդով գտնել մոտավոր լուծման արժեքը  $x = 0.2$  կետում: Հաշվարկները կատարել  $h = 0.2$  և  $h = 0.1$  քայլերով: Ճշգրտել լուծումը ըստ Ռիչարդսոնի և համեմատել ճշգրիտ լուծման հետ:

## 12. Կիրառել երրորդ կարգի ճշտության Ադամս-Բաշֆորթի մեթոդը

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

խնդրի լուծման համար: Գտնել մոտավոր լուծման  $v_3$  և  $v_4$  արժեքները  $h = 0.1$  քայլով ցանցի վրա՝ վերցնելով որպես «մեկնարկային» արժեքներ  $v_0 = 1.0000$ ,  $v_1 = 1.1111$  և  $v_2 = 1.2500$ : Համեմատել  $u(x) = (1 - x)^{-1}$  ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ:

13. Կառուցել հրաձգության մեթոդը

$$-u'' + (1 + x^2)u' + u = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

Եզրային խնդրի համար, որը  $\varepsilon > 0$  ճշտությամբ բավարարում է աջ եզրային պայմանին:

14. Տրված է

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a < x < b$$

հավասարումը հետևյալ եզրային պայմաններով.

$$\mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) = \alpha, \quad \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) = \beta :$$

Գրել այդ հավասարման համար հրաձգության մեթոդը:

15. Դիցուք  $u(x)$ -ը երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Ճիշտ է արդյոք

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left[ \frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - \frac{u(x) + u(x-2h)}{2} \right]$$

հավասարությունը:

16. Դիցուք  $u(x)$ -ը երեք անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Ճիշտ է արդյոք

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - 2u(x) + \frac{u(x) + u(x-2h)}{2} \right]$$

հավասարությունը:

17. Տրված է

$$(1 + x^2)u'' + 2xu' - u = \sin x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0$$

Եզրային խնդիրը: Գրել այդ խնդրի համար տարբերական սխեմա այնպես, որ ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը լինի սիմետրիկ և ունենա անկյունագծային գերիշխում:

18. Տրված է

$$-u'' + (1 - x)u' + 2u = e^{x-1}, \quad 1 < x < 2.4, \quad u(1) = 1, \quad u(2.4) = 0.5$$

Եզրային խնդիրը: Կիրառելով վերջավոր տարբերությունների մեթոդը՝  $h = 0.2$  քայլով ցանցի վրա գրել ցանցային հավասարումների համակարգը:

19. Տրված է  $u'' - x^2u = 1$  հավասարումը  $u'(0) + 4u(0) = 1$  ձախ եզրային պայմանով: Օգտագործելով ցանցի երկու կետ՝ գրել նշված եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը:
20. Տրված է  $u'' = \sin x + 1$  հավասարումը  $u'(1) - 3u(1) = 1$  աջ եզրային պայմանով: Օգտագործելով ցանցի երկու կետ՝ գրել նշված եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը:
21. Ինչպիսի՞  $\alpha, \beta$  և  $\gamma$  պարամետրերի դեպքում

$$-\frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} + (\alpha v_{n-1} + \beta v_n + \gamma v_{n+1}) = f_n + \frac{h^2}{12} f''(x_n),$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad v_0 = v_{N+1} = 0$$

տարբերական սխեման չորրորդ կարգով մոտարկում է

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

եզրային խնդիրը:

22. Հետագոտել

$$\theta \frac{v_{n+1} - v_n}{h} + (1 - \theta) \frac{v_n - v_{n-1}}{h}, \quad \theta \in [0, 1]$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:



## Գլուխ 10

# ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԻԵՄԱՆԵՐ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

### 10.1 Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին

Բնագիտության, տնտեսական կամ հասարակական ոլորտի բազմաթիվ խնդիրների մաթեմատիկական մոդելները հանգում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների: Հաճախ այդպիսի հավասարումները նկարագրում են ֆիզիկական երևույթներ և կոչվում են *մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*: Բերենք մի քանի դասական օրինակ:

- Լարի տատանման հավասարումը

Ազատ տատանումներ կատարող  $x = 0$  և  $x = l$  ամրացված ծայրերով  $l$  երկարության համասեռ առաձգական լարի  $u(x, t)$  լայնական շեղումը բավարարում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (10.1.1)$$

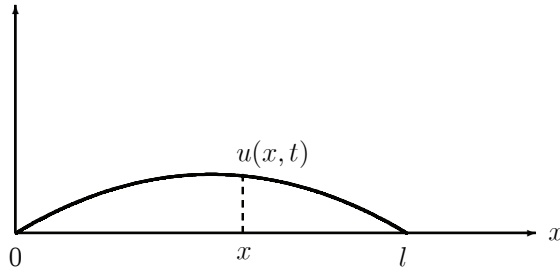
դիֆերենցիալ հավասարմանը

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (10.1.2)$$

եզրային պայմաններով և

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l \quad (10.1.3)$$

սկզբնական պայմաններով (նկ.10.1.1): Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը, այսինքն՝  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ :



Նկ. 10.1.1 Լարի տատանումը

Նշենք, որ (10.1.1) հավասարման մեջ  $a = T/\rho$ , որտեղ  $T$ -ն լարի լարումն է, իսկ  $\rho$ -ն՝ լարի նյութի խտությունը: Բացի այդ, (10.1.3) պայմաններում  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  ֆունկցիաները որոշում են լարի սկզբնական դիրքը և սկզբնական արագությունը համապատասխանաբար: Եթե տատանումները կատարվում են  $f(x, t)$  ֆունկցիայով բնութագրվող արտաքին ուժի ազդեցությամբ, ապա (10.1.1)-ի փոխարեն գրվում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (10.1.4)$$

հավասարումը: Մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների դասակարգման համաձայն՝ (10.1.4)-ը հիպերբոլական տիպի հավասարում է:

• Ջերմահաղորդականության հավասարումը

Դիտարկվում է  $l$  երկարության մեկուսացված համասեռ բարակ ձող, որի ծայրերում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան: Չողի  $u(x, t)$  ջերմաստիճանը բավարարում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (10.1.5)$$

հավասարմանը

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(l, t) = \beta, \quad t > 0 \quad (10.1.6)$$

եզրային պայմաններով: Որպես սկզբնական պայման տրվում է ջերմաստիճանի բաշխումը ժամանակի  $t = 0$  պահին, այսինքն՝

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l : \quad (10.1.7)$$

Տրված (10.1.5) հավասարման մեջ  $a = \kappa/s\rho$ , որտեղ  $\kappa$ -ն ջերմահաղորդականության գործակիցն է,  $s$ -ը ձողի նյութի տեսակարար ջերմունակությունը, իսկ  $\rho$ -ն՝ նրա խտությունը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը՝  $\varphi(0) = \alpha$ ,  $\varphi(l) = \beta$ : Չողի ներսում  $f(x, t)$  ֆունկցիայով բնութագրվող ջերմության աղբյուրի կամ ջերմության կլանիչի առկայության դեպքում ջերմահաղորդականության հավասարումը գրվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f : \quad (10.1.8)$$

Հիշեցնենք, որ (10.1.8)-ը պարաբոլական տիպի հավասարում է:  
 Հարթ թիթեղում ջերմության տարածումը նկարագրվում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u + f \tag{10.1.9}$$

հավասարման միջոցով, որտեղ  $\Delta$ -ն *Լապլասի օպերատորն է՝*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} :$$

Նշենք, որ (10.1.8) և (10.1.9) տիպի հավասարումները ջերմության տարածումից բացի նկարագրում են նաև *դիֆուզիոն* պրոցեսները:

**Գիտողություն 10.1.1 :** *Գիֆուզիա բառն առաջացել է լատիներեն diffusio բառից՝ տարածում, ցրում: Այն նշանակում է նյութի տեղափոխմանը և խտության հավասարեցմանը բերող միջավայրի մասնիկների շարժում: Օրինակ, մոլեկուլների ջերմային շարժումով պայմանավորված մոլեկուլյար դիֆուզիան՝ մեկ նյութի (գազի, հեղուկի, պինդ մարմնի) ներթափանցումն է մյուսի մեջ դրանց անմիջական շփման դեպքում կամ ծակոտկեն միջնապատի միջով:*

- Պուասոնի հավասարումը

Հարթ թիթեղում ստացիոնար (ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող) ջերմության  $u(x, y)$  բաշխումը նկարագրվում է

$$\Delta u = f \tag{10.1.10}$$

Էլիպտական տիպի հավասարումով, որը կոչվում է *Պուասոնի հավասարում*: Համասեռ  $\Delta u = 0$  հավասարումը անվանում են *Լապլասի հավասարում*: Կախված հետազոտվող երևույթի բնույթից՝ թիթեղի եզրի վրա կարող են տրվել տարբեր տիպի եզրային պայմաններ:

Նշենք, որ (10.1.10) տեսքի հավասարում հանդիպում է նաև էլեկտրոստատիկայի, էլեկտրոնային օպտիկայի, առաձգականության տեսության և այլ խնդիրներում:

- Տեղափոխման հավասարումը

Որոշ նյութի միաչափ կոնվեկտիվ տեղափոխումը  $-a(x, t)$  արագությամբ շարժվող միջավայրով նկարագրվում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad t > 0 \tag{10.1.11}$$

հավասարումով, որտեղ  $f(x, t)$ -ն բնութագրում է նյութի հնարավոր աղբյուրների կամ հոսքերի ինտենսիվությունը: Ըստ որում,  $t = 0$  պահին տրվում է նյութի խտության սկզբնական բաշխումը՝

$$u(x, 0) = \varphi(x) : \tag{10.1.12}$$

**Գիտողություն 10.1.2 :** Կոնվեկցիա *բառն առաջացել է լատիներեն convection բառից՝* տեղափոխում, փոխանցում: *Այն նշանակում է մասսաների, լիցքերի կամ այլ ֆիզիկական մեծությունների տեղափոխում շարժվող միջավայրով (օդի, գոլորշու, հեղուկի հոսքերով): Տարբերում են միջավայրի անհամասեռությամբ պայմանավորված բնական կոնվեկցիա (ջերմաստիճանի կամ խտության գրադիենտի առկայություն) և միջավայրի վրա արտաքին մեխանիկական ազդեցությամբ առաջացած հարկադրական կոնվեկցիա:*

Գիտարկված հավասարումները իհարկե չեն սպառում մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների ամբողջ բազմազանությունը (տե՛ս, օրինակ, [44, 55]): Վերը բերված հավասարումները պարզագույն և, միաժամանակ, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների բնորոշ ներկայացուցիչներ են: Չնայած որոշ հավասարումների համար կարելի է ստանալ ճշգրիտ լուծումներ (օրինակ, Ֆուրիեի շարքերի միջոցով), մենք այդ հավասարումները կդիտարկենք որպես հարմար մոդելային խնդիրներ թվային ալգորիթմները ներկայացնելու համար: Բանն այն է, որ ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների համար (օրինակ, փոփոխական գործակիցներով) ստանալ լուծումը անալիտիկ տեսքով, որպես կանոն, հնարավոր չէ: Եվ այստեղ արդեն պետք է կիրառել թվային մեթոդները:

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների լուծման թվային մեթոդներից ամենալայն տարածում ստացել են *վերջավոր տարբերական մեթոդները*: Այդ մեթոդներում արգումենտի անընդհատ փոփոխման տիրույթը փոխարինվում է նրա դիսկրետ փոփոխման տիրույթով՝ *ցանցով*: Հավասարումների մեջ մասնակցող ածանցյալները, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանները, արտահայտվում են ցանցի հանգույցներում ֆունկցիաների արժեքների միջոցով: Արդյունքում ստացվում է ցանցային հավասարումների համակարգ, որը կոչվում է *տարբերական սխեմա*: Լուծելով այդ համակարգը, գտնում են որոնելի լուծման մոտավոր արժեքները ցանցի հանգույցներում:

## 10.2 Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները

Ինչպես արդեն ասվել էր նախորդ պարագրաֆի վերջում, տարբերական սխեմայի գրելը ներառում է երկու հիմնական փուլ.

- ցանցի կառուցում,
- դիֆերենցիալ օպերատորի փոխարինում տարբերական օպերատորով, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանների տարբերական մոտարկում:

Քննարկենք յուրաքանչյուր փուլն առանձին:

### 10.2.1 Ցանցեր և ցանցային ֆունկցիաներ

Տարբերական սխեմա գրելու համար նախ դիտարկվող տիրույթում ընտրվում է կետերի որոշակի բազմություն, որը կոչվում է *ցանց*: Նշված կետերը կոչվում են ցանցի

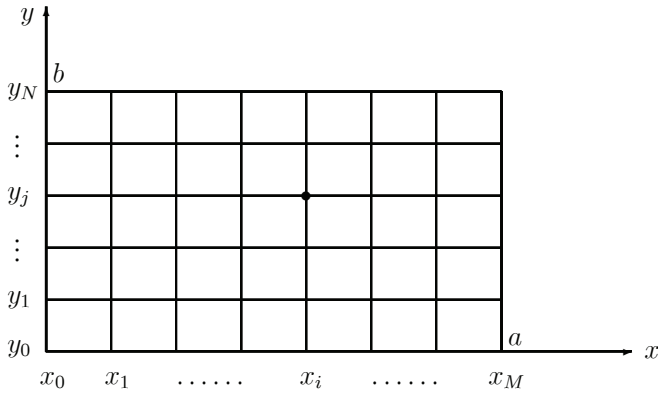
*հանգույցներ:*

Բերենք երկչափ տիրույթներում ցանցերի կառուցման մի քանի օրինակ:

**Օրինակ 10.2.1** (հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Դիտարկենք հարթության մեջ  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$  ուղղանկյուն տիրույթը  $\partial\Omega$  եզրով: Տրոհենք  $Ox$  առանցքի  $[0, a]$  հատվածը և  $Oy$  առանցքի  $[0, b]$  հատվածը  $M$  և  $N$  հավասար մասերի համապատասխանաբար  $x_i = ih_1$  ( $i = 0, 1, \dots, M$ ) և  $y_j = jh_2$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) կետերի միջոցով, որտեղ  $h_1 = a/M$  և  $h_2 = b/N$ : Տանելով այդ կետերով կողողինատական առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ՝ կստանանք  $(x_i, y_j)$  հանգույցներով

$$\omega_{\bar{h}} \equiv \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}\}$$

ցանցը, որտեղ  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  (նկ. 10.2.1): Անվանենք  $h_1$  և  $h_2$  մեծությունները ցանցի *քայլեր*՝ ըստ  $x$  և  $y$  ուղղությունների համապատասխանաբար:



**Նկ. 10.2.1** Հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Երկու հանգույց կանվանենք *հարևան*, եթե դրանց հեռավորությունը  $Ox$  կամ  $Oy$  առանցքների ուղղությամբ հավասար է  $h_1$  կամ  $h_2$  համապատասխանաբար: Այն  $(x_i, y_j)$  հանգույցները, որոնք ընկած են  $\Omega$  տիրույթի ներսում, կոչվում են *ներքին*, իսկ տիրույթի եզրի վրա գտնվող հանգույցները՝ *եզրային*: Սահմանենք ներքին հանգույցների ցանց

$$\omega_{\bar{h}}^{\circ} \equiv \{(x_i, y_j) \in \Omega\}$$

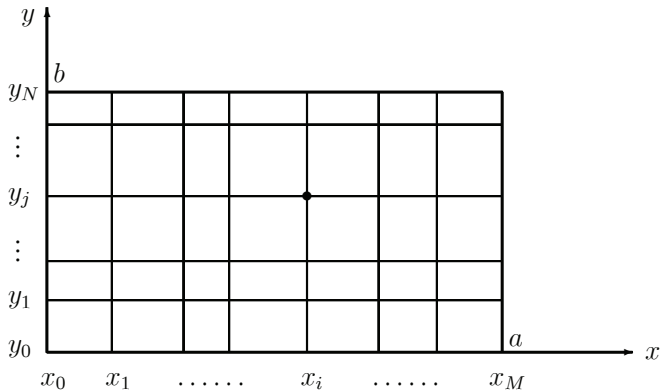
և եզրային հանգույցների ցանց

$$\omega'_{\bar{h}} \equiv \{(x_i, y_j) \in \partial\Omega\} :$$

Ակնհայտ է, որ  $\omega_{\bar{h}} = \omega_{\bar{h}}^{\circ} \cup \omega'_{\bar{h}}$ :  $\diamond$

Ճշգրտությունը բարձրացնելու նպատակով որոշ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում դիտարկվող տիրույթի առանձին մասերում կատարել ցանցի հանգույցների խտացում: Այդ դեպքում օգտագործում են անհավասարաչափ ցանցեր:

**Օրինակ 10.2.2** (անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Գիտարկենք կրկին 10.2.1 օրինակի  $\Omega$  տիրույթը: Տրոհենք  $[0, a]$  և  $[0, b]$  հատվածները համապատասխանաբար  $M$  և  $N$  մասերի կամայականորեն վերցված  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = a$  և  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$  կետերի միջոցով (նկ. 10.2.2): Այստեղ հարևան կետերի միջև եղած հեռավորությունները հաստատուն մեծություններ չեն: Ցանցի քայլերն են՝  $h_1^{(i)} = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, M$  և  $h_2^{(j)} = y_j - y_{j-1}, j = 1, 2, \dots, N$ :



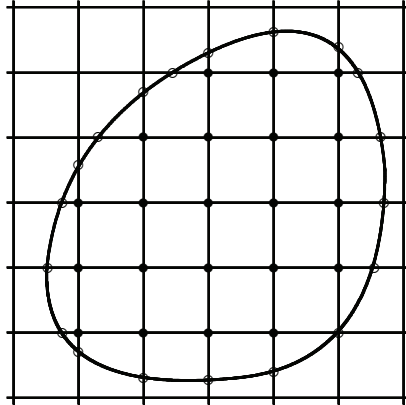
**Նկ. 10.2.2** Անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Այսպիսով,  $(x_i, y_j)$  հանգույցների բազմությունը կազմում է

$$\omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}\}$$

ցանց: Հատուկ նշենք, որ այստեղ արդեն  $h$  նշանին տրվում է փոքր-ինչ այլ իմաստ՝  $h = (h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, \dots, h_1^{(M)}; h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, \dots, h_2^{(N)})$ : Ներքին և եզրային հանգույցների ցանցերը ( $\omega_h^\circ$  և  $\omega_h'$ ) սահմանվում են ճիշտ նույն կերպ, ինչպես նախորդ օրինակում:  $\diamond$

**Օրինակ 10.2.3** (ցանց կամայական տիրույթի համար): Գիցուք  $x, y$  հարթության մեջ տրված է կամայական երկրաչափական ձևի  $\Omega$  տիրույթ  $\partial\Omega$  եզրով: Ըստ  $x$  և  $y$  ուղղությունների՝ համապատասխանաբար ընտրենք  $h_1 > 0$  և  $h_2 > 0$  քայլերը և տանենք  $x = x_i, i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  և  $y = y_j, j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  ուղիղները, որտեղ  $x_i = ih_1$  և  $y_j = jh_2$ : Այդ դեպքում ամբողջ հարթության մեջ կստանանք հավասարաչափ ցանց (վանդակ)  $(x_i, y_j)$  հանգույցներով: Այն հանգույցները, որոնք գտնվում են  $\Omega$  տիրույթի ներսում, անվանենք *ներքին* հանգույցներ (նկ. 10.2.3-ում դրանք նշված են որպես  $\bullet$ ) և դրանց համախմբությունը նշանակենք  $\omega_h^\circ$ -ով: Այնուհետև,  $x = x_i$  և  $y = y_j$  ուղիղների հատման կետերը  $\partial\Omega$  եզրի հետ անվանենք *եզրային* հանգույցներ (նկ. 10.2.3-ում դրանք նշված են որպես  $\circ$ ), իսկ դրանց համախմբությունը նշանակենք  $\omega_h'$ -ով: Ըստ մեր նշանակումների՝  $h = (h_1, h_2)$ :



**Նկ. 10.2.3** Ցանց կամայական ձևի տիրույթի համար

Այսպիսով,  $\Omega$  տիրույթի համար կառուցված է  $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$  ցանցը, որը տիրույթի եզրի մոտ անհավասարաչափ է:  $\diamond$

Նշենք, որ մեր դիտարկած մի քանի օրինակներով չեն սպառվում ցանցերի կառուցման բոլոր եղանակները, որոնք հատկապես բազմազան են կամայական ձևի տիրույթների համար:

**Գիտողություն 10.2.1 :** *Դիտարկված օրինակներում մենք ներմուծում էինք  $h$  նշանը, որին, կախված ցանցի յուրահատկությունից, վերագրվում էր տարբեր իմաստներ: Պայմանավորվենք հետագայում այդ նշանը մեկնաբանել որպես ցանցի «քայլ»:*

Ցանցի հանգույցների վրա որոշված ֆունկցիան կանվանենք *ցանցային*: Եթե համարակալենք ցանցի հանգույցները որոշակի կարգով, ապա ցանցային ֆունկցիան կարելի է համարել վեկտոր, որի չափը հավասար է ցանցի հանգույցների քանակին: Կօգտագործենք  $G_h, G_h^\circ$  և  $G_h'$  գրությունները համապատասխանաբար  $\omega_h, \omega_h^\circ$  և  $\omega_h'$  ցանցերի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունները նշանակելու համար:

**10.2.2 Դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումը**

Դիցուք ունենք  $L$  գծային դիֆերենցիալ օպերատոր, որը գործում է մեկ կամ մի քանի փոփոխականի  $u = u(x)$  ֆունկցիաների վրա: Այստեղ որպես  $x$  հասկանում ենք համապատասխան չափողականության տարածության կետ: Փոխարինելով  $x \in \omega_h$  հանգույցում  $Lu(x)$ -ի արտահայտության մեջ մտնող ածանցյալները վերջավոր-տարբերական առնչություններով կստանանք  $L_h u(x)$  արտահայտությունը, որը ցանցի հանգույցների ինչ-որ  $S_h(x)$  բազմության կետերում  $u$  ֆունկցիայի արժեքների գծային կոմբինացիա է՝

$$L_h u(x) = \sum_{\xi \in S_h(x)} A_h(x, \xi) u(\xi), \tag{10.2.1}$$

որտեղ  $A_h(x, \xi)$  հատուկ սկզբունքով ընտրված գործակիցներ են: Հանգույցների  $S_h(x)$  համախմբությունը կոչվում է *շաբլոն*  $x$  հանգույցի համար:

Այսպիսով, (10.2.1) արտահայտությամբ որոշվում է  $L$  դիֆերենցիալ օպերատորը մոտարկող  $L_h$  տարբերական օպերատոր:

Դիտարկենք որոշ պարզագույն օպերատորների տարբերական մոտարկումները:

- Օպերատոր  $Lu \equiv u'$ :

Ըստ էության այս օպերատորի մոտարկման հարցը մենք արդեն բավականին մանրամասն քննարկել ենք 9.3 պարագրաֆում: Այստեղ մենք կարող ենք օգտվել աջակողմյան, ձախակողմյան կամ կենտրոնական տարբերական ածանցյալներից: Համապատասխանաբար կստանանք հետևյալ տարբերական օպերատորները.

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \equiv u_x(x) \quad (10.2.2)$$

(շաբլոնը՝  $S_h(x) = \{x, x+h\}$ ),

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \equiv u_{\bar{x}}(x) \quad (10.2.3)$$

(շաբլոնը՝  $S_h(x) = \{x-h, x\}$ ) կամ

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \equiv u_x^{(o)}(x) \quad (10.2.4)$$

(շաբլոնը՝  $S_h(x) = \{x-h, x+h\}$ ):

Որպես դիտարկվող օպերատորի տարբերական մոտարկում կարելի է վերցնել նաև (10.2.2) և (10.2.3) դեպքերի գծային կոմբինացիան, այսինքն՝

$$L_h^{(\sigma)} u(x) \equiv \sigma u_x(x) + (1-\sigma)u_{\bar{x}}(x), \quad (10.2.5)$$

որտեղ  $\sigma$ -ն ցանկացած իրական թիվ է:  $L_h^{(\sigma)}$  տարբերական օպերատորը որոշված է  $S_h(x) = \{x-h, x, x+h\}$  երեքկետանի շաբլոնի վրա: Մասնավորապես,  $\sigma = 0.5$  դեպքում կստանանք (10.2.4) տարբերական օպերատորը:

- Օպերատոր  $Lu \equiv u''$ :

Մենք արդեն բազմիցս օգտվել ենք երկրորդ կարգի ածանցյալի տարբերական մոտարկումից (տե՛ս (9.3.7)-ը): Սահմանենք տարբերական օպերատորը՝

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \equiv u_{x\bar{x}}(x) : \quad (10.2.6)$$

Այստեղ շաբլոնն է՝  $S_h(x) = \{x-h, x, x+h\}$ :

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականի ֆունկցիաների վրա գործող դիֆերենցիալ օպերատորները:



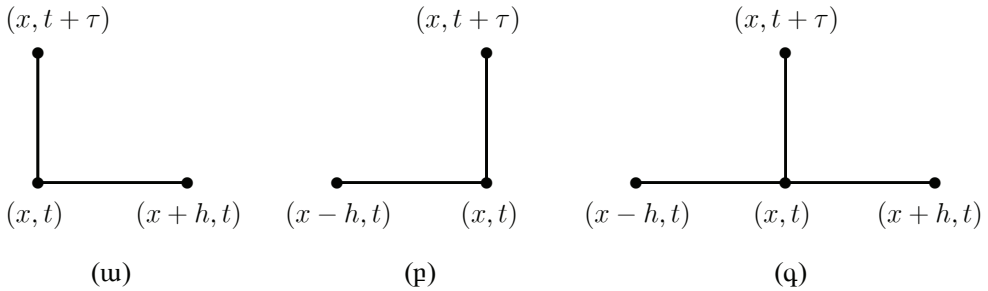
- Օպերատոր  $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}$ :

Օգտվելով նկ.10.2.4-ում պատկերված շաբլոններից, գրենք համապատասխան տարբերական մոտարկումները.

$$L_{\bar{h}}u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_x(x, t) \quad (\text{շաբլոն (ա)}), \quad (10.2.7)$$

$$L_{\bar{h}}u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_{\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շաբլոն (բ)}), \quad (10.2.8)$$

$$L_{\bar{h}}u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_x(x, t) \quad (\text{շաբլոն (գ)}): \quad (10.2.9)$$



**Նկ. 10.2.4** Շաբլոններ  $\partial u/\partial t - \partial u/\partial x$  օպերատորի մոտարկման համար

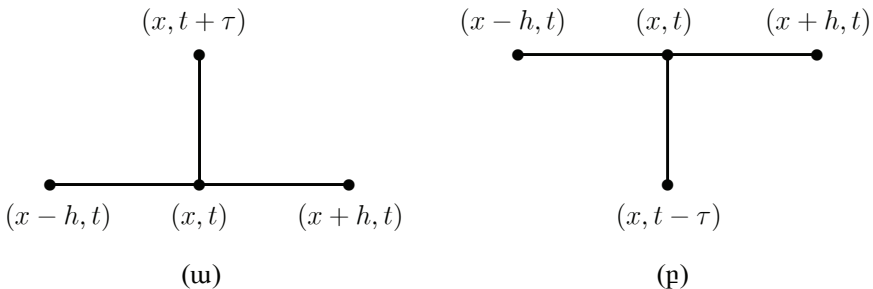
Գիտարկվող օպերատորի համար նույնպես կարելի է կառուցել  $\sigma$  պարամետրից կախված

$$L_{\bar{h}}^{(\sigma)}u(x, t) \equiv u_t(x, t) - [\sigma u_x(x, t) + (1 - \sigma)u_{\bar{x}}(x, t)] \quad (10.2.10)$$

տարբերական օպերատորների ընտանիք: Մասնավորաբար, երբ  $\sigma = 0.5$ , (10.2.10)-ից ստանում ենք վերը բերված (10.2.9) տարբերական օպերատորը:

- Օպերատոր  $Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ :

Այս դիֆերենցիալ օպերատորի մոտարկման համար օգտվենք նկ.10.2.5-ում պատկերված շաբլոններից:



**Նկ. 10.2.5** Շաբլոններ  $\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2$  օպերատորի մոտարկման համար

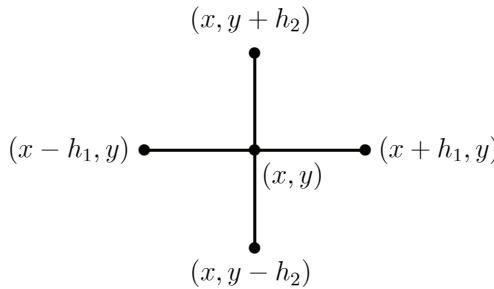
Համապատասխանորեն կստանանք հետևյալ տարբերական օպերատորները՝

$$L_{\hbar}u(x, t) \equiv u_t(x, t) - u_{x\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շաբլոն (ա)}), \quad (10.2.11)$$

$$L_{\hbar}u(x, t) \equiv u_{\bar{t}}(x, t) - u_{x\bar{x}}(x, t) \quad (\text{շաբլոն (բ)}) : \quad (10.2.12)$$

- Լապլասի օպերատոր  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  :

Լապլասի օպերատորի առավել հաճախ օգտագործվող տարբերական մոտարկումը կատարվում է ըստ նկ. 10.2.6-ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի:



**Նկ. 10.2.6** «խաչ» շաբլոնը

Լապլասի  $\Delta_{\hbar}$  տարբերական օպերատորը սահմանենք

$$\Delta_{\hbar}u(x, y) \equiv u_{x\bar{x}}(x, y) + u_{y\bar{y}}(x, y) \quad (10.2.13)$$

արտահայտության միջոցով:

### 10.2.3 Տարբերական սխեմաներ

Որպես օրենք մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրների դրվածքը, բացի դիֆերենցիալ հավասարումից, պարունակում է նաև *եզրային* և *սկզբնական* լրացուցիչ պայմաններ, որոնք ապահովում են լուծման միակությունը: Վերը մենք արդեն ասել ենք, որ *տարբերական սխեմա* կոչվում է ինչպես դիֆերենցիալ հավասարումը, այնպես էլ եզրային և սկզբնական պայմանները մոտարկող տարբերական հավասարումների համակարգը: Բերենք տարբերական սխեմաների կառուցման մի քանի օրինակ:

#### Օրինակ 10.2.4 : Դիտարկենք

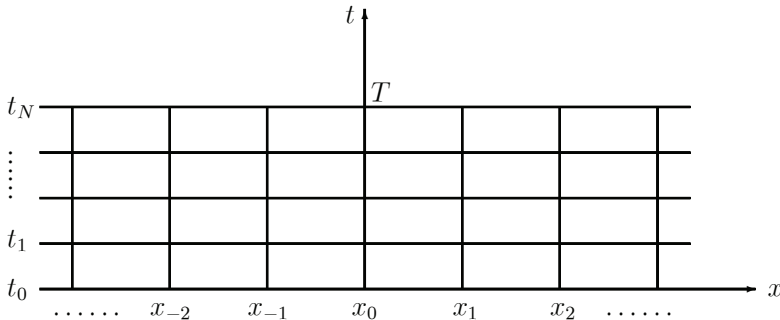
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T$$

տեղափոխման հավասարումը

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

սկզբնական պայմանով:

Կառուցենք  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq t \leq T$  տիրույթում  $\omega_h$  ցանց՝  $h > 0$  քայլով ըստ  $x$  փոփոխականի և  $\tau = T/N$  ( $N$ -ը բնական թիվ է) քայլով ըստ  $t$ -ի (նկ. 10.2.7): Ցանցի հանգույցներն են  $(x_m, t_n)$  կետերը, որտեղ  $x_m = mh$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  և  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ : Ֆիքսած  $n$ -ի դեպքում  $(x_m, t_n)$  հանգույցների համախմբությունն անվանենք ցանցի  $n$ -րդ շերտ:



**Նկ. 10.2.7** Ցանց տեղափոխման հավասարման համար

Ցանցային  $w \in G_h$  ֆունկցիայի արժեքը  $(x_m, t_n)$  հանգույցում նշանակենք  $w_m^n$ -ով: Կառուցենք տարբերական սխեման ըստ նկ. 10.2.4ա-ում պատկերված շարքին:

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a_m^n \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} :$$

Գրված սխեմայում՝  $\varphi_m \equiv \varphi(x_m)$ : Այստեղ  $v \in G_h$  մոտավոր լուծման արժեքը  $(x_m, t_{n+1})$  հանգույցում հաշվվում է բացահայտորեն ըստ

$$v_m^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h} a_m^n\right) v_m^n + \frac{\tau}{h} a_m^n v_{m+1}^n + \tau f_m^n$$

բանաձևի: Այսպիսով, իմանալով լուծումը  $n$ -րդ շերտում, հաշվում ենք լուծումը հաջորդ  $(n+1)$ -րդ շերտում: Քանի որ սկզբնական շերտում  $v_m^0$  արժեքները տրված են, ապա մենք կարող ենք քայլ առ քայլ հաշվել մոտավոր լուծման արժեքները ցանցի կամայական հանգույցում: Նշենք, որ թեև  $x$  ուղղությամբ միաչափ ցանցի հանգույցների բանակը անվերջ է,  $v_m^{n+1}$ -ի հաշվման համար պահանջվում են միայն  $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+n+1}$  արժեքները:  $\diamond$

**Օրինակ 10.2.5 :** Դիտարկենք  $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$  ուղղանկյուն տիրույթում Դիրիխլեի խնդիր Պուասոնի հավասարման համար.

$$\begin{cases} \Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u = \varphi, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10.2.14)$$

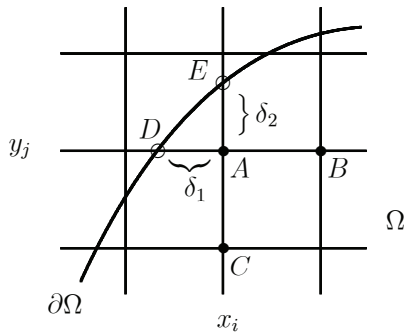
Կառուցենք  $\bar{\Omega}$  տիրություն  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  քայլով  $\omega_{\bar{h}} = \omega_{\bar{h}}^{\circ} \cup \omega'_{\bar{h}}$  հավասարաչափ ցանց (օրինակ 10.2.1): Նշանակենք  $w(i, j)$ -ով  $w \in G_{\bar{h}}$  ցանցային ֆունկցիայի արժեքը  $(x_i, y_j)$  հանգույցում: Օգտագործելով «խաչ» շաբլոնը (նկ. 10.2.6), գրենք

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{h}} v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}}^{\circ} \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega'_{\bar{h}} \end{cases} \quad (10.2.15)$$

տարբերական սխեման ( $\Delta_{\bar{h}}$  տարբերական օպերատորը սահմանված է (10.2.13)-ում): Համապատասխան ցանցային հավասարումների համակարգի լուծման եղանակը քննարկված է ստորև 10.9 պարագրաֆում:  $\diamond$

**Օրինակ 10.2.6 :** Դիտարկենք  $\partial\Omega$  ողորկ եզրով  $\Omega$  տիրություն (10.2.14) Դիրիլետի խնդիրը: Այդ խնդրի համար շարադրենք տարբերական սխեմայի կառուցման եղանակներից մեկը:

Կառուցենք  $\Omega$  տիրություն  $\omega_{\bar{h}}$  ցանցը, ինչպես նկարագրվել է 10.2.3 օրինակում: Տրոհենք  $\omega_{\bar{h}}^{\circ}$  ներքին հանգույցների բազմությունը երկու ենթաբազմությունների: Անվանենք  $(x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}}^{\circ}$  հանգույցը *խիստ ներքին*, եթե  $(x_i - h_1, y_j), (x_i + h_1, y_j), (x_i, y_j - h_2)$  և  $(x_i, y_j + h_2)$  հանգույցները պատկանում են  $\bar{\Omega}$ -ին: Խիստ ներքին հանգույցների բազմությունը նշանակենք  $\omega_{\bar{h}}^{\circ\circ}$ -ով: Մնացած ներքին հանգույցները անվանենք *սահմանամերձ*: Դիցուք  $\omega_{\bar{h}}^{\circ'} \equiv \omega_{\bar{h}}^{\circ} \setminus \omega_{\bar{h}}^{\circ\circ}$  սահմանամերձ հանգույցների բազմությունն է:



**Նկ. 10.2.8** Ցանց սահմանամերձ հանգույցի շրջակայքում

Խիստ ներքին հանգույցներում տարբերական հավասարումները գրվում են ճիշտ այնպես, ինչպես (10.2.15) սխեմայում, այն է՝

$$\Delta_{\bar{h}} v(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega_{\bar{h}}^{\circ\circ} :$$

Եզրային հանգույցներում ունենք

$$v(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \omega'_{\bar{h}} :$$

Սահմանամերձ հանգույցներում հավասարումները գրելու համար կիրառենք գծային ինտերպոլացիա  $x$  կամ  $y$  առանցքների ուղղությամբ:

Դիտարկենք նկ. 10.2.8-ում պատկերված հանգույցների դասավորությունը: Դիցուք  $A(x_i, y_j)$ -ն սահմանամերձ հանգույց է, իսկ դրան հարևան ներքին հանգույցները ըստ  $x$  և  $y$  ուղղությունների համապատասխանաբար  $B(x_i + h_1, y_j)$  և  $C(x_i, y_j - h_2)$  հանգույցներն են: Ունենք նաև  $A$ -ին ամենամոտ եզրային հանգույցներ ըստ  $x$  և  $y$  ուղղությունների՝  $D(x_i - \delta_1, y_j)$  և  $E(x_i, y_j + \delta_2)$  համապատասխանաբար, որտեղ  $0 < \delta_1 < h_1$  և  $0 < \delta_2 < h_2$ : Ըստ Թեյլորի բանաձևի ունենք

$$u(B) = u(x_i + h_1, y_j) = u(A) + h_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(h_1^2)$$

և

$$u(D) = u(x_i - \delta_1, y_j) = u(A) - \delta_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(\delta_1^2) :$$

Եթե բազմապատկենք առաջին հավասարությունը  $\delta_1$ -ով, երկրորդը՝  $h_1$ -ով, և անդամ առ անդամ գումարենք ստացված հավասարությունները, ապա կստանանք

$$u(A) = \frac{h_1 u(D) + \delta_1 u(B)}{h_1 + \delta_1} + O(h_1^2) :$$

Դեն նետելով մնացորդային անդամը՝ կունենանք հավասարում  $A$  սահմանամերձ հանգույցում.

$$v(A) = \frac{h_1 \varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} :$$

Փաստորեն մենք կատարեցինք գծային ինտերպոլացիա ըստ մոտավոր լուծման արժեքների  $B$  և  $D$  կետերում: Համանմանորեն կստանանք

$$v(A) = \frac{h_2 \varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2}$$

հավասարումը: Կարելի է նաև, երկու ուղղությունների հավասարազոր օգտագործմամբ, հավասարումը  $A$  հանգույցում գրել հետևյալ տեսքով.

$$v(A) = \frac{1}{2} \left( \frac{h_1 \varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} + \frac{h_2 \varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2} \right) :$$

Այսպիսով, սահմանամերձ հանգույցներում ցանցային հավասարումների գրառման եղանակները բազմազան են:  $\diamond$

Բոլոր օրինակներում մենք սահմանափակվել էինք առաջին սեռի եզրային և սկզբնական պայմանների դիտարկմամբ: Բնական է, որ ածանցյալները պարունակող եզրային և սկզբնական պայմանները մոտարկվում են ավելի բարդ արտահայտություններով (տե՛ս, օրինակ, [5, 9, 46, 48]):

### 10.2.4 Տարբերական սխեմայի գույզամիտությունը, մոտարկումը և կայունությունը

Նախ ասենք, որ մենք արդեն առնչվել ենք այս երեք հասկացություններին 9.13 պարագրաֆում՝ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման վերջավոր տարբերությունների մեթոդը ուսումնասիրելիս: Այստեղ մենք կտանք տարբերական սխեմաների այդ կարևորագույն բնութագրերի խիստ սահմանումները և կհաստատենք կապը դրանց միջև:

Դիցուք  $\partial\Omega$  եզրով  $\Omega$  տիրույթում պահանջվում է գտնել

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{10.2.16}$$

դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է լրացուցիչ (եզրային կամ սկզբնական) պայմանների՝

$$lu(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{10.2.17}$$

որտեղ  $L$ -ը և  $l$ -ը գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են: Ենթադրվում է, որ (10.2.16), (10.2.17) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

Կառուցենք  $\Omega$  տիրույթի համար  $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$  ցանցը: Գրենք

$$\begin{cases} L_h v^h(x) = f^h(x), & x \in \omega_h^\circ \\ l_h v^h(x) = \varphi^h(x), & x \in \omega_h' \end{cases} \tag{10.2.18}$$

տարբերական սխեման, որտեղ  $L_h$ -ը և  $l_h$ -ը համապատասխանաբար  $L$  և  $l$  օպերատորների տարբերական մոտարկումներն են, իսկ  $f^h \in G_h^\circ$  և  $\varphi^h \in G_h'$  ցանցային ֆունկցիաները  $f$  և  $\varphi$  ֆունկցիաների պրոյեկցիաներն են ցանցի վրա:

Սահմանենք  $G_h^\circ, G_h^\circ$  և  $G_h'$  ցանցային ֆունկցիաների գծային տարածություններում որոշակի  $\|\cdot\|_h, \|\cdot\|_h^\circ$  և  $\|\cdot\|_h'$  նորմեր համապատասխանաբար: Նշանակենք  $|\hbar|$ -ով  $\hbar = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  «քայլի» երկարությունը՝

$$|\hbar| \equiv \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2} :$$

Այնուհետև, դիցուք  $u^h$ -ը (10.2.16), (10.2.17) խնդրի  $u$  ճշգրիտ լուծման պրոյեկցիան է  $\omega_h$  ցանցի վրա, այն է՝  $u^h(x) = u(x)$  կամայական  $x \in G_h$  հանգույցի համար:

Այժմ տանք տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական սահմանումները:

**Սահմանում 10.2.1 :** Ասում են, որ (10.2.18) տարբերական սխեման *գույզամիտում է* (10.2.16), (10.2.17) խնդրի լուծմանը, եթե

$$\|u^h - v^h\|_h \rightarrow 0, \quad \text{երբ } |\hbar| \rightarrow 0 : \tag{10.2.19}$$

Ընդ որում, եթե տեղի ունի

$$\|u^h - v^h\|_h \leq C |\hbar|^m \tag{10.2.20}$$

անհավասարությունը, որտեղ  $C$ -ն  $\hbar$ -ից անկախ դրական հաստատուն է և  $m > 0$ , ապա ասում են, որ սխեման ունի  $m$ -րդ կարգի ճշտություն: Իսկ եթե առկա է

$$\|u^{\hbar} - v^{\hbar}\|_{\hbar} \leq C \left( h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p} \right) \quad (10.2.21)$$

անհավասարությունը, որտեղ  $m_{\alpha} > 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , ապա ասում են, որ սխեմայի ճշտության կարգը ըստ  $h_{\alpha}$ -ի հավասար է  $m_{\alpha}$ -ի:

**Սահմանում 10.2.2 :** Ասում են, որ (10.2.18) տարբերական սխեման մոտարկում է (10.2.16), (10.2.17) խնդիրը, եթե

$$\|L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} \rightarrow 0, \quad \|l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar}\|_{\hbar}' \rightarrow 0, \quad \text{երբ } |\hbar| \rightarrow 0 : \quad (10.2.22)$$

Ավելին, եթե տեղի ունեն

$$\|L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} \leq C_1|\hbar|^m, \quad \|l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar}\|_{\hbar}' \leq C_2|\hbar|^m \quad (10.2.23)$$

անհավասարությունները, որտեղ  $C_1$  և  $C_2$  դրական հաստատունները  $\hbar$ -ից անկախ են, իսկ  $m > 0$ , ապա ասում են, որ սխեմայի մոտարկման կարգը հավասար է  $m$ -ի: Եթե

$$\begin{aligned} \|L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} &\leq C_1 \left( h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p} \right), \\ \|l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} &\leq C_2 \left( h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \dots + h_p^{m_p} \right), \end{aligned} \quad (10.2.24)$$

որտեղ  $m_{\alpha} > 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , ապա ասում են, որ սխեմայի մոտարկման կարգը ըստ  $h_{\alpha}$ -ի հավասար է  $m_{\alpha}$ -ի:

**Սահմանում 10.2.3 :** Ասում են, որ (10.2.18) տարբերական սխեման կայուն է, եթե

$$\|v^{\hbar}\|_{\hbar} \leq C_3\|f^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} + C_4\|\varphi^{\hbar}\|_{\hbar}', \quad (10.2.25)$$

որտեղ  $C_3$  և  $C_4$  դրական հաստատունները ինչպես  $\hbar$ -ից, այնպես էլ  $f^{\hbar}$ -ից և  $\varphi^{\hbar}$ -ից անկախ դրական հաստատուններ են:

Փաստորեն (10.2.25) կայունության անհավասարությունը նշանակում է, որ (10.2.18) տարբերական խնդրի մոտաքային տվյալների փոքր փոփոխությունը չի կարող հարուցել լուծման անհամաչափելիորեն մեծ փոփոխություն: Այսպիսով, կայունությունը բնութագրում է տարբերական սխեմայի զգայունությունը տարբեր տիպի սխալանքների նկատմամբ:

Ներմուծված հասկացությունների միջև կապը հաստատում է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 10.2.1 :** Եթե (10.2.18) տարբերական սխեման մոտարկում է (10.2.16), (10.2.17) խնդիրը և կայուն է, ապա այն զուգամետ է, ընդ որում ճշտության կարգը որոշվում է մոտարկման կարգով:

Ապացույց: Քանի որ  $L_{\hbar}$  և  $l_{\hbar}$  տարբերական օպերատորները գծային են, ապա

$$\begin{aligned} L_{\hbar}(u^{\hbar} - v^{\hbar}) &= L_{\hbar}u^{\hbar} - L_{\hbar}v^{\hbar} = L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}, \\ l_{\hbar}(u^{\hbar} - v^{\hbar}) &= l_{\hbar}u^{\hbar} - l_{\hbar}v^{\hbar} = l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar} : \end{aligned}$$

Այսպիսով,  $u^{\hbar} - v^{\hbar}$  տարբերությունը բավարարում է

$$\begin{cases} L_{\hbar}(u^{\hbar} - v^{\hbar}) = L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}, & x \in \omega_{\hbar}^{\circ} \\ l_{\hbar}(u^{\hbar} - v^{\hbar}) = l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar}, & x \in \omega'_{\hbar} \end{cases}$$

տարբերական հավասարումների համակարգին: Համաձայն (10.2.25) գնահատականի՝ ունենք

$$\|u^{\hbar} - v^{\hbar}\|_{\hbar} \leq C_3 \|L_{\hbar}u^{\hbar} - f^{\hbar}\|_{\hbar}^{\circ} + C_4 \|l_{\hbar}u^{\hbar} - \varphi^{\hbar}\|'_{\hbar} :$$

Վերջինը և (10.2.22), (10.2.23)-ը (կամ (10.2.24)-ը) միասին հաստատում են թեորեմի պնդումը:  $\square$

Այսպիսով, ապացուցված պնդումը համառոտակի կարելի է ձևակերպել այսպես. *մոտարկումից և կայունությունից հետևում է զուգամիտությունը*: Այսինքն՝ կառուցելով մոտարկող տարբերական սխեմա և ապացուցելով նրա կայունությունը, մենք կարող ենք վստահ լինել, որ այն զուգամետ է:

### 10.3 Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f \tag{10.3.1}$$

տեղափոխման հավասարումը, որն արդեն հիշատակվել է 10.1 պարագրաֆում: Նախ մի քանի խոսք այդ հավասարման բնութագրիչների մասին (տե՛ս, օրինակ, [44]): Կարելի է ցույց տալ, որ հավասարման ձախ մասը իրենից ներկայացնում է  $u(x, t)$  ֆունկցիայի լրիվ ածանցյալ ըստ  $t$ -ի՝  $dx/dt = -a(x, t)$  անկյունային գործակցով ուղղությամբ: Իրոք, ունենք

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} :$$

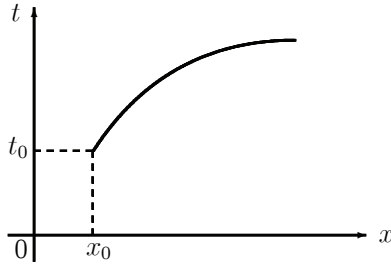
Ուստի (10.3.1) հավասարումը կարելի է գրել

$$\frac{du}{dt} = f(x, t), \tag{10.3.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a(x, t) \tag{10.3.3}$$



*բնութագրիչ* տեսքով: (10.3.3) սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալ կորերը կոչվում են *բնութագրիչներ*: Այդ կորերը հոսքի գծեր են՝  $x = x(t; x_0, t_0)$  բնութագրիչը  $(x, t)$  հարթության մեջ պատկերում է կրող միջավայրի այն մասնիկի շարժումը, որը ժամանակի  $t = t_0$  պահին ունի  $x = x_0$  կոորդինատը (նկ. 10.3.1):



**Նկ. 10.3.1**  $x = x(t; x_0, t_0)$  բնութագրիչը

Հեշտ է տեսնել, որ  $x = x(t; x_0, t_0)$  բնութագրիչի վրա դիտարկված (10.3.2) սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կլինի  $u(t) \equiv u(x(t; x_0, t_0), t)$  ֆունկցիան: Հավասարման լուծումը միարժեքորեն որոշվում է  $u(t_0) = u(x_0, t_0)$  սկզբնական պայմանով: «Մաքուր տեղափոխման» դեպքում՝ երբ  $f(x, t) \equiv 0$ , բնութագրիչի վրա  $u(t) \equiv u(t_0)$ : Եթե  $a = const$ , ապա բնութագրիչները  $x + at = const$  զուգահեռ ուղիղների ընտանիք է:

Սույն պարագրաֆում մենք կուսումնասիրենք տարբերական սխեմա

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T \tag{10.3.4}$$

հավասարման համար, որտեղ  $a = const > 0$ : Սկզբնական պայմանը՝

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty : \tag{10.3.5}$$

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում  $\omega_h$  ցանց, ինչպես նկարագրված է 10.2.4 օրինակում (նկ. 10.2.7): Այդ ցանցի վրա որոշված  $G'_h$  ֆունկցիաների տարածությունում ներմուծենք

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} \sup_m |w_m^n| \tag{10.3.6}$$

նորմը: Այնուհետև,  $\omega'_h = \{x_m : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  միաչափ ցանցի վրա որոշված  $\psi = \{\psi_m : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \in G'_h$  ֆունկցիաների համար նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\|\psi\|' \equiv \sup_m |\psi_m| : \tag{10.3.7}$$

Հետագայում կօգտագործենք նաև

$$w^n \equiv \{w_m^n : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

նշանակումը ցանցի  $n$ -րդ շերտի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների համար:

Դիտարկենք աջակողմյան շաբլոնով կառուցված

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (10.3.8)$$

տարբերական սխեման (նկ. 10.2.4ա): Համաձայն այդ սխեմայի՝ շերտից շերտ անցումը կատարվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1 - r)v_m^n + rv_{m+1}^n + \tau f_m^n, \quad r \equiv a \frac{\tau}{h} \quad (10.3.9)$$

բանաձևի:

**Դիտողություն 10.3.1 :** *Մխեմայի զուգամիտության հետազոտման ժամանակ մենք կենթադրենք, որ  $\tau$  և  $h$  քայլերը ձգտում են 0-ի ոչ թե իրարից անկախ, այլ մնալով*

$$r \equiv a \frac{\tau}{h} = const \quad (10.3.10)$$

*հարաբերության մեջ:*

Նախ պարզենք (10.3.8) տարբերական սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տես լեմմա 9.3.1) և հաշվի առնելով (10.3.5) սկզբնական պայմանը՝ կարող ենք ստանալ

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} &= f_m^n + \varepsilon_m^{n+1}, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ u_m^0 &= \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

հավասարությունները, որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} \equiv \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n + \theta_1 \tau)} - a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 :$$

Այստեղից, ենթադրելով (10.3.4), (10.3.5) խնդրի ճշգրիտ լուծման երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \leq C(\tau + h), \quad C = const > 0$$

գնահատականը բոլոր  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  և  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար: Այսպիսով, (10.3.8) տարբերական սխեման մոտարկում է (10.3.4), (10.3.5) խնդիրը:

Այժմ հետազոտենք սխեմայի կայունությունը:

**Թեորեմ 10.3.1 :** Եթե  $r \leq 1$ , ապա (10.3.8) տարբերական խնդրի  $v \in G_h$  լուծման համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.

$$\|v\| \leq T\|f\| + \|\varphi\|' : \tag{10.3.11}$$

Ապացույց: Քանի որ  $r \leq 1$ , ապա (10.3.9)-ից հետևում է

$$|v_m^{n+1}| \leq (1-r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n|$$

անհավասարությունը: Վերջինից բխում է

$$\sup_m |v_m^{n+1}| \leq (1-r)\sup_m |v_m^n| + r\sup_m |v_{m+1}^n| + \tau\|f\|,$$

ուստի կարող ենք գրել

$$\|v^{n+1}\|' \leq \|v^n\|' + \tau\|f\|, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

անհավասարությունները, որոնց կիրառմամբ բոլոր  $n = 1, 2, \dots, N$  արժեքների համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} \|v^n\|' &\leq \|v^{n-1}\|' + \tau\|f\| \leq \|v^{n-2}\|' + 2\tau\|f\| \leq \dots \\ &\leq \|v^0\|' + n\tau\|f\| \leq \|v^0\|' + N\tau\|f\| = \|\varphi\|' + T\|f\| : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

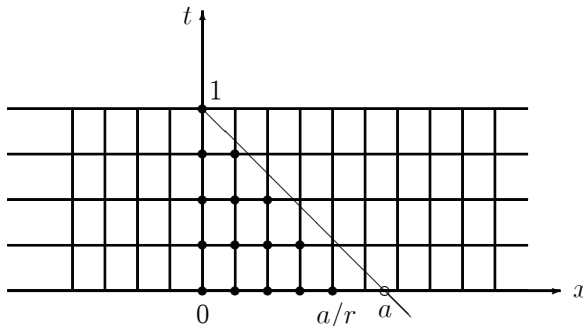
$$\|v^n\|' \leq T\|f\| + \|\varphi\|', \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

որտեղից էլ ակնհայտորեն հետևում է (10.3.11) գնահատականը:  $\square$

Ստացված գնահատականը նշանակում է (10.3.8) սխեմայի կայունությունը (10.3.6) նորմում:

Ցույց տանք, որ  $r \leq 1$  պայմանը էական է, այսինքն՝  $r > 1$  դեպքում սխեման անկայուն է: Գրա համար բավարար է ցույց տալ, որ այն զուգամետ չէ (տե՛ս 10.2.1 թեորեմը):

Ենթադրենք  $f(x, t) \equiv 0$  և  $T = 1$ : Անմիջական ստուգմամբ հեշտ է համոզվել, որ (10.3.4), (10.3.5) խնդրի լուծումը  $u(x, t) = \varphi(x + at)$  ֆունկցիան է: Ուստի լուծումը հաստատուն է յուրաքանչյուր  $x + at = const$  բնութագրիչի վրա:



**Նկ. 10.3.2** Սխեմայի տարամիտության ապացույցի վերաբերյալ (երբ  $r > 1$ )

Մասնավորապես, լուծումը հաստատուն է  $x+at = a$  բնութագրիչի վրա, որն անցնում է հարթության  $(0, 1)$  և  $(a, 0)$  կետերով (նկ. 10.3.2): Ակնհայտ է, որ  $u(0, 1) = \varphi(a)$  :

Հեշտ է տեսնել, որ (10.3.8) տարբերական խնդրի  $v_0^N$  լուծումը  $(0, 1)$  կետում միարժեքորեն որոշվում է  $\varphi(x)$  ֆունկցիայի արժեքներով  $0 \leq x \leq a/r$  հատվածին պատկանող հանգույցներում, և կախված չէ ֆունկցիայի արժեքներից այդ հատվածից դուրս: Եթե  $r > 1$ , ապա  $a/r < a$ : Ուստի զուգամիտություն  $(0, 1)$  հանգույցում, ընդհանրապես ասած, տեղի չունի: Իրոք, դիցուք որոշակի  $\varphi(x)$  ֆունկցիայի համար

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} v_0^N = u(0, 1) = \varphi(a) :$$

Ընտրենք մի այլ ֆունկցիա  $\tilde{\varphi}(x)$  այնպես, որ  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ , երբ  $0 \leq x \leq a/r$ , սակայն  $\tilde{\varphi}(a) \neq \varphi(a)$ : Այդ դեպքում ճշգրիտ լուծման արժեքը  $(0, 1)$  կետում կփոխվի (այժմ այն հավասար է  $\tilde{\varphi}(a)$ -ի), մինչդեռ մոտավոր լուծումը կմնա նույնը: Իսկ քանի որ (10.3.8) սխեման մոտարկող է, ապա այն չի կարող լինել կայուն (հակառակ դեպքում դա կհակասի 10.2.1 թեորեմի պնդմանը):

Բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս թե ինչպես  $r > 1$  դեպքում սկզբնական արժեքների փոքր խոտորումները կարող են էապես փոխել (10.3.8) տարբերական խնդրի լուծումը: Դիտարկենք (10.3.4), (10.3.5) խնդիրը, երբ  $f(x, t) \equiv 0$  և  $\varphi(x) \equiv 0$ : Այդ խնդրի լուծումն ակնհայտ է՝  $u(x, t) \equiv 0$ : Ունենալով

$$v_m^0 = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{10.3.12}$$

սկզբնական արժեքները, (10.3.8) տարբերական սխեմայի լուծումը հաջորդ շերտերում որոշվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1 - r)v_m^n + rv_{m+1}^n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

բանաձևի: Ակնհայտ է, որ  $v_m^n \equiv 0$ : Այժմ ենթադրենք, որ ինչ-որ պատճառով (10.3.12)-ի փոխարեն վերցված են հետևյալ սկզբնական արժեքները.

$$\tilde{v}_m^0 = (-1)^m \varepsilon, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \varepsilon = const : \tag{10.3.13}$$

Նոր սկզբնական արժեքների համար (10.3.8) սխեմայի լուծումը որոշվում է

$$\tilde{v}_m^n = (1 - 2r)^n (-1)^m \varepsilon$$

բանաձևով: Մասնավորապես, վերջին շերտում

$$|\tilde{v}_m^N| = |1 - 2r|^N |\varepsilon| = |1 - 2r|^{T/\tau} |\varepsilon| :$$

Քանի որ  $|1 - 2r| > 1$ , ապա (10.3.8) տարբերական խնդրի լուծումը աղետալիորեն աղավաղվում է, երբ  $\tau \rightarrow 0$ :

Համանման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ կամայական  $r$ -ի համար անկայուն է ձախակողմյան շարքնով կառուցված (տես նկ. 10.2.4բ) տարբերական սխեման:

### 10.4 Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը

Շարադրենք տարբերական սխեմաների կայունության վերլուծության բավականին պարզ եղանակ, որն առաջարկել է ամերիկացի մաթեմատիկոս Ջ.Նեյմանը: Բացահայտենք այդ եղանակի էությունը տեղափոխման հավասարման օրինակի վրա:

Նախ դիտարկենք նախորդ պարագրաֆում մանրամասն ուսումնասիրված

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (10.4.1)$$

տարբերական սխեման: Ըստ 10.2.3 սահմանումի այս սխեման կոչվում է կայուն, եթե տեղի ունի

$$\|v\| \leq C_1 \|f\| + C_2 \|\varphi\|' \quad (10.4.2)$$

գնահատականը, որտեղ  $C_1$  և  $C_2$  դրական հաստատունները կախված չեն ո՛չ ցանցի քայլերից, ո՛չ էլ  $f = \{f_m^n\} \in G_h$  և  $\varphi = \{\varphi_m\} \in G'_h$  ցանցային ֆունկցիաներից (տե՛ս ցանցային նորմերի (10.3.6) և (10.3.7) սահմանումները): Այսպիսով, (10.4.2) անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա կամայական  $f$  և  $\varphi$  ֆունկցիաների համար, մասնավորապես, երբ  $f \equiv 0$ : Հետևաբար, եթե (10.4.1) սխեման կայուն է, ապա

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (10.4.3)$$

տարբերական խնդրի լուծման համար պետք է տեղի ունենա

$$\|v\| \leq C \|\varphi\|' \quad (10.4.4)$$

գնահատականը, որտեղ  $C$ -ն ցանցի քայլերից և  $\varphi$  ցանցային ֆունկցիայից անկախ դրական հաստատուն է: Այս դեպքում ասում են, որ (10.4.1) տարբերական սխեման *կայուն է ըստ սկզբնական տվյալների*:

Մասնավորապես, ըստ սկզբնական տվյալների սխեմայի կայունության համար անհրաժեշտ է, որ (10.4.4) գնահատականը տեղի ունենա

$$\varphi_m(\alpha) = e^{i\alpha m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.4.5)$$

կոմպլեքս ցանցային ֆունկցիայի համար, որտեղ  $\alpha$ -ն կամայական իրական թիվ է: Քանի որ  $|\varphi_m(\alpha)| = |e^{i\alpha m}| = 1$ , ապա (10.4.4) գնահատականը այս դեպքում կընդունի

$$\|v(\alpha)\| \leq C \quad (10.4.6)$$

տեսքը, որտեղ  $v(\alpha)$ -ն (10.4.5) սկզբնական ֆունկցիային համապատասխանող (10.4.3) տարբերական խնդրի լուծումն է: Դժվար չէ համոզվել, որ

$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha)e^{i\alpha m},$$

որտեղ

$$\lambda(\alpha) \equiv 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r \equiv a \frac{\tau}{h} : \quad (10.4.7)$$

Քանի որ

$$\sup_m |v_m^n(\alpha)| = |\lambda(\alpha)|^n,$$

ապա (10.4.6) գնահատականի առկայության համար անհրաժեշտ է, որ բոլոր իրական  $\alpha$  թվերի համար

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\lambda(\alpha)|^n \leq C :$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1 + K\tau \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad (10.4.8)$$

որտեղ  $K$ -ն  $\tau$ -ից և  $\alpha$ -ից անկախ դրական հաստատուն է: Իրոք, այդ դեպքում

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\lambda(\alpha)|^n \leq \max_{0 \leq n \leq N} (1 + K\tau)^n \leq (1 + K\tau)^N = \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N \leq e^{KT} :$$

Ստացված (10.4.8) պայմանը կոչվում է *Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայման*: Այն կոչվում է *սպեկտրալ* հետևյալ պատճառով: Բանն այն է, որ (10.4.3) տարբերական խնդրում շերտից շերտ անցումը կարելի է գրել

$$v^{n+1} = Pv^n$$

օպերատորային տեսքով, որտեղ  $P$  *անցման օպերատորը* գործում է ըստ

$$(Pw)_m = (1 - r)w_m + rw_{m+1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

օրենքի: Հեշտ է ցույց տալ, որ (10.4.7)-ում սահմանված  $\lambda(\alpha)$  թվերը  $P$  օպերատորի սեփական արժեքներն են, իսկ  $\varphi(\alpha)$  ցանցային ֆունկցիաները՝ համապատասխան սեփական ֆունկցիաները.

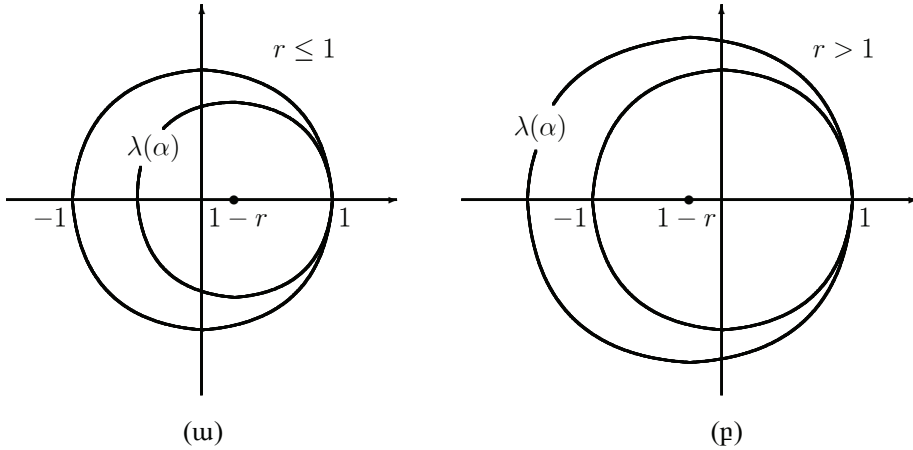
$$P\varphi(\alpha) = \lambda(\alpha)\varphi(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} :$$

Երբ  $\alpha$ -ն վազում է ամբողջ իրական առանցքով,  $\lambda(\alpha)$  կետը կոմպլեքս հարթության վրա գծում է  $P$  անցման օպերատորի սեփական արժեքներից բաղկացած կոր:

Պարզենք (10.4.8) պայմանի առկայությունը մեր սխեմայի դեպքում: Դժվար չէ տեսնել, որ (10.4.7) կետերի համախմբությունը կազմում է կոմպլեքս հարթության վրա  $r$  շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի  $1 - r$  կետում: Իրոք,

$$|\lambda(\alpha) - (1 - r)| = r |e^{i\alpha}| = r :$$

Երբ  $r \leq 1$ , այդ շրջանագիծը ամբողջովին գտնվում է միավոր շրջանի ներսում (նկ. 10.4.1ա), ուստի  $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ : Երբ  $r > 1$ , շրջանագիծը գտնվում է միավոր շրջանից դուրս, շոշափելով վերջինը միայն իրական առանցքի  $\lambda = 1$  կետում (նկ. 10.4.1բ): Այդ դեպքում (10.4.8) պայմանը այստեղ տեղի չունի:



**Նկ. 10.4.1** Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը (10.4.1) սխեմայի համար

Նախորդ պարագրաֆում մենք մանրամասն հետազոտել ենք (10.4.1) տարբերական սխեման և ցույց ենք տվել, որ  $r \leq 1$  դեպքում այն կայուն է, իսկ  $r > 1$  դեպքում՝ անկայուն: Այսպիսով, Նեյմանի պայմանը բավականին զգայուն գտնվեց, որ տարբերի կայունության և անկայունության դեպքերը:

Այժմ (10.3.4) տեղափոխման հավասարման համար կատարենք այլ տարբերական սխեմաների վերլուծությունը: Դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (10.4.9)$$

սխեման: Ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆում, այդ սխեման անկայուն է կամայական  $r$ -ի դեպքում: Հեշտ է ստանալ, որ (10.4.5) տեսքի սկզբնական ցանցային ֆունկցիայի համար համապատասխան համասեռ խնդրի ( $f \equiv 0$ ) լուծումը կլինի

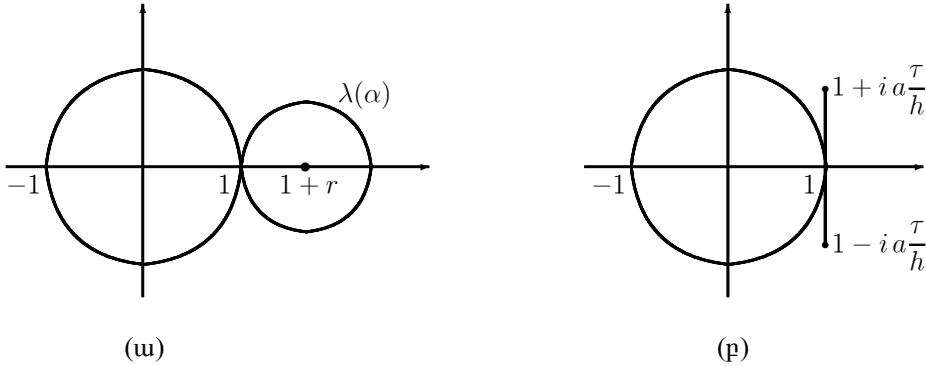
$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha) e^{i\alpha m},$$

որտեղ

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - r e^{-i\alpha} : \quad (10.4.10)$$

Երբ  $\alpha \in \mathbf{R}$ , (10.4.10) կետերի համախմբությունը կոմպլեքս հարթության վրա  $r$  շառավիղով շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի  $1 + r$  կետում

(նկ. 10.4.2ա): Ուստի (10.4.8) պայմանը տեղի չունի  $r$ -ի ոչ մի արժեքի դեպքում: Այսպիսով, կայունության սպեկտրալ հայտանիշը (10.4.9) սխեմայի համար նույնպես զգայուն է:



**Նկ. 10.4.2** Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը. (ա) (10.4.9) սխեմայի համար, (բ) (10.4.11) սխեմայի համար

Վերջում դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (10.4.11)$$

տարբերական սխեման: Կատարելով համանման դատողություններ՝ գտնում ենք, որ

$$\lambda(\alpha) = 1 + i a \frac{\tau}{h} \sin \alpha : \quad (10.4.12)$$

Այստեղ (10.4.12) կետերի համախմբությունը կազմում է  $2a\tau/h$  երկարությամբ ուղղաձիգ հատված, որն անցնում է իրական առանցքի  $\lambda = 1$  կետով (նկ. 10.4.2բ): Եթե, ինչպես վերը, ենթադրենք, որ  $a\tau/h = r = const$ , ապա (10.4.8) պայմանը տեղի չունի: Իսկ եթե ըստ ժամանակի  $\tau$  քայլը փոփոխվում է  $h^2$ -ին համեմատականորեն այնպես, որ  $\tau = rh^2$ , որտեղ  $r = const$ , ապա այդ դեպքում (10.4.8) կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը արդեն տեղի ունի: Իրոք, կամայական  $\alpha \in \mathbf{R}$  թվի համար

$$|\lambda(\alpha)| \leq \left| \lambda \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| = \sqrt{1 + a^2 \frac{\tau^2}{h^2}} = \sqrt{1 + a^2 r \tau} \leq 1 + \frac{a^2 r}{2} \tau :$$

Նշենք, որ  $\tau = rh^2$  պահանջը ավելի խիստ պայման է քայլերի հարաբերակցության նկատմամբ: Փոքր  $h$ -երի դեպքում մենք ստիպված կլինենք ընտրել չափազանց փոքր քայլ ըստ ժամանակի: Իսկ դա, իր հերթին, կրերի մեքենայական ժամանակի զգալի աճի:



Ելնելով վերը շարադրածից՝ մենք գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը: Եթե կայունության (10.4.8) անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը տեղի չունի, ապա սխեման անկայուն է: Իսկ եթե այն տեղի ունի, ապա կան մեծ հիմքեր համարելու, որ սխեման կայուն է: Ըստ այդմ, Նեյմանի պայմանը կարելի է դիտարկել որպես յուրատեսակ ֆիլտր, որը մաղում է սխեմաները ըստ կայունության:

### 10.5 Ջերմահաղորդականության հավասարումը

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \tag{10.5.1}$$

ջերմահաղորդականության հավասարումը, որտեղ  $a = const > 0$ ,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{10.5.2}$$

սկզբնական պայմանով և

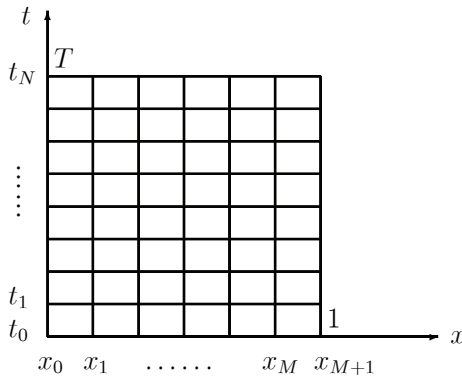
$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 < t \leq T \tag{10.5.3}$$

եզրային պայմաններով:

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում  $(x_m, t_n)$  հանգույցներով  $\omega_h$  ցանցը, որտեղ

$$\begin{aligned} x_m &= mh, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \quad h = 1/(M+1), \\ t_n &= n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau = T/N \end{aligned}$$

(նկ. 10.5.1):



**Նկ. 10.5.1** Ֆանց ջերմահաղորդականության հավասարման համար

Ըստ վերը ընդունված նշանակումների  $G_h$ -ը  $\omega_h$  ցանցի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունն է: Նշանակենք  $w_m^n$ -ով  $w \in G_h$  ցանցային ֆունկցիայի արժեքը  $(x_m, t_n)$  հանգույցում: Ֆիքսված  $n$ -ի համար  $(x_m, t_n)$  հանգույցները կազմում են ցանցի  $n$ -րդ շերտը: Օգտագործենք  $w^n \equiv \{w_m^n : m = 0, 1, \dots, M+1\}$  նշանակումը  $n$ -րդ շերտի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների համար:

$G_h$  ցանցային ֆունկցիաների տարածության մեջ սահմաններ

$$\|w\| \equiv \max_{0 \leq n \leq N} \max_{0 \leq m \leq M+1} |w_m^n| \quad (10.5.4)$$

նորմը: Այնուհետև,  $\omega'_h = \{x_m : m = 0, 1, \dots, M + 1\}$  միաչափ ցանցի վրա տրված  $\psi = \{\psi_m\}_{m=0}^{M+1} \in G'_h$  ֆունկցիայի համար նորմը սահմաններ հետևյալ կերպ.

$$\|\psi\|' \equiv \max_{0 \leq m \leq M+1} |\psi_m| : \quad (10.5.5)$$

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք երեք առավել գործածելի սխեմաներ:

### 10.5.1 Բացահայտ սխեմա

Ըստ նկ. 10.2.5ա -ում պատկերված շաբլոնի գրենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10.5.6)$$

տարբերական սխեման, որտեղ  $\alpha^n \equiv \alpha(t_n)$ ,  $\beta^n \equiv \beta(t_n)$ : Համաձայն այս սխեմայի, ունենալով մոտավոր լուծումը  $n$ -րդ շերտում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , լուծման արժեքները հաջորդ  $(n + 1)$ -րդ շերտում հաշվվում են ըստ

$$v_m^{n+1} = r v_{m-1}^n + (1 - 2r) v_m^n + r v_{m+1}^n + \tau f_m^n, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (10.5.7)$$

բացահայտ բանաձևի, որտեղ  $r \equiv a\tau/h^2$ : Այդ պատճառով (10.5.6) տարբերական սխեման կոչվում է *բացահայտ*:

#### Pseudocode EXPLICIT

```

input a, T, M, N
h = 1/(M + 1)
τ = T/N
r = aτ/h2
for m = 0, 1, ..., M + 1 do
    vm0 = φm
end
for n = 0, 1, ..., N - 1 do
    v0n+1 = αn+1
    vM+1n+1 = βn+1
    for m = 1, 2, ..., M do
        vmn+1 = (1 - 2r)vmn + r(vm-1n + vm+1n) + τ fmn
    end
end
output v
    
```

Պարզենք սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տե՛ս 9.3.1 և 9.3.4 լեմմաները), դժվար չէ ստանալ, որ

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} &= f_m^n + \varepsilon_m^{n+1}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ u_m^0 &= \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ u_0^n &= \alpha^n, \quad u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} \equiv \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n + \theta_1 \tau)} - a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad -1 < \theta_2 < 1 :$$

Ենթադրելով վերջին արտահայտության մեջ մտնող մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը՝ բոլոր  $m = 1, 2, \dots, M$  և  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար կունենանք

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \leq C(\tau + h^2), \quad C = \text{const} > 0 \tag{10.5.8}$$

գնահատականները : Դրանով (10.5.6) սխեման մոտարկում է (10.5.1) – (10.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ  $\tau$ -ի և երկրորդ կարգով ըստ  $h$ -ի:

Այժմ անդրադառնանք (10.5.6) տարբերական սխեմայի կայունության հարցին:

**Թեորեմ 10.5.1 :** Եթե  $r \leq 1/2$ , ապա (10.5.6) տարբերական սխեմայի  $v \in G_h$  լուծման համար ճիշտ է

$$\|v\| \leq T\|f\| + \max(\|\varphi\|', \Phi) \tag{10.5.9}$$

գնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max \left( \max_{1 \leq n \leq N} |\alpha^n|, \max_{1 \leq n \leq N} |\beta^n| \right) :$$

Ապացույց: Քանի որ  $r \leq 1/2$ , ապա (10.5.7)-ից՝

$$|v_m^{n+1}| \leq r|v_{m-1}^n| + (1 - 2r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n| \leq \|v^n\|' + \tau\|f\| : \tag{10.5.10}$$

Ակնհայտ են

$$|v_0^{n+1}| = |\alpha^{n+1}| \leq \Phi, \quad |v_{M+1}^{n+1}| = |\beta^{n+1}| \leq \Phi \tag{10.5.11}$$

անհավասարությունները: Այնուհետև, (10.5.10)-ից և (10.5.11)-ից հետևում է, որ

$$\|v^{n+1}\|' \leq \max(\|v^n\|', \Phi) + \tau\|f\|, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 : \tag{10.5.12}$$

Հաշվի առնելով (10.5.12) անհավասարությունները, ցանկացած  $n$ -ի համար, որտեղ  $1 \leq n \leq N$ , կստանանք՝

$$\begin{aligned} \|v^n\|' &\leq \max(\|v^{n-1}\|', \Phi) + \tau\|f\| \leq \max(\max(\|v^{n-2}\|', \Phi) + \tau\|f\|, \Phi) + \tau\|f\| \leq \\ &\max(\|v^{n-2}\|', \Phi) + 2\tau\|f\| \leq \dots \leq \max(\|v^0\|', \Phi) + n\tau\|f\| \leq \max(\|v^0\|', \Phi) + \\ &N\tau\|f\| = \max(\|\varphi\|', \Phi) + T\|f\| : \end{aligned}$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (10.5.9) գնահատականը:  $\square$

Այսպիսով, (10.5.9) գնահատականը հաստատում է (10.5.6) տարբերական սխեմայի կայունությունը (10.5.4) նորմում: Քանի որ  $\tau$  և  $h$  քայլերի հարաբերակցության վրա դրվում է  $r \leq 1/2$  սահմանափակումը, ապա ասում են, որ բացահայտ սխեման *պայմանականորեն կայուն է*:

Նշենք, որ քայլերի հարաբերակցության վրա նույն պահանջը դնում է նաև Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը: Իրոք, մոտարկելով

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (10.5.13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (10.5.14)$$

ջերմահաղորդականության խնդիրը 10.2.4 օրինակում նկարագրված ցանցի վրա (նկ. 10.2.7), կգտնենք համապատասխան անցման օպերատորի սեփական արժեքները՝

$$\lambda(\alpha) = 1 - 2r + 2r \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} :$$

Ակնհայտ է, որ  $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ , երբ  $r \leq 1/2$ :

### 10.5.2 Անբացահայտ սխեմա

Գրենք ըստ նկ. 10.2.5բ-ում տրված շաբլոնի

$$\begin{cases} L_h v_m^n \equiv \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} - a \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10.5.15)$$

տարբերական սխեման: Ի տարբերություն բացահայտ սխեմայի, տվյալ դեպքում յուրաքանչյուր  $n$ -րդ շերտում, որտեղ  $1 \leq n \leq N$ , մոտավոր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել

$$\begin{cases} -rv_{m-1}^n + (1 + 2r)v_m^n - rv_{m+1}^n = \tau f_m^n + v_m^{n-1}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ  $r \equiv a\tau/h^2$ : Ստացված համակարգի մատրիցը երեքանկյունագծային է: Ուստի այդ համակարգը կարելի է արդյունավետորեն լուծել 4.6 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Նկատենք, որ այստեղ առկա է մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխումը՝  $1 + 2r > 2r$ :

Կառուցված տարբերական սխեման կոչվում է *անբացահայտ*: Ստորև տրված է այդ սխեմայի իրականացման ալգորիթմը:

**Pseudocode IMPLICIT**

```

input  $a, T, M, N$ 
 $h = 1/(M + 1)$ 
 $\tau = T/N$ 
 $r = a\tau/h^2$ 
for  $m = 0, 1, \dots, M + 1$  do
     $v_m^0 = \varphi_m$ 
end
for  $n = 1, 2, \dots, N$  do
     $v_0^n = \alpha^n$ 
     $v_{M+1}^n = \beta^n$ 
    solve system
         $-rv_{m-1}^n + (1 + 2r)v_m^n - rv_{m+1}^n = \tau f_m^n + v_m^{n-1},$ 
         $m = 1, 2, \dots, M$ 
    end solve
end
output  $v$ 

```

Սխեմայի մոտարկման կարգը նույնն է, ինչպես բացահայտ սխեմայի դեպքում: Իրոք, օգտվելով 9.3.2 և 9.3.4 լեմմաներից, կստանանք

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n + \varepsilon_m^n,$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1,$$

$$u_0^n = \alpha^n, \quad u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^n \equiv -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x_m, t_n - \theta_1 \tau)} - a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad -1 < \theta_2 < 1 :$$

Ենթադրելով արտահայտության մեջ մտնող ածանցյալների սահմանափակությունը՝ բոլոր  $m = 1, 2, \dots, M$  և  $n = 1, 2, \dots, N$  արժեքների համար կունենանք

$$|\varepsilon_m^n| \leq C(\tau + h^2), \quad C = \text{const} > 0 : \quad (10.5.16)$$

Այսպիսով, անբացահայտ տարբերական սխեման մոտարկում է (10.5.1)–(10.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ  $\tau$ -ի և երկրորդ կարգով ըստ  $h$ -ի:

Ապացուցենք (10.5.15) տարբերական սխեմայի կայունությունը (10.5.4) նորմում: Դրա համար մեզ պետք կգա հետևյալ օժանդակ պնդումը:

**Լեմմա 10.5.1** (մաքսիմումի սկզբունք) : Դիցուք  $\theta \in G_h$  ֆունկցիայի համար

$$L_h \theta_m^n \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (10.5.17)$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը կամ սկզբնական շերտում ( $n = 0$ ), կամ էլ եզրային հանգույցներում ( $m = 0$  կամ  $m = M + 1$ ):

Ապացույց: Նշանակենք  $\mu \equiv \max_{\omega_h} \theta_m^n$ : Պարզ է, որ այդ մաքսիմումը հասանելի է  $\omega_h$  ցանցի որոշ հանգույցներում: Դիցուք  $k$ -ն ցանցի այն ամենաստորին շերտի համարն է, որտեղ  $\theta$  ցանցային ֆունկցիան ընդունում է  $\mu$  արժեքը: Եթե  $k = 0$ , ապա պնդումն ապացուցված է:

Դիցուք  $k \geq 1$ : Յույց տանք, որ շերտի ներքին հանգույցներում  $\theta$  ֆունկցիան չի կարող ընդունել  $\mu$  արժեքը: Ենթադրենք հակառակը՝  $\theta_i^k = \mu$  ինչ-որ  $i$ -ի համար, որտեղ  $1 \leq i \leq M$ : Այդ դեպքում  $(x_i, t_k)$  հանգույցում կունենանք

$$L_h \theta_i^k = \frac{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}}{\tau} - a \frac{\theta_{i-1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i+1}^k}{h^2} = \frac{\mu - \theta_i^{k-1}}{\tau} + a \frac{2\mu - \theta_{i-1}^k - \theta_{i+1}^k}{h^2} \geq \frac{\mu - \theta_i^{k-1}}{\tau} > 0,$$

ինչը հակասում է (10.5.17) պայմանին: Ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ և  $\theta$  ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն արժեքը  $(x_0, t_k)$  կամ  $(x_{M+1}, t_k)$  հանգույցներից գոնե մեկում:  $\square$

**Թեորեմ 10.5.2** : (10.5.15) տարբերական խնդրի  $v \in G_h$  լուծման համար ճիշտ է

$$\|v\| \leq \frac{1}{8a} \|f\| + \max(\|\varphi\|', \Phi) \quad (10.5.18)$$

զնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max \left( \max_{1 \leq n \leq N} |\alpha^n|, \max_{1 \leq n \leq N} |\beta^n| \right) :$$

Ապացույց: Դիտարկենք  $w \in G_h$  օժանդակ ֆունկցիա, որի արժեքները ցանցի հանգույցներում որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$w_m^n = \frac{x_m(1-x_m)}{2a}, \quad m = 0, 1, \dots, M+1, \quad n = 0, 1, \dots, N :$$

Պարզ է, որ  $w_m^n \geq 0$ , ընդ որում  $w_0^n = w_{M+1}^n = 0$ : Գնահատենք այդ ֆունկցիայի նորմը.

$$\|w\| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x(1-x)}{2a} = \frac{1}{8a} : \quad (10.5.19)$$

Այնուհետև, ֆունկցիան ունի հետևյալ հեշտ ստուգվող հատկությունը.

$$L_h w_m^n = 1, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N : \quad (10.5.20)$$

Այժմ սահմանենք  $\theta \equiv v - \|f\|w$  ֆունկցիան: Հաշվի առնելով  $L_{\hbar}$  տարրերական օպերատորի գծայնությունը և  $w$  ֆունկցիայի (10.5.20) հատկությունը՝ բոլոր  $m = 1, 2, \dots, M$  և  $n = 1, 2, \dots, N$  արժեքների համար կստանանք՝

$$L_{\hbar}\theta_m^n = L_{\hbar}v_m^n - \|f\|L_{\hbar}w_m^n = f_m^n - \|f\| \leq 0 :$$

Գրանով  $\theta$  ֆունկցիան բավարարում է 10.5.1 լեմմայի պայմանին: Ուստի

$$\theta_m^n \leq \max \left( \max_{0 \leq m \leq M+1} \theta_m^0, \max_{1 \leq n \leq N} \theta_0^n, \max_{1 \leq n \leq N} \theta_{M+1}^n \right), \\ m = 0, 1, \dots, M + 1, n = 0, 1, \dots, N :$$

Ակնհայտ են հետևյալ գնահատականները.

$$\theta_m^0 = v_m^0 - \|f\|w_m^0 \leq v_m^0 = \varphi_m \leq \|\varphi\|', \\ \theta_0^n = v_0^n - \|f\|w_0^n = v_0^n = \alpha^n \leq \Phi, \\ \theta_{M+1}^n = v_{M+1}^n - \|f\|w_{M+1}^n = v_{M+1}^n = \beta^n \leq \Phi :$$

Հետևաբար

$$\theta_m^n \leq \max (\|\varphi\|', \Phi), \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, n = 0, 1, \dots, N :$$

Վերջապես, օգտվելով (10.5.19) գնահատականից, կստանանք՝

$$v_m^n = \theta_m^n + \|f\|w_m^n \leq \max (\|\varphi\|', \Phi) + \frac{1}{8a} \|f\|, \\ m = 0, 1, \dots, M + 1, n = 0, 1, \dots, N :$$
(10.5.21)

Նշենք, որ ճիշտ են նաև

$$-v_m^n \leq \max (\|\varphi\|', \Phi) + \frac{1}{8a} \|f\|, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, n = 0, 1, \dots, N \quad (10.5.22)$$

անհավասարությունները: Գրանք հետևում են այն ակնհայտ փաստից, որ եթե  $v$  ցանցային ֆունկցիան (10.5.15) տարրերական խնդրի լուծումն է, ապա  $-v$  ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} L_{\hbar}(-v_m^n) = -f_m^n, & m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, \\ -v_m^0 = -\varphi_m, & m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ -v_0^n = -\alpha^n, \quad -v_{M+1}^n = -\beta^n, & n = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

տարրերական խնդրի լուծում: Այսպիսով, (10.5.21) և (10.5.22)-ից ստանում ենք

$$|v_m^n| \leq \frac{1}{8a} \|f\| + \max (\|\varphi\|', \Phi), \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, n = 0, 1, \dots, N$$

անհավասարությունները, որոնցից բխում է (10.5.18) գնահատականը:  $\square$

Մենք ապացուցել ենք (10.5.16) տարբերական սխեմայի կայունությունը առանց որևէ սահմանափակման ցանցի քայլերի հարաբերակցության վրա: Այդ պատճառով անբացահայտ տարբերական սխեման անվանում են *անպայմանորեն կամ բացարձակ կայուն*:

Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանի կիրառումը (10.5.13), (10.5.14) խնդրի նկատմամբ նույնպես հաստատում է անբացահայտ սխեմայի բացարձակ կայունությունը: Իրոք, (10.5.15) տարբերական խնդրի անցման օպերատորի սեփական արժեքները հետևյալն են.

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 2r(1 - \cos \alpha)}, \quad \alpha \in \mathbf{R} :$$

Ակնհայտ է, որ  $|\lambda(\alpha)| \leq 1$  ցանկացած դրական  $r$ -ի դեպքում:

Բերենք մի քանի էական դիտողություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների վերաբերյալ: Համաձայն (10.5.8) և (10.5.16) գնահատականների, երկուսն էլ ունեն  $O(\tau + h^2)$  մոտարկման կարգ: Բացահայտ սխեման իրականացվում է ավելի հեշտ այն դեպքում, երբ անբացահայտ սխեմայի հաշվարկները յուրաքանչյուր շերտում պահանջում են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծում: Սակայն պետք է նկատի ունենալ, որ երեքանկյունագծային մատրիցով համակարգերը լուծվում են ըստ կարգի օպտիմալ մեթոդով (տե՛ս 4.6 պարագրաֆը): Ուստի երկու դեպքում էլ առանձին շերտում մոտավոր լուծման որոշումը պահանջում է  $O(h^{-1})$  թվաբանական գործողություն: Բացահայտ սխեմայում ժամանակային շերտերի քանակը,  $\tau \leq h^2/a$  սահմանափակության պատճառով, ընդհանրապես ավելի շատ է, քան անբացահայտ սխեմայում: Պետք չէ մոռանալ նաև մոտարկման ճշտության մասին, որը բացահայտ սխեմայում, ժամանակային քայլի վրա սահմանափակության առկայությամբ,  $O(h^2)$  մեծությունն է, և որպեսզի ունենանք նույն ճշտությունը անբացահայտ սխեմայի դեպքում, պետք է նույնպես վերցնել  $\tau = O(h^2)$ :

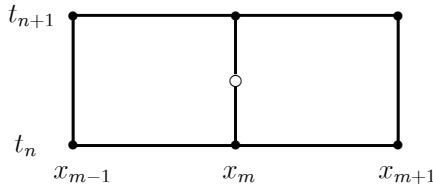
### 10.5.3 Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման

Դիտարկենք ջերմահաղորդականության հավասարման համար ևս մեկ տարբերական սխեմա: Գրենք (10.5.1)–(10.5.3) խնդրի համար

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} \left[ (v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}} \right] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ v_0^n = \alpha^n, \quad v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10.5.23)$$

ցանցային հավասարումների համակարգը, որտեղ  $f_m^{n+1/2} \equiv f(x_m, t_n + \tau/2)$ : Այս սխեման կառուցված է ըստ նկ. 10.5.2-ում պատկերված վեցկետանի շաբլոնի և կրում է *Կռանկ-Նիկոլսոնի* անունը:





**Նկ. 10.5.2** Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեմայի շարվումը

Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման պատկանում է անբացահայտ սխեմաների դասին, քանի որ յուրաքանչյուր  $(n + 1)$ -րդ շերտում, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , լուծվում է

$$\begin{cases} -\frac{r}{2}v_{m-1}^{n+1} + (1+r)v_m^{n+1} - \frac{r}{2}v_{m+1}^{n+1} = g_m^{n+1}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = \alpha^{n+1}, v_{M+1}^{n+1} = \beta^{n+1} \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ

$$g_m^{n+1} \equiv \frac{r}{2}v_{m-1}^n + (1-r)v_m^n + \frac{r}{2}v_{m+1}^n + \tau f_m^{n+1/2} :$$

Ի տարբերություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների, Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ ըստ  $\tau$  քայլի: Ենթադրելով ճշգրիտ լուծման բավականաչափ ողորկություն՝ բոլոր  $m = 1, 2, \dots, M$  և  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  արժեքների համար դժվար չէ ստանալ հետևյալ հավասարությունները.

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} [(u_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (u_m^n)_{x\bar{x}}] &= f_m^{n+1/2} + \varepsilon_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ u_m^0 &= \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ u_0^n &= \alpha^n, u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

որտեղ

$$|\varepsilon_m^{n+1/2}| \leq C(\tau^2 + h^2), \quad C = const > 0 : \tag{10.5.24}$$

Ապացուցված է, որ Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման կայուն է (10.5.4) նորմում, եթե  $\tau = O(h^2)$  (տե՛ս, օրինակ, [48]): Իսկ 10.7 պարագրաֆում մենք ցույց կտանք, որ այդ սխեման բացարձակ կայուն է ցանցային էվկլիդյան նորմում: Դա նշանակում է, որ ունենալով (10.5.24) գնահատականը և վերցնելով  $\tau = O(h)$ , մենք կապահովենք  $O(h^2)$  մոտարկման սխալանքը:

Սխեման իրականացվում է ըստ հետևյալ ալգորիթմի.

**Pseudocode CRANK – NICOLSON**

```

input  $a, T, M, N$ 
 $h = 1/(M + 1)$ 
 $\tau = T/N$ 
 $r = a\tau/h^2$ 
for  $m = 0, 1, \dots, M + 1$  do
     $v_m^0 = \varphi_m$ 
end
for  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  do
     $v_0^{n+1} = \alpha^{n+1}$ 
     $v_{M+1}^{n+1} = \beta^{n+1}$ 
    for  $m = 1, 2, \dots, M$  do
         $g_m = (1 - r)v_m^n + 0.5r(v_{m-1}^n + v_{m+1}^n) + \tau f_m^{n+1/2}$ 
    end
    solve system
         $-0.5rv_{m-1}^{n+1} + (1 + r)v_m^{n+1} - 0.5rv_{m+1}^{n+1} = g_m,$ 
         $m = 1, 2, \dots, M$ 
    end solve
end
output  $v$ 

```

Վերջում նշենք, որ ջերմահաղորդականության հավասարման համար դիտարկված բոլոր սխեմաները

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \left[ \sigma (v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (1 - \sigma) (v_m^n)_{x\bar{x}} \right] = f_m^{n+\sigma}$$

կշիռներով սխեմայի, որտեղ  $f_m^{n+\sigma} \equiv f(x_m, t_n + \sigma\tau)$ , մասնավոր դեպքերն են: Իրոք,  $\sigma = 0$  դեպքում մենք կատանանք բացահայտ սխեմա,  $\sigma = 1$  դեպքում՝ անբացահայտ, իսկ  $\sigma = 0.5$  դեպքում՝ Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման:

**10.6 Լարի տատանման հավասարումը**

Դիտարկենք ամրացված ծայրերով լարի տատանման խնդիրը.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (10.6.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (10.6.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T : \quad (10.6.3)$$

Հավասարման մեջ  $a$ -ն դրական հաստատուն է: Սկզբնական և եզրային պայմանները համաձայնեցված են՝  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  և  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ : Մենք կենթադրենք նաև, որ (10.6.1)–(10.6.3) խնդրի նախնական ֆունկցիաները և լուծումը ունեն պահանջվող որոշկություն:

Խնդրի լուծման համար օգտվենք նկ. 10.5.1-ում պատկերված ցանցից: Նախքան տարբերական սխեմա գրելը, դիտարկենք (10.6.2) սկզբնական պայմաններից երկրորդի մոտարկման հարցը: Գրենք Թեյլորի վերլուծությունը.

$$u_m^1 = u(x_m, \tau) = u_m^0 + \tau \left. \frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} + \frac{\tau^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u(x_m, t)}{\partial t^3} \right|_{t=\theta},$$

որտեղ  $0 < \theta < \tau$ : Այստեղից

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \left. \frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} + O(\tau^2) :$$

Օգտագործելով (10.6.1) հավասարումը և (10.6.2) պայմանները՝ կստանանք

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \nu_m + O(\tau^2) \tag{10.6.4}$$

հավասարությունը, որտեղ

$$\nu_m \equiv \psi_m + \frac{\tau}{2} (a \varphi''(x_m) + f_m^0) :$$

Գրենք տարբերական սխեմա ըստ նկ. 10.2.6-ում տրված «խաչ» շաբլոնի.

$$\begin{cases} (v_m^n)_{\bar{t}\bar{t}} - a (v_m^n)_{\bar{x}\bar{x}} = f_m^n, & m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad \frac{v_m^1 - v_m^0}{\tau} = \nu_m, & m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, & n = 0, 1, \dots, N: \end{cases} \tag{10.6.5}$$

Գժվար չէ ստանալ, որ

$$(u_m^n)_{\bar{t}\bar{t}} - a (u_m^n)_{\bar{x}\bar{x}} = f_m^n + O(\tau^2 + h^2) \tag{10.6.6}$$

(տե՛ս 9.3.4 լեմման): Այսպիսով, (10.6.4) և (10.6.6)-ից հետևում է, որ (10.6.5) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ:

Սխեմայի թվային իրականացումը կատարվում է հետևյալ հերթականությամբ: Նախ գտնում ենք մոտավոր լուծման արժեքները առաջին երկու շերտում.

$$\begin{aligned} v_m^0 &= \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad v_0^0 = v_{M+1}^0 = 0, \\ v_m^1 &= v_m^0 + \tau \nu_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad v_0^1 = v_{M+1}^1 = 0: \end{aligned}$$

Այնուհետև ըստ

$$v_m^{n+1} = r^2 v_{m-1}^n + 2(1 - r^2)v_m^n + r^2 v_{m+1}^n - v_m^{n-1} + \tau^2 f_m^n, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$v_0^{n+1} = v_{M+1}^{n+1} = 0$$

բանաձևերի շերտ առ շերտ՝  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ , հաշվվում են լուծման արժեքները ցանցի մնացած հանգույցներում: Բանաձևերի մեջ՝  $r \equiv \sqrt{a}\tau/h$ :

Վերջում նշենք, որ կառուցված տարբերական սխեմայի կայունության հարցը մանրամասն հետազոտված է [48] մենագրության մեջ:

## 10.7 Ֆուրիեի դիսկրետ ձևափոխությունը

Երբեմն ցանցային խնդրի լուծումը հաջողվում է ներկայացնել ըստ համապատասխան տարբերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծությամբ: Օրինակ, երբ ուսումնասիրվում են այսպես կոչված *մոդելային խնդիրները*, որոնք արտացոլում են դիտարկվող հավասարումների դասի բոլոր հիմնական բնութագրերը: Կատարվում են վերլուծություններ ըստ տարբեր բազիսային ֆունկցիաների՝ կախված ցանցային խնդրի դրվածքից (տե՛ս, օրինակ, [52]): Այստեղ մենք կդիտարկենք այդպիսի վերլուծություններից մեկը:

### 10.7.1 Ֆուրիեի վերջավոր գումարներ ըստ սինուսների

Դիցուք  $[0, 1]$  հատվածում տրված է  $h = 1/(M + 1)$  քայլով

$$w_h = \{x_m = mh : m = 0, 1, \dots, M + 1\}$$

ցանցը: Նշանակենք  $\overset{\circ}{G}_h$ -ով այդ ցանցի վրա որոշված  $v = \{v_m\}_{m=0}^{M+1}$ ,  $v_0 = v_{M+1} = 0$  ցանցային ֆունկցիաների  $M$ -չափանի գծային տարածությունը: Ներմուծենք  $\overset{\circ}{G}_h$ -ում սկալյար արտադրյալ և նորմ՝

$$(v, w) \equiv h \sum_{m=1}^M v_m w_m, \quad \|v\| \equiv \sqrt{(v, v)} : \tag{10.7.1}$$

Դիտարկենք

$$\psi^{(p)} = \left\{ \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi m}{M + 1} \right\}_{m=0}^{M+1}, \quad p = 1, 2, \dots, M \tag{10.7.2}$$

ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը: Ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիաները  $\overset{\circ}{G}_h$  տարածության մեջ կազմում են օրթոնորմալ համակարգ: Նախ սպացուցենք, որ  $s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2M + 1)$  արժեքների համար

$$\sum_{m=0}^M \cos \frac{s\pi m}{M + 1} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } s\text{-ը գույգ է,} \\ 1, & \text{եթե } s\text{-ը կենտ է:} \end{cases} \tag{10.7.3}$$

Իրոք,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \cos \frac{s\pi m}{M+1} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \left[ e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=0}^M e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + \sum_{m=0}^M e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{e^{-i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^s - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{(-1)^s - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right], \end{aligned}$$

որտեղից էլ հեշտությամբ հետևում է (10.7.3) հասկությունը:

Եթե  $p \neq q$ , ապա

$$\begin{aligned} (\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) &= 2h \sum_{m=1}^M \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^M \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} = \\ &= h \left[ \sum_{m=0}^M \cos \frac{(p-q)\pi m}{M+1} - \sum_{m=0}^M \cos \frac{(p+q)\pi m}{M+1} \right]: \end{aligned}$$

Քանի որ  $p - q$  և  $p + q$  թվերը միաժամանակ զույգ են կամ կենտ, ապա համաձայն (10.7.3)-ի  $(\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) = 0$ : Իսկ եթե  $p = q$ , ապա

$$\begin{aligned} (\psi^{(p)}, \psi^{(p)}) &= 2h \sum_{m=1}^M \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^M \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = h \sum_{m=0}^M \left[ 1 - \cos \frac{2p\pi m}{M+1} \right] = \\ &= h(M+1) - h \sum_{m=0}^M \cos \frac{2p\pi m}{M+1} = h(M+1) = 1: \end{aligned}$$

Այսպիսով, (10.7.2) ֆունկցիաները  $\overset{\circ}{G}_h$  տարածության մեջ կազմում են օրթոնորմալ բազիս:

Ցանկացած  $v \in \overset{\circ}{G}_h$  ցանցային ֆունկցիա ներկայացվում է

$$v = \sum_{p=1}^M c_p \psi^{(p)} \tag{10.7.4}$$

*Ֆուրիեի վերջավոր գումարի* տեսքով, ընդ որում

$$v_m = \sum_{p=1}^M c_p \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sum_{p=1}^M c_p \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M: \tag{10.7.5}$$

Վերլուծության  $c_p$  գործակիցները կոչվում են  $v$  ֆունկցիայի *Ֆուրիեի գործակիցներ*: Բազիսային  $\psi^{(p)}$  ֆունկցիաների օրթոնորմալության շնորհիվ ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները Ֆուրիեի գործակիցների համար.

$$c_p = (v, \psi^{(p)}) = h \sum_{m=1}^M v_m \psi_m^{(p)} = \sqrt{2}h \sum_{m=1}^M v_m \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad p = 1, 2, \dots, M: \tag{10.7.6}$$

Այնուհետև, ճիշտ է

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{p=1}^M c_p^2}, \tag{10.7.7}$$

հավասարությունը, որը սովորական Ֆուրիեի շարքերի տեսության հայտնի Պարսևալի հավասարության նմանակն է:

Ցանցային ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների որոշումը ըստ (10.7.6) բանաձևի կոչվում է *Ֆուրիեի ուղիղ դիսկրետ ձևափոխություն*: Իսկ ցանցային ֆունկցիայի վերականգնումը ըստ (10.7.5) բանաձևի կոչվում է *Ֆուրիեի հակադարձ դիսկրետ ձևափոխություն*: Երկու դեպքում էլ խնդիրը հանգում է

$$S_k = \sum_{l=1}^M a_l \sin \frac{k\pi l}{M+1}, \quad k = 1, 2, \dots, M \tag{10.7.8}$$

տեսքի գումարների հաշվմանը: Հեշտ է համոզվել, որ բոլոր  $S_k$  մեծությունների հաշվման համար բավարար է կատարել  $O(M^2)$  թվաբանական գործողություն (ենթադրելով, որ  $\sin(k\pi l/(M+1))$  արժեքները հայտնի են): Սակայն այս թիվը կարելի է էապես փոքրացնել, եթե օգտագործենք (10.7.2) օրթոգոնալ ֆունկցիաների հատուկ տեսքը: Գոյություն ունի ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս հաշվել բոլոր (10.7.8) գումարները կատարելով  $O(M \log_2 M)$  թվաբանական գործողություն: Այդ ալգորիթմը հայտնի է որպես *Ֆուրիեի արագ ձևափոխություն*: Նրա մանրամասն նկարագրությունը կարելի է գտնել, օրինակ, [3, 52] գրքերում: Նշենք նաև, որ ալգորիթմի հիմնական գաղափարն այն է, որ (10.7.8) գումարներում նախքան բազմապատկում կատարելը խմբավորվում են ընդհանուր բազմապատկիչ ունեցող անդամները:

### 10.7.2 Սեփական արժեքների տարբերական խնդիրը

Սահմանենք  $v = \{v_m\}_{m=0}^{M+1} \in \overset{\circ}{G}_h$  ցանցային ֆունկցիայի վրա գործող  $\Lambda$  տարբերական օպերատորը հետևյալ կերպ.

$$\Lambda v_m = (v_m)_{x\bar{x}}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \Lambda v_0 = \Lambda v_{M+1} = 0 :$$

Ցույց տանք, որ (10.7.2)-ում որոշված  $\psi^{(p)}$  ցանցային ֆունկցիաները  $\Lambda$  օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Իրոք,  $m = 1, 2, \dots, M$  արժեքների համար ունենք

$$\begin{aligned} \Lambda \psi_m^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{h^2} \left[ \sin \frac{p\pi(m-1)}{M+1} - 2 \sin \frac{p\pi m}{M+1} + \sin \frac{p\pi(m+1)}{M+1} \right] = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{h^2} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \left( \cos \frac{p\pi}{M+1} - 1 \right) = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} \psi_m^{(p)} : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$\Lambda \psi^{(p)} = \lambda_p \psi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, M, \tag{10.7.9}$$

որտեղ

$$\lambda_p = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} \quad (10.7.10)$$

թվերը  $\Lambda$  օպերատորի համապատասխան սեփական արժեքներն են: Այդ սեփական արժեքների համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$8 < \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2(M+1)} = |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_M| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi}{2(M+1)} < \frac{4}{h^2} : \quad (10.7.11)$$

Այստեղ  $|\lambda_M|$ -ի վերին գնահատականը ակնհայտ է: Ինչ վերաբերում է  $|\lambda_1|$ -ի ստորին գնահատականին, ապա այն կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ: Ունենք

$$|\lambda_1| = \pi^2 \left( \sin \frac{\pi}{2(M+1)} / \frac{\pi}{2(M+1)} \right)^2 :$$

Քանի որ  $M \geq 1$ , ապա  $\pi/(2(M+1))$  թիվը գտնվում է  $(0, \pi/4]$  միջակայքում: Հեշտ է ստուգել, որ  $\sin \alpha/\alpha$  ֆունկցիայի մինիմումը, երբ  $\alpha \in (0, \pi/4]$ , հասանելի է  $\alpha = \pi/4$  կետում: Ուստի  $|\lambda_1| > 8$ :

### 10.7.3 Կիրառություններ

Որոշ դեպքերում Ֆուրիեի վերլուծության միջոցով կարելի է ստանալ տարբերական խնդրի լուծումը, ինչպես նաև ապացուցել սխեմայի կայունությունը: Բերենք երկու օրինակ:

- Դիտարկենք

$$\begin{cases} -\Lambda v_m + qv_m = f_m, & m = 1, 2, \dots, M, \\ v_0 = v_{M+1} = 0 \end{cases} \quad (10.7.12)$$

տարբերական սխեման, որտեղ  $q = const > 0$ : Այս սխեման մոտարկում է համասեռ եզրային պայմաններով (9.13.1) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը: Փնտրենք (10.7.12) խնդրի լուծումը հետևյալ տեսքով.

$$v = \sum_{p=1}^M c_p \psi^{(p)} : \quad (10.7.13)$$

Դիցուք  $F_p$  թվերը  $f = \{f_m\}_{m=0}^{M+1}$  ցանցային ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են (կարող ենք համարել, որ  $f_0 = f_{M+1} = 0$ ): Ունենք

$$f = \sum_{p=1}^M F_p \psi^{(p)} : \quad (10.7.14)$$

Տեղադրելով (10.7.13) և (10.7.14) վերլուծությունները (10.7.12) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$\sum_{p=1}^M c_p [-\Lambda \psi^{(p)} + q \psi^{(p)}] = \sum_{p=1}^M F_p \psi^{(p)} :$$

Այնուհետև, համաձայն (10.7.9)-ի՝

$$\sum_{p=1}^M c_p (q - \lambda_p) \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^M F_p \psi^{(p)} :$$

Այստեղից, քանի որ  $\psi^{(p)}$  ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ստանում ենք

$$c_p (q - \lambda_p) = F_p, \quad p = 1, 2, \dots, M$$

կամ

$$c_p = \frac{F_p}{q - \lambda_p}, \quad p = 1, 2, \dots, M : \tag{10.7.15}$$

Այսպիսով, մենք գտնում ենք  $v$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները, և դրանով (10.7.13) խնդրի լուծումը:

Օգտվելով (10.7.7) հավասարությունից, հեշտ է ապացուցել (10.7.12) տարբերական սխեմայի կայունությունը: Իրոք, օգտագործելով (10.7.15) արտահայտությունները և հաշվի առնելով (10.7.11) անհավասարությունները, կստանանք

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{p=1}^M c_p^2} = \sqrt{\sum_{p=1}^M \frac{F_p^2}{(q - \lambda_p)^2}} \leq \frac{1}{q - \lambda_1} \sqrt{\sum_{p=1}^M F_p^2} = \frac{1}{q + 8} \|f\| :$$

Ստացված

$$\|v\| \leq \frac{1}{q + 8} \|f\|$$

գնահատականը հաստատում է (10.7.12) տարբերական սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի (10.7.1) էվկլիդյան ցանցային նորմում:

• Որպես երկրորդ օրինակ դիտարկենք (10.5.23) Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման: Ապացուցենք այդ սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների: Այսպիսով, դիտարկենք

$$\begin{cases} \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{a}{2} [(v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}}] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, M + 1, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \tag{10.7.16}$$

տարբերական խնդիրը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցվածությունը՝  $\varphi_0 = \varphi_{M+1} = 0$ :



Օգտագործելով  $\varphi$  սկզբնական ցանցային ֆունկցիայի

$$\varphi = \sum_{p=1}^M c_p^0 \psi^{(p)}$$

Ֆուրիեի վերլուծությունը՝ փնտրենք (10.7.16) խնդրի լուծումը  $n$ -րդ շերտում, որտեղ  $1 \leq n \leq N$ , հետևյալ տեսքով.

$$v^n = \sum_{p=1}^M c_p^n \psi^{(p)} : \quad (10.7.17)$$

Դիցուք  $F_p^{n+1/2}$  թվերը  $f^{n+1/2} = \{f_m^{n+1/2}\}_{m=0}^{M+1}$  ցանցային ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են (համարում ենք, որ  $f_0^{n+1/2} = f_{M+1}^{n+1/2} = 0$ ): Ունենք

$$f^{n+1/2} = \sum_{p=1}^M F_p^{n+1/2} \psi^{(p)} : \quad (10.7.18)$$

Ֆիքսված  $n$  արժեքի համար, որտեղ  $0 \leq n \leq N - 1$ , գրենք (10.7.16) համակարգի հավասարումները

$$\frac{1}{\tau}(v^{n+1} - v^n) - \frac{a}{2} [\Lambda v^{n+1} + \Lambda v^n] = f^{n+1/2}$$

օպերատորային տեսքով: Տեղադրելով (10.7.17) և (10.7.18) վերլուծությունները վերջին հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$\sum_{p=1}^M \left[ \frac{c_p^{n+1} - c_p^n}{\tau} - \frac{a\lambda_p}{2} (c_p^{n+1} + c_p^n) \right] \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^M F_p^{n+1/2} \psi^{(p)} :$$

Այստեղից հանգում ենք

$$c_p^{n+1} = \frac{1 + \tau a \lambda_p / 2}{1 - \tau a \lambda_p / 2} c_p^n + \frac{\tau}{1 - \tau a \lambda_p / 2} F_p^{n+1/2}, \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (10.7.19)$$

անշուքյանը: Հաջորդաբար հաշվարկելով Ֆուրիեի գործակիցները ըստ (10.7.19) բանաձևի՝ սկսած  $n = 0$ -ից, կստանանք (10.7.16) տարբերական խնդրի լուծումը:

Այնուհետև, քանի որ

$$1 - \tau a \lambda_p / 2 > 1 \quad \text{և} \quad \left| \frac{1 + \tau a \lambda_p / 2}{1 - \tau a \lambda_p / 2} \right| < 1,$$

ապա

$$|c_p^{n+1}| \leq |c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}|, \quad p = 1, 2, \dots, M : \quad (10.7.20)$$

Այժմ, օգտվելով հայտնի Մինկովսկու անհավասարությունից (տե՛ս, օրինակ, [14, 29]) և (10.7.7) հավասարությունից, կստանանք

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\| &= \sqrt{\sum_{p=1}^M |c_p^{n+1}|^2} \leq \sqrt{\sum_{p=1}^M (|c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}|)^2} \leq \sqrt{\sum_{p=1}^M |c_p^n|^2} + \tau \sqrt{\sum_{p=1}^M |F_p^{n+1/2}|^2} = \\ & \|v^n\| + \tau \|f^{n+1/2}\| : \end{aligned}$$

Այսպիսով, հանգում ենք

$$\|v^{n+1}\| \leq \|v^n\| + \tau \|f^{n+1/2}\|, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

անհավասարությանը: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|v^n\| \leq T \max_{0 \leq n \leq N-1} \|f^{n+1/2}\| + \|\varphi\|$$

գնահատականը, որի համաձայն Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման կայուն է ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների:

Վերջում նշենք, որ Ֆուրիեի մեթոդի կիրառման հնարավորությունները լուծման անմիջական հաշվման համար սահմանափակ են: Բանն այն է, որ մեթոդը դառնում է ոչ պիտանի, օրինակ, փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, կամ էլ անկանոն երկրաչափական ձևի տիրույթներում:

## 10.8 Դիփիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար

Մինչ այժմ մենք ուսումնասիրում էինք տարբերական սխեմաներ մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների համար, որոնք նկարագրում են ժամանակի ընթացքում փոփոխվող պրոցեսներ: Այդպիսի հավասարումները անվանում են *ոչ ստացիոնար*: Եթե մասնական ածանցյալներով հավասարումը չի պարունակում ժամանակային փոփոխականը, ապա այն կոչվում է *ստացիոնար*: Որպես օրինակ դիտարկենք Դիփիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար:

Դիցուք  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$  տիրույթում տրված է

$$-\Delta u = f, \quad (x, y) \in \Omega \tag{10.8.1}$$

հավասարումը

$$u = \varphi, \quad (x, y) \in \partial\Omega \tag{10.8.2}$$

եզրային պայմանով: Ենթադրենք, որ (10.8.1), (10.8.2) խնդիրը ունի միակ լուծում և այդ լուծումը օժտված է պահանջվող ողորկությամբ:

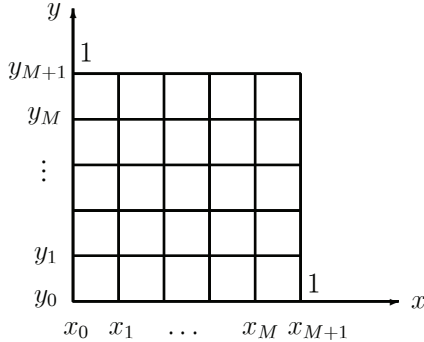
Կառուցենք  $\Omega$  տիրույթում  $(x_i, y_j)$  հանգույցներով  $\omega_h$  հավասարաչափ ցանց, որտեղ  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, M + 1$ ),  $y_j = jh$  ( $j = 0, 1, \dots, M + 1$ ) և  $h = 1/(M + 1)$ , ինչպես ցույց է տրված նկ. 10.8.1-ում: Դիտարկենք  $\omega_h$  ցանցի  $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$  բնական տրոհումը, որտեղ  $\omega_h^\circ$  և  $\omega_h'$ -ը համապատասխանաբար ներքին և եզրային հանգույցների բազմություններն են (տես՝ 10.2.1 օրինակը): Նշանակենք  $w(i, j)$ -ով  $w \in G_h$  ցանցային ֆունկցիայի արժեքը  $(x_i, y_j)$  հանգույցում:

Ցանցային ֆունկցիաների  $G_h$  տարածության մեջ սահմանենք

$$\|w\| \equiv \max_{\omega_h} |w(i, j)|$$

նորմը: Համապատասխանաբար նորմերը  $G_h^\circ$  և  $G_h'$  տարածություններում սահմանները հետևյալ կերպ.

$$\|w\|^\circ \equiv \max_{\omega_h^\circ} |w(i, j)|, \quad \|w\|' \equiv \max_{\omega_h'} |w(i, j)| :$$



**Նկ. 10.8.1** Ֆանց Պուասոնի հավասարման համար

Ըստ նկ. 10.2.6-ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի կառուցենք

$$\begin{cases} -\Delta_h v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \quad (10.8.3)$$

տարբերական սխեման, որտեղ  $\Delta_h$  *Լասլյասի տարբերական օպերատորը* որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\Delta_h v(i, j) \equiv v_{x\bar{x}}(i, j) + v_{y\bar{y}}(i, j) : \quad (10.8.4)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ (10.8.3) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ: Իրոք, օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տե՛ս լեմմա 9.3.4), կստանանք

$$-\Delta_h u(i, j) = f(i, j) + \varepsilon(i, j),$$

որտեղ

$$\varepsilon(i, j) = -\frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_i+\theta_1 h, y_j)} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_i, y_j+\theta_2 h)} \right), \quad -1 < \theta_1, \theta_2 < 1 :$$

Ենթադրելով ճշգրիտ լուծման մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը՝ հանգում ենք

$$|\varepsilon(i, j)| \leq Ch^2, \quad C = const > 0$$

զնահատականին՝ ցանցի բոլոր հանգույցների համար:

Այժմ հետազոտենք (10.8.3) տարբերական սխեմայի կայունությունը: Նախապես ձևակերպենք և ապացուցենք մեկ օժանդակ պնդում:

**Լեմմա 10.8.1** (մաքսիմումի սկզբունք) : Դիցուք  $\theta$  ցանցային ֆունկցիայի համար

$$-\Delta_h \theta(i, j) \leq 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ : \tag{10.8.5}$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը եզրային հանգույցներում, այսինքն՝

$$\max_{\omega_h} \theta(i, j) = \max_{\omega_h^\circ} \theta(i, j) : \tag{10.8.6}$$

Ապացույց: Դիցուք  $\mu \equiv \max_{\omega_h} \theta(i, j)$ : Ենթադրենք հակառակը՝ եզրային հանգույցներում մեծագույն արժեքը հասանելի չէ: Այդ դեպքում ակնհայտորեն կգտնվի այնպիսի  $(x_k, y_l) \in \omega_h^\circ$  հանգույց, որ  $\theta(k, l) = \mu$  և նրա շրջա հարևան հանգույցներից գոնե մեկում  $\theta$  ֆունկցիայի արժեքը  $\mu$ -ից փոքր է: Այդպիսի  $(x_k, y_l)$  հանգույցում ունենք

$$\begin{aligned} -\Delta_h \theta(k, l) &= -\frac{\theta(k-1, l) - 2\theta(k, l) + \theta(k+1, l)}{h^2} \\ &\quad -\frac{\theta(k, l-1) - 2\theta(k, l) + \theta(k, l+1)}{h^2} = \\ &= \frac{4\mu - \theta(k-1, l) - \theta(k+1, l) - \theta(k, l-1) - \theta(k, l+1)}{h^2} > 0, \end{aligned}$$

ինչը հակասում է (10.8.5) պայմանին: Ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, և  $\theta$  ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը գոնե մեկ եզրային հանգույցում:  $\square$

**Թեորեմ 10.8.1 :** (10.8.3) տարբերական խնդրի  $v$  լուծման համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.

$$\|v\| \leq \frac{1}{8} \|f\|^\circ + \|\varphi\|' : \tag{10.8.7}$$

Ապացույց: Դիտարկենք  $w \in G_h$  ցանցային ֆունկցիա, որի արժեքները ցանցի հանգույցներում սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$w(i, j) = \frac{x_i(1-x_i)}{4} + \frac{y_j(1-y_j)}{4}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M+1 :$$

Ակնհայտ է, որ  $w(i, j) \geq 0$ : Դժվար չէ ստանալ նաև

$$\|w\| \leq \frac{1}{8} \tag{10.8.8}$$

գնահատականը: Այնուհետև, պարզ հաշվարկով գտնում ենք, որ

$$\Delta_h w(i, j) = -1, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ : \tag{10.8.9}$$

Դիցուք  $\theta \equiv v - \|f\|^\circ w$ :  $\Delta_{\bar{h}}$  տարբերական օպերատորի գծայնության և (10.8.9) հատկության շնորհիվ բոլոր  $(x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}}^\circ$  հանգույցների համար ունենք

$$-\Delta_{\bar{h}}\theta(i, j) = -\Delta_{\bar{h}}v(i, j) + \|f\|^\circ \Delta_{\bar{h}}w(i, j) = f(i, j) - \|f\|^\circ \leq 0$$

գնահատականը: Դա նշանակում է, որ  $\theta$  ֆունկցիան բավարարում է 10.8.1 լեմմայի պայմանին: Համաձայն (10.8.6)-ի

$$\theta(i, j) \leq \max_{\omega'_{\bar{h}}} \theta(i, j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}} :$$

Այնուհետև,  $\theta$  ֆունկցիայի սահմանումից բխում է

$$\max_{\omega'_{\bar{h}}} \theta(i, j) \leq \max_{\omega'_{\bar{h}}} v(i, j) \leq \|v\|' = \|\varphi\|'$$

անհավասարությունը: Ուստի

$$\theta(i, j) \leq \|\varphi\|', \quad (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}} :$$

Օգտվելով (10.8.8) գնահատականից ստանում ենք

$$v(i, j) = \theta(i, j) + \|f\|^\circ w(i, j) \leq \|\varphi\|' + \frac{1}{8} \|f\|^\circ, \quad (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}} \quad (10.8.10)$$

անհավասարությունները: Ծիշտ են նաև

$$-v(i, j) \leq \|\varphi\|' + \frac{1}{8} \|f\|^\circ, \quad (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}} \quad (10.8.11)$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե  $v$  ցանցային ֆունկցիան (10.8.3) տարբերական խնդրի լուծումն է, ապա  $-v$  ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} -\Delta_{\bar{h}}(-v(i, j)) = -f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}}^\circ \\ -v(i, j) = -\varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega'_{\bar{h}} \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծում: Վերջապես, (10.8.10) և (10.8.11)-ից ստանում ենք, որ

$$|v(i, j)| \leq \frac{1}{8} \|f\|^\circ + \|\varphi\|', \quad (x_i, y_j) \in \omega_{\bar{h}},$$

ինչից բխում է (10.8.7) գնահատականը:  $\square$

Այսպիսով, մենք ապացուցել ենք (10.8.3) տարբերական սխեմայի կայունությունը:

Հաջորդ պարագրաֆում մենք կուսումնասիրենք (10.8.3) տարբերական հավասարումների համակարգի կառուցվածքը և կքննարկենք այդպիսի համակարգերի լուծման որոշ մեթոդներ:

## 10.9 Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները

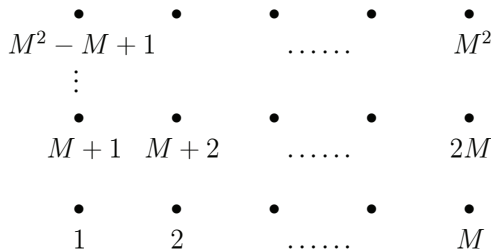
Նախորդ պարագրաֆում կառուցված (10.8.3) տարբերական սխեման ըստ էության ներկայացնում է գծային հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} -v(i-1, j) - v(i+1, j) + 4v(i, j) - v(i, j-1) - v(i, j+1) = h^2 f(i, j), \\ \quad \quad \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \\ v(i, 0) = \varphi(i, 0), \quad v(i, M+1) = \varphi(i, M+1), \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \\ v(0, j) = \varphi(0, j), \quad v(M+1, j) = \varphi(M+1, j), \quad j = 0, 1, \dots, M+1 : \end{cases} \quad (10.9.1)$$

Այսպիսով, մենք ունենք  $M^2$  անհայտով  $M^2$  հավասարում: Եթե  $M$ -ը մեծ չէ, ապա կարելի է կիրառել ստանդարտ մեթոդներ, օրինակ՝ Գաուսի մեթոդը: Սակայն արդեն  $M = 100$ -ի համար մենք ստանում ենք  $10^4 \times 10^4$  չափի համակարգ: Այս դեպքում անհրաժեշտ են լուծման հատուկ եղանակներ, քանի որ Գաուսի մեթոդի իրականացումը կպահանջի  $10^{12}$  կարգի թվաբանական գործողություն: Դա նշանակում է, որ համակարգի լուծումը կարող է խլել զգալի մեքենայական ժամանակ:

Անկախ դիֆերենցիալ հավասարման տեսքից, տիրույթի երկրաչափական ձևից, եզրային պայմանների տիպից և ածանցյալների մոտարկման եղանակից՝ տարբերական հավասարումների համակարգերի մատրիցները *նոսր են*: Այլ կերպ ասած, այդ մատրիցների տարրերի մեծամասնությունը զրոներ են, որոնք գտնվում են նախապես հայտնի տեղերում: Վերջավոր տարբերական մատրիցների նշված հատկությունը հաջողությամբ օգտագործվում է ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման էֆեկտիվ ալգորիթմներ մշակելիս:

Ավելի մանրամասն ուսումնասիրենք (10.9.1) համակարգը: Թեև նրա կառուցվածքը բավականին պարզ է, ավելի հարմար է ներկայացնել այդ համակարգը վանդակային տեսքով: Այդ նպատակով օգտագործենք ցանցի ներքին հանգույցների նկ. 10.9.1-ում տրված համարակալումը, որը կոչվում է *բառարանագրական կարգավորում*:



Նկ. 10.9.1 Հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը

Այս դեպքում հանգույցի դեկարտյան կոորդինատները հեշտությամբ որոշում են նրա բառարանագրական համարը և հակառակը՝

$$(i, j) \rightarrow n = (j - 1)M + i,$$

$$n \rightarrow j = \left\lfloor \frac{n - 1}{M} \right\rfloor + 1, \quad i = n - (j - 1)M :$$

Ներմուծենք

$$v_j = [v(1, j), v(2, j), \dots, v(M, j)]^T, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

և

$$r_1 = h^2[f(1, 1), f(2, 1), \dots, f(M, 1)]^T +$$

$$[\varphi(1, 0) + \varphi(0, 1), \varphi(2, 0), \dots, \varphi(M - 1, 0), \varphi(M, 0) + \varphi(M + 1, 1)]^T,$$

$$r_j = h^2[f(1, j), f(2, j), \dots, f(M, j)]^T + [\varphi(0, j), 0, \dots, 0, \varphi(M + 1, j)]^T,$$

$$j = 2, 3, \dots, M - 1,$$

$$r_M = h^2[f(1, M), f(2, M), \dots, f(M, M)]^T +$$

$$[\varphi(1, M + 1) + \varphi(0, M), \varphi(2, M + 1), \dots$$

$$\dots, \varphi(M - 1, M + 1), \varphi(M, M + 1) + \varphi(M + 1, M)]^T$$

վեկտորները: Արդյունքում (10.9.1) համակարգը կարելի է գրել

$$\begin{bmatrix} T & -I & & & & & \\ -I & T & -I & & & & \\ & -I & T & -I & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -I & T & -I & \\ & & & & -I & T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{M-1} \\ r_M \end{bmatrix} \quad (10.9.2)$$

վանդակային տեսքով, որտեղ  $T$ -ն հետևյալ  $M \times M$  չափի երեքանկյունագծային մատրից է՝

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 4 & \end{bmatrix}, \quad (10.9.3)$$

իսկ  $I$ -ն՝  $M$  կարգի միավոր մատրից է:

Ցանցային հավասարումների (10.9.2) համակարգի տեսքը կարելի է օգտագործել և մշակել 4.6 պարագրաֆում նկարագրված ալգորիթմի նմանակը: Այդ ալգորիթմը մանրամասնորեն շարադրված է [48, 52] գրքերում: Իսկ այստեղ մենք կդիտարկենք խնդրի լուծման այլ տարբերակներ:

### 10.9.1 Ֆուրիեի վերջավոր գումարների եղանակը

Շարադրենք (10.8.3) տարբերական խնդրի լուծման ուղիղ մեթոդը, որի հիմքում ընկած է փոփոխականների անջատման սկզբունքը:

Նախ ասենք, որ (10.8.3) խնդիրը կարելի է բերել համասեռ եզրային պայմաններով խնդրի՝ փոխելով սահմանամերձ հանգույցներում գրված հավասարումների աջ մասերը: Ավելի ճիշտ,  $\omega_h$  ցանցի ներքին հանգույցներում (10.8.3) խնդրի լուծումը համընկնում է

$$\begin{cases} -\Delta_h u(i, j) = r(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ u(i, j) = 0, & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \quad (10.9.4)$$

խնդրի լուծման հետ, որի աջ մասը որոշվում է ըստ

$$r(i, j) = f(i, j) + \frac{1}{h^2} \mu_1(i, j) + \frac{1}{h^2} \mu_2(i, j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$$

բանաձևի, որտեղ

$$\mu_1(i, j) = \begin{cases} \varphi(0, j), & i = 1 \\ 0, & 2 \leq i \leq M - 1 \\ \varphi(M + 1, j), & i = M \end{cases}, \quad \mu_2(i, j) = \begin{cases} \varphi(i, 0), & j = 1 \\ 0, & 2 \leq j \leq M - 1 \\ \varphi(i, M + 1), & j = M \end{cases} :$$

Այսպիսով, բավարար է գտնել (10.9.4) խնդրի լուծումը:

- Սեփական արժեքների խնդիրը Լապլասի տարբերական օպերատորի համար

Նշանակենք  $\overset{\circ}{G}_h$ -ով  $G_h$  տարածության ենթատարածությունը, որի ցանցային ֆունկցիաները հավասար են զրոյի եզրային հանգույցներում: Ներմուծենք  $\overset{\circ}{G}_h$ -ում սկալյար արտադրյալ՝

$$(v, w) \equiv h^2 \sum_{i,j=1}^M v(i, j)w(i, j) :$$

Սահմանափակվելով  $p, q = 1, 2, \dots, M$  արժեքներով՝ դիտարկենք

$$\Phi^{(p,q)}(i, j) \equiv \psi_i^{(p)} \psi_j^{(q)}, \quad 0 \leq i, j \leq M + 1 \quad (10.9.5)$$

ցանցային ֆունկցիաները, որտեղ

$$\psi_i^{(p)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi i}{M + 1}, \quad \psi_j^{(q)} = \sqrt{2} \sin \frac{q\pi j}{M + 1} :$$

Հեշտ է ստուգել, որ (10.9.5) ֆունկցիաների բազմությունը կազմում է օրթոնորմալ բազիս  $\overset{\circ}{G}_h$ -ում: Ուստի կամայական  $u \in \overset{\circ}{G}_h$  ցանցային ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$u = \sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Phi^{(p,q)} \quad (10.9.6)$$



տեսքով, որտեղ  $c_{pq}$  թվերը Ֆուրիեի գործակիցներն են՝

$$c_{pq} = \left( u, \Phi^{(p,q)} \right), \quad p, q = 1, 2, \dots, M : \quad (10.9.7)$$

Ցույց տանք, որ (10.9.5) ցանցային ֆունկցիաները  $\Delta_{\hbar}$  տարբերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Օգտվելով (10.7.9)-ից՝ կստանանք

$$\Delta_{\hbar} \Phi^{(p,q)}(i, j) = \left( \psi_i^{(p)} \right)_{x\bar{x}} \psi_j^{(q)} + \psi_i^{(p)} \left( \psi_j^{(q)} \right)_{y\bar{y}} = (\lambda_p + \lambda_q) \Phi^{(p,q)}(i, j)$$

հավասարությունը: Այսպիսով՝

$$\Delta_{\hbar} \Phi^{(p,q)} = \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M, \quad (10.9.8)$$

որտեղ

$$\lambda_{pq} = -\frac{4}{\hbar^2} \left( \sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} + \sin^2 \frac{q\pi}{2(M+1)} \right) : \quad (10.9.9)$$

Ինչպես ակնհայտորեն հետևում է (10.7.11)-ից՝

$$16 < |\lambda_{pq}| < \frac{8}{\hbar^2}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M :$$

- Լուծման մեթոդը. վերլուծությունը ըստ Ֆուրիեի վերջավոր գումարի

Փնտրենք (10.9.4) տարբերական խնդրի լուծումը (10.9.6) տեսքով: Նշանակենք  $R_{pq}$ -ով եզրային հանգույցներում զրոներով լրացված  $r \in G_{\hbar}^{\circ}$  աջ մասի Ֆուրիեի գործակիցները: Այդ դեպքում՝

$$r = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)} : \quad (10.9.10)$$

Տեղադրելով (10.9.6) և (10.9.10) վերլուծությունները (10.9.4) հավասարումների մեջ՝ կստանանք

$$-\sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Delta_{\hbar} \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)}$$

առնչությունը: Այնուհետև, օգտվելով (10.9.8)-ից կունենանք՝

$$-\sum_{p,q=1}^M c_{pq} \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^M R_{pq} \Phi^{(p,q)}$$

Քանի որ  $\Phi^{(p,q)}$  ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա

$$c_{pq} = -\frac{R_{pq}}{\lambda_{pq}}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M : \quad (10.9.11)$$

Համաձայն Ֆուրիեի գործակիցների հաշվման բանաձևի

$$R_{pq} = \left( r, \Phi^{(p,q)} \right) = \hbar^2 \sum_{i,j=1}^M r(i, j) \Phi^{(p,q)}(i, j) = \hbar \sum_{i=1}^M \left( \hbar \sum_{j=1}^M r(i, j) \psi_j^{(q)} \right) \psi_i^{(p)} :$$

Իսկ (10.9.6)-ից ստանում ենք՝

$$u(i, j) = \sum_{p,q=1}^M c_{pq} \Phi^{(p,q)}(i, j) = \sum_{p=1}^M \left( \sum_{q=1}^M c_{pq} \psi_j^{(q)} \right) \psi_i^{(p)} :$$

Արդյունքում հաշվողական ալգորիթմը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

**Pseudocode POISSON/FOURIER**

```

input  $M, h, \{r(i, j)\}, \{\lambda_{pq}\}$ 
for  $i = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
         $s_{iq} = \sqrt{2}h \sum_{j=1}^M r(i, j) \sin \frac{q\pi j}{M+1}$ 
    end
end
for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
         $R_{pq} = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^M s_{iq} \sin \frac{p\pi i}{M+1}$ 
    end
end
for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $q = 1, 2, \dots, M$  do
         $c_{pq} = -R_{pq} / \lambda_{pq}$ 
    end
end
for  $p = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $j = 1, 2, \dots, M$  do
         $t_{pj} = \sqrt{2} \sum_{q=1}^M c_{pq} \sin \frac{q\pi j}{M+1}$ 
    end
end
for  $j = 1, 2, \dots, M$  do
    for  $i = 1, 2, \dots, M$  do
         $u(i, j) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^M t_{pj} \sin \frac{p\pi i}{M+1}$ 
    end
end
output  $\{u(i, j)\}$ 
    
```

Նշենք, որ եթե հաշվենք գումարները 10.7 պարագրաֆում հիշատակված Ֆուրիեի արագ ձևափոխության ալգորիթմի կիրառմամբ, ապա (10.9.4) խնդրի լուծումը որոշելու համար կպահանջվի  $O(M^2 \log_2 M)$  թվաբանական գործողություն:

### 10.9.2 Խտերացիոն մեթոդներ

Էլիպտական եզրային խնդիրների համար կառուցված ցանցային հավասարումների համակարգեր լուծելիս հաճախ նախապատվությունը տալիս են խտերացիոն մեթոդներին, քանի որ դրանք իրականացվում են էապես ավելի պարզ ալգորիթմներով և կիրառելի են ինչպես փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, այնպես էլ բարդ երկրաչափական ձևի տիրույթներում:

Որպես օրինակ դիտարկենք (10.9.1) ցանցային հավասարումների համակարգը: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել բավականին պարզ

$$v^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} (v^n(i-1, j) + v^n(i+1, j) + v^n(i, j-1) + v^n(i, j+1)) + \frac{h^2}{4} f(i, j),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M \tag{10.9.12}$$

Յակոբիի մեթոդը: Հիմք ընդունելով հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը՝ կարելի է օգտվել նաև Գաուս-Չեյդելի մեթոդից՝

$$v^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} (v^{n+1}(i-1, j) + v^{n+1}(i, j-1) + v^n(i+1, j) + v^n(i, j+1)) + \frac{h^2}{4} f(i, j),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M : \tag{10.9.13}$$

Հեշտ է նկատել, (10.9.1) համակարգի մատրիցն ունի ոչ խիստ անկյունագծային գերիշխում: Ուստի այստեղ կիրառելի չեն Յակոբիի մեթոդի զուգամիտության մասին 4.8.2 և 4.8.3 թեորեմները: Սակայն ավելի մանրագնին հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ մեթոդը զուգամետ է:

Դիցուք  $B_J$ -ն (10.9.12) մեթոդի խտերացիան իրականացնող մատրիցն է: Որպես օպերատոր ճիշտ է

$$B_J = \frac{h^2}{4} \Delta_h + I$$

ներկայացումը, որտեղ  $I$ -ն նույնական օպերատոր է: Օգտվելով (10.9.8)-ից, բոլոր  $p, q = 1, 2, \dots, M$  արժեքների համար ունենք

$$B_J \Phi^{(p,q)} = \frac{h^2}{4} \Delta_h \Phi^{(p,q)} + \Phi^{(p,q)} = \left( 1 + \frac{h^2}{4} \lambda_{pq} \right) \Phi^{(p,q)} :$$

Ուստի

$$\mu_{pq} \equiv 1 + \frac{h^2}{4} \lambda_{pq}, \quad p, q = 1, 2, \dots, M$$

թվերը  $B_J$  մատրիցի սեփական արժեքներն են: Հաշվի առնելով (10.9.9) բանաձևը,  $B_J$  մատրիցի սպեկտրալ շառավիղի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$\rho(B_J) = \max_{1 \leq p, q \leq M} |\mu_{pq}| = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(M+1)} = \cos \frac{\pi}{M+1} = \cos \pi h \approx 1 - \frac{(\pi h)^2}{2} :$$

Այսպիսով,  $\rho(B_J) < 1$  և հետևաբար Յակոբիի մեթոդը զուգամիտում է: Մակայն փոքր  $h$ -երի դեպքում մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը մոտ է 1-ին: Ուստի քայլի փոքրացմանը զուգընթաց մեթոդի զուգամիտության արագությունը նկատելիորեն վատանում է: Այդ իսկ պատճառով մանր ցանցերի դեպքում մեթոդի կիրառումը աննպատակահարմար է:

Գաուս-Չեյդելի մեթոդի զուգամիտությունը հետևում է 4.9.4 թեորեմից, քանի որ (10.9.1) համակարգի մատրիցը սիմետրիկ է և դրական որոշյալ (սպացուցել): Այստեղ, ինչպես և Յակոբիի մեթոդում, ցանցի քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ նկատվում է զուգամիտության արագության նվազում: Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\rho(B_{GS}) = \cos^2(\pi h) \approx 1 - (\pi h)^2$$

(տե՛ս, օրինակ, [79]):

Վերջում նշենք, որ բացի վերը դիտարկված մեթոդներից գոյություն ունեն ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման այլ՝ ավելի էֆեկտիվ իտերացիոն մեթոդներ: Այդպիսիք են, օրինակ, *հաջորդական վերին ռեյաքսացիայի մեթոդը*, *փոփոխական ուղղությունների մեթոդը*, *համալուծ գրադիենտների մեթոդը* և այլն (տե՛ս [52, 65, 79]):

## Խնդիրներ և վարժություններ - 10

1.  $\Gamma$  եզրով  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$  կիսաշրջանում դիտարկվում է

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

հավասարումը: Վերցնելով  $h = 0.5$  քայլով քառակուսի ցանց՝ գրել տարբերական սխեմաներ հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում.

ա)  $u|_{\Gamma} = |x + y| - 1$

բ)  $\left(u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_{\Gamma} = \begin{cases} y - \sin \pi x, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$  ( $\mathbf{n}$ -ը՝ արտաքին նորմալի վեկտորն է):

2. Օգտագործելով ինը կետանի շարվոնը՝ արտածել  $\partial^2 u / \partial x \partial y$  ածանցյալի տարբերական մոտարկման բանաձևը:

3. Որոշել

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

հավասարման համար գրված

$$\frac{1}{\tau} \left( v_m^{n+1} - \frac{v_{m-1}^n + v_{m+1}^n}{2} \right) + \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

տարբերական սխեմայի մոտարկման կարգը:

4. Գիտարկել տարբեր տիպի տարբերական սխեմաներ

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & , U(x, 0) = U_0(x) \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & , V(x, 0) = V_0(x) \end{cases}$$

հավասարումների համակարգի համար և հետագոտել դրանց կայունությունը:

5. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետագոտել ստորև բերված տարբերական սխեմաների կայունությունը.

ա)  $\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}}{h} = 0, \quad a = const,$

բ)  $\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad a = const,$

գ)  $\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad a = const,$

դ)  $\frac{1}{\tau} \left( v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_{m-1}^n}{2} \right) + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad a = const,$

ե)  $\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = 0, \quad a = const,$

զ)  $\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} + (1-a) \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \quad a \in [0, 1] :$

6. Գիտարկվում է

$$\frac{1}{\tau} \left( \frac{v_{m-1}^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{2} - v_m^n \right) - (x_m^2 + 1) \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h^2} = f_m^{n+1}$$

տարբերական սխեման

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (x^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

հավասարման համար:  $\tau$  և  $h$  քայլերի ի՞նչ հարաբերակցության դեպքում մոտարկման սխալանքը  $O(h)$  մեծություն է:

7.  $\theta$ -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

հավասարման համար գրված

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \theta \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի մոտարկման սխալանքը կլինի  $O(\tau^2 + h^4)$  կարգի:

8. Հետագոտել հետևյալ տարբերական սխեմաների կայունությունը.

$$\text{ա) } \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2},$$

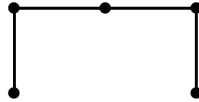
$$\text{բ) } \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h^2},$$

$$\text{գ) } \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{v_{m-1}^n - v_m^{n+1} - v_m^{n-1} + v_{m+1}^n}{h^2} :$$

9. Կառուցել տարբերական սխեմա

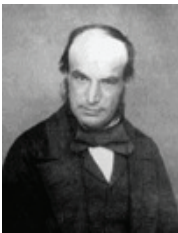
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} > 0$$

հավասարման համար ըստ ստորև բերված շարքոնի: Ապացուցել, որ սխեման կայուն է, եթե  $2a\tau \geq h^2$ :



## ՀԱՎԵԼՎԱԾ

### ՀԱՍԱՌՈՏ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ



Ադամս Ջոն Կաուչ  
(1819-1892)

Adams John Couch

Անգլիացի աստղագետ և մաթեմատիկոս: Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1864), Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Քոռնուոլում: Սովորել է Քեմբրիջում: 1859-1892 -ին՝ Քեմբրիջի համալսարանի աստղագիտության և երկրաչափության պրոֆեսոր, իսկ 1861 -ից՝ նաև Քեմբրիջի աստղադիտարանի տնօրեն:

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են երկնային մեխանիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հետազոտել է երկնային մարմինների (Լուսնի, մոլորակների, գիսաստղերի, երկնաքարային հոսքերի) շարժումը: Ուրանի խտությունների հետազոտման հիման վրա 1845 -ին կանխագուշակել է Նեպտուն մոլորակի գոյությունը՝ հաշվարկելով նրա ուղեծիրը և կոորդինատները: Հաշվողական մաթեմատիկայում քաջ հայտնի է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման *Ադամսի մեթոդը*: Այդ մեթոդը Ջ. Ադամսը մշակել է 1855 -ին՝ անգլիացի հայտնի հրետանավոր Ֆ.Բաշֆորթի խնդրանքով: Հետագայում մեթոդը մոռացության է մատնվել և նորից հայտնագործվել է 20-րդ դարի սկզբում նորվեգացի մաթեմատիկոս Ֆ. Շտերմերի կողմից:



Բեսել Ֆրիդրիխ Վիլհելմ  
(1784 -1846)

Bessel Friedrich Wilhelm

Գերմանացի աստղագետ և մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1812), Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1814):

Ծնվել է Մինդենում: Մասնագիտական կրթություն չի ստացել և աստղագիտական ու մաթեմատիկական գիտելիքները ձեռք է բերել ինքնակրթությամբ: 1810-ին նշանակվել է Բյունիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր և կառուցել է Ժամանակի ամենակատարյալ գործիքներով սարքավորված աստղադիտարանը, որի տնօրենը եղել է մինչև կյանքի վերջը:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները վերաբերում են աստղագիտությանը: Մշակել է աստղագիտական գործիքների սխալանքների տեսությունը: Դիտումների արդյունքների մաթեմատիկական մշակումների ընթացքում կիրառել է հավանականությունների տեսությունը և փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Ստեղծել է Արեգակի խավարումների տեսությունը, որոշել մոլորակների զանգվածները: Մաթեմատիկայի բնագավառում մշակել է գլանային ֆունկցիաների տեսությունը (*բեսելյան ֆունկցիաներ*) և դիտարկել է այն դիֆերենցիալ հավասարումը, որին բավարարում են այդ ֆունկցիաները (*Բեսելի հավասարում*): Նրա անունն է կրում Ֆուրիեի շարքի գործակիցների համար հայտնի անհավասարությունը (*Բեսելի անհավասարություն*):



Բոլցանո Բեռնարդ  
(1781-1848)

Bolzano Bernard

Չեխ մաթեմատիկոս, փիլիսոփա և աստվածաբան:

Ծնվել է Պրահայում: Ավարտել է Պրահայի համալսարանի փիլիսոփայության և աստվածաբանության ֆակուլտետները (1805): 1805-1819-ին եղել է Պրահայի համալսարանի կրոնի պատմության պրոֆեսոր: Իր ազատամիտ հայացքների պատճառով զրկվել է դասավանդելու և հրապարակային ելույթների իրավունքից:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են բազմությունների տեսությանը, մաթեմատիկական անալիզին, մեխանիկային և ֆիզիկային: Նրան են պատկանում մաթեմատիկական անալիզի մի շարք թեորեմներ: Ճշգրտել է ֆունկցիայի անընդհատության և սահմանի հասկացությունները: Հիմք է դրել շարքերի զուգամիտության տեսությանը: Ֆիզիկայի բնագավառում կառուցել է ալիքների տարածման տեսությունը: Բոլցանոյի աշխատանքների մեծ մասը հրատարակվել է իր մահից հետո:



Բունյակովսկի Վիկտոր Յակովլևիչ  
(1804-1889)

Bunyakovsky Victor Yakovlevich  
Буняковский Виктор Яковлевич

Ռուս մաթեմատիկոս: Պետերբուրգի ԳԱ ակադեմիկոս (1830):



Ծնվել է Պոդլսկի մարզում: 1820-1826-ին սովորել է Կոբուրգում (Գերմանիա), Լոզանում (Շվեյցարիա), Սորբոնում և Կոլեժ դը Ֆրանսում (Փարիզ): Ունկ նորել է Օ. Կոշիի դասախոսությունները: 1826-ից աշխատել է Պետերբուրգում, նախ՝ Առաջին կադետական դպրոցում, այնուհետև՝ Ծովային դպրոցում: 1830-ից՝ Լեռնագործական ինստիտուտի և Հադորդակցական ուղիների ճարտարագետների ինստիտուտի պրոֆեսոր: 1846-1889-ին՝ Պետերբուրգի համալսարանի պրոֆեսոր: Պետերբուրգի ԳԱ փոխպրեզիդենտ (1864-1889):

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են հավանականությունների տեսությանը, մաթեմատիկական անալիզին, թվերի տեսությանը: Ակտիվորեն զբաղվել է Ռուսաստանում մաթեմատիկական լուսավորության զարգացմամբ: Աշխատել է ռուսական մաթեմատիկական տերմինաբանության կատարելագործման վրա:



Գաուս Կարլ Ֆրիդրիխ  
(1777-1855)

Gauss Carl Friedrich

Գերմանացի մաթեմատիկոս, աստղագետ և գեոդեզիստ:

Ծնվել է Բրաունշվեյգում: 1795-1798-ին սովորել է Գյոթինգենի համալսարանում: 1799-ին աշխատել է Բրաունշվեյգի համալսարանում: 1807-ից եղել է Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր, միաժամանակ՝ համալսարանի աստղադիտարանի տնօրեն (1807-1855):

Գաուսի գիտական գործունեությունը շատ բազմակողմանի էր: Նրա հետազոտությունները նվիրված են բարձրագույն հանրահաշվին, մաթեմատիկական անալիզին, թվերի տեսությանը, դիֆերենցիալ երկրաչափությանը, հավանականությունների տեսությանը, աստղագիտությանը, երկնային մեխանիկային, գեոդեզիային, էլեկտրականության և մագնիսականության տեսությանը: Ապացուցել է հանրահաշվի հիմնական թեորեմը: Կառուցել է քառակուսային ձևերի թվաբանական տեսությունը: Կանոնավոր շարադրել է կոմպլեքս թվերի տեսությունը: Հիմք է դրել շարքերի զուգամիտության տեսությանը: Աստղագիտության բնագավառում Գաուսը հաշվողական մեթոդի օգնությամբ 1801-ին մեծ ճշտությամբ բացահայտել է *Յերերա* փոքր մոլորակի տեղադրությունը: 1820-ին Գաուսին հանձնարարվել է կազմել Հաննովերի շրջակայքի քարտեզը: Մույն նպատակի համար նա մշակել է մի շարք հաշվողական մեթոդներ (այդ թվում *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը*), որոնք գործնականում հանգեցրել են նոր գիտական ուղղության՝ *բարձրագույն գեոդեզիայի* ստեղծմանը: Ֆիզիկայի բնագավառում Գաուսը (ֆիզիկոս Վ. Վեբերի հետ միասին) մշակել է էլեկտրամագնիսական միավորների բացարձակ համակարգ և կառուցել է Գերմանիայում առաջին էլեկտրամագնիսական հեռագիրը: Գաուսը թողել է նաև չիրապարակված մեծ ժառանգություն, որից առավել արժեքավոր են նրա օրագիրը և ոչ էվկլիդյան երկրաչափության վերաբերյալ նյութերը: Գյոթինգենի ԳԱ-ն 1908-ից սկսած հրատարակել է Գաուսի աշխատությունների 11 հատորները:



Գերշգորին Սեմյոն Արոնովիչ  
(1901-1933)

Gershgorin Semyon Aronovich  
Гершгорин Семен Аронович

Ռուս մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Պրուժանի քաղաքում (Բելառուս): 1923-ին ավարտել է Պետրոգրադի տեխնոլոգիական ինստիտուտը: 1930-ից՝ Լենինգրադի պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր:

Հիմնականում աշխատել է կիրառական մաթեմատիկայի բնագավառում: Առավել հայտնի են նրա դիֆերենցիալ հավասարումների թվային և մեխանիկական ինտեգրմանը վերաբերող հետազոտությունները: 1929-ին առաջարկել է Լապլասի հավասարման մոտավոր ինտեգրման էլեկտրական մոդելը, որի հիման վրա ստեղծվել է այսպես կոչված *էլեկտրոինտեգրատոր*: 1931-ին հրապարակել է մատրիցների սեփական արժեքների տեղայնացման վերաբերյալ քաջ հայտնի թեորեմը:



Գրամ Յորգեն Պեդերսեն  
(1850-1916)

Gram Jorgen Pedersen

Դանիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Նուստրուպ գյուղում (Հադերսլեի մոտ): 1871-ին ավարտել է Կոպենհագենի համալսարանը: 1875-ից որպես մաթեմատիկոս աշխատել է «Հաֆնիա» սպահովագրական ընկերությունում: 1896-ից այդ ընկերության տնօրեն և Դանիական սպահովագրական խորհրդի նախագահ:



Դիրիխլե Պետեր Գուստավ  
(1805-1859)

Dirichlet Peter Gustav

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1837), Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1837), Փարիզի ԳԱ անդամ (1854): Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1855):

Ծնվել է Դյուրենում: Ստանալով միջնակարգ կրթությունը, 1822-1827-ին աշխատել է Փարիզում որպես տնային ուսուցիչ: Եղել է երիտասարդ գիտնականների խմբակի անդամ,

որը ղեկավարում էր Ժ.Ֆուրիեն: 1827-ին ստանձնել է դոցենտի պաշտոնը Բրեսլաուի համալսարանում: 1829-ից դասավանդել է Բեռլինում: 1831-1855-ին Բեռլինի համալսարանի, իսկ 1855-1859-ին՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են թվերի տեսությանը, մաթեմատիկական անալիզին, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներին: Թվերի տեսության մեջ ստացել է մի շարք կարևոր արդյունքներ: Ապացուցել է Ֆերմայի Մեծ թեորեմը հինգ ցուցիչի համար: Շճգրիտ ձևակերպել և հետազոտել է շարքերի պայմանական գուգամիտության հասկացությունը և ստացել գուգամիտության կարևոր հայտանիշ (*Գիրիխլեի հայտանիշ*): Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության մեջ քաջ հայտնի է *Գիրիխլեի խնդիրը*:



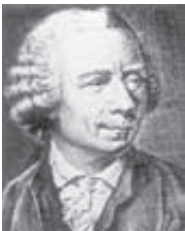
Չեյդել Ֆիլիպ Լյուդվիգ  
(1821-1896)

Seidel Philipp Ludwig

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Մյունխենի ԳԱ անդամ (1851), Գյոթինգենի ԳԱ թղթակից անդամ (1854) :

Ծնվել է Յվայբրյուկկենում: 1846-ին ավարտել է Մյունխենի համալսարանը: Դասավանդել է նույն համալսարանում (1855-ից՝ պրոֆեսոր):

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին: Ջ.Ստոքսի հետ միաժամանակ և նրանից անկախ մտցրեց ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և շարքերի հավասարաչափ գուգամիտության գաղափարը: Առաջարկել է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման իտերացիոն մեթոդը (*Չեյդելի մեթոդ*): Կատարել է նաև հետազոտություններ շրթայական կոտորակների տեսության, երկնային մեխանիկայի և հավանականությունների տեսության բնագավառներում:



Էյլեր Լեոնարդ  
(1707-1783)

Euler Leonard

Շվեյցարացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ, ֆիզիկոս և աստղագետ: 1726-1741-ին և 1766-ից՝ Պետերբուրգի ԳԱ անդամ, 1742-1766-ին՝ Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան պատվավոր անդամ: Փարիզի ԳԱ, Բեռլինի ԳԱ և Լոնդոնի թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Բազելում, պաստորի ընտանիքում: 1724-ին ավարտել է Բազելի համալսարանը: 1726-ին հրավիրվել է Պետերբուրգի ԳԱ: 1726-ից՝ բնախոսության, ավելի ուշ՝ մաթեմատիկայի

աղյուցակ: 1731-1741-ին՝ սկզբից ֆիզիկայի և տեսական մեխանիկայի, այնուհետև՝ մաթեմատիկայի պրոֆեսոր: 1741-ին տեղափոխվել է Բեռլին, որտեղ ապրել է 25 տարի: 1744-ից՝ Բեռլինի ԳԱ Մաթեմատիկական դասարանի տնօրեն: 1766-ին վերադարձել է Պետերբուրգ: Շուտով համարյա ամբողջովին կորցնում է տեսողությունը, բայց շարունակում է աշխատել:

Էյլերի գիտական հետաքրքրությունների շրջանակը ընդգրկում էր իր ժամանակի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի բոլոր բաժինները: 1727-1741-ին գրել է ավելի քան 80 աշխատանք նվիրված վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ հավասարումներին, աստիճանային շարքերին, հատուկ ֆունկցիաներին, դիֆերենցիալ երկրաչափությանը, թվերի տեսությանը, հիդրոդինամիկային, երկնային մեխանիկային, օպտիկային և այլն: Նշանակալի են Էյլերի հետազոտությունները երկնային մեխանիկայում: Նրա տեսական արդյունքները հիմք են ծառայել Լուսնի շարժման աղյուսակների ստեղծման համար: Ջրադվել է նաև կիրառական խնդիրներով. հիմնադրել է տուրքինների տեսությունը, ներդրում կատարել նյութերի դիմադրության տեսության և օպտիկական տեխնիկայի մեջ: Էյլերի գիտական աշխատությունների ցուցակը պարունակում է 850-ից ավելի անվանում:



Էյտկեն Ալեքսանդր Քրեյգ  
(1895-1967)

Aitken Alexander Craig

Նորգելանդացի և անգլիացի մաթեմատիկոս: Էդինբուրգի և Լոնդոնի թագավորական ընկերությունների անդամ: Նոր Զելանդիայի թագավորական ընկերության պատվավոր անդամ:

Ծնվել է Գանդիլինում: 1912-ին հաջողությամբ ավարտել է Օտագոյի (Նոր Զելանդիայի մարզ) դպրոցը: 1913-1918-ին սովորել է (ընդհատումներով) Օտագոյի համալսարանում: Նրա ուսումը ընդհատվեց Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին: Մասնակցել է դեսանտի իջեցմանը Գալլիպոլիում (Իտալիա) և Սոմի (Ֆրանսիա) ճակատամարտին: Համալսարանն ավարտելուց հետո դասավանդել է Օտագոյի միջնակարգ դպրոցում (1920-1923): 1923-ին տեղափոխվել է Շոտլանդիա, ուր և ապրեց կյանքի մնացած տարիները: Սովորել է Էդինբուրգի համալսարանում: 1925-ին տվյալների հարթեցմանը նվիրված աշխատանքի համար նրան շնորհվեց դոկտորի աստիճան: Նույն տարում սկսեց կարգալ վիճակագրության և մաթեմատիկական տնտեսագիտության դասախոսություններ Էդինբուրգի համալսարանում: 1946-ին ղեկավարել է Էդինբուրգի համալսարանի մաթեմատիկական ամբիոնը:

Էյտկենի գիտական հետաքրքրությունների ոլորտն եղել է գծային հանրահաշիվը, մաթեմատիկական վիճակագրությունը, ակտուար մաթեմատիկան, հաշվողական մաթեմատիկան, Էկոնոմետրիկան: Ունի աշխատանքներ նվիրված սիմետրիկ խմբերին, ոչ գծային հավասարումների լուծմանը, սեփական արժեքների խնդրին: Հաշվողական մաթեմատիկայում լավ հայտնի են հաջորդականության գուգամիտության արագացման *Էյտկենի  $\Delta^2$ -պրոցեսը* և *Էյտկենի ինտերպոլացիոն սխեման*: Բազմակողմանի զարգացած անձնավորություն էր: Ուներ բանավոր հաշվելու զարմանալի ընդունակություններ: Ջրադվում էր գրական գործունեությամբ, գրում էր բանաստեղծություններ:



Էվկլիդես  
(IV-III դ. մ.թ.ա.)

Euclid

Հին հույն մաթեմատիկոս: Ծնվել է ապրել է ենթադրաբար Ալեքսանդրիայում:

Գլխավոր աշխատանքն է *«Սկզբունքները»* (13 գրքով), որը պարունակում է՝ հարթաչափություն, տարածաչափություն և թվերի տեսության մի շարք հարցեր: Էվկլիդեսը հանրագումարի է բերել «հունական մաթեմատիկական» և հիմք ստեղծել մաթեմատիկայի հետագա զարգացման համար: Լավ հայտնի է *Էվկլիդեսի այգորիթմը*՝ երկու ամբողջ թվի կամ երկու բազմանդամի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու մեթոդը: *«Սկզբունքները»* հայերենի է թարգմանել Անանիա Շիրակացին (VII դ.), որից մեզ հասել են միայն հատվածներ: Էվկլիդեսն ունի նաև աշխատանքներ աստղագիտության, օպտիկայի և երաժշտության վերաբերյալ:



Թեյլոր Բրուկ  
(1685-1731)

Taylor Brook

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1712):

Ծնվել է Էդմոնթոնում: 1709-ին ավարտել է Քեմբրիջի համալսարանը: 1714-1718-ին եղել է Լոնդոնի Թագավորական ընկերության մշտական քարտուղար:

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, մեխանիկային և բալիստիկային: Հետագոտել է ֆունկցիաների վերլուծումը աստիճանային շարքերի (*Թեյլորի բանաձև*, *Թեյլորի շարք*): Կյանքի վերջին տարիներին հիմնականում զբաղվում էր փիլիսոփայության և կրոնի հարցերով:



Ժորդան Մարի Էնըմոն Զամիլ  
(1838-1922)

Jordan Marie Ennemond Camille

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1881), 1916-ին՝ նրա պրեզիդենտը: Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1895):

Ծնվել է Լիոնում: Ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական (1859) և Լեռնային (1861) դպրոցները: 1861-1873-ին աշխատել է որպես ճարտարագետ: 1873-ից դասավանդել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցում (1876-ից՝ պրոֆեսոր):

Ժողովանի աշխատանքները վերաբերում են հանրահաշվին, ֆունկցիաների տեսությանը, տոպոլոգիային, բյուրեղագիտությանը: Նրա անվան հետ են կապված խմբերի կոմպոզիցիոն շարքերի վերաբերյալ *Ժորդան-Հյորդերի թեորեմը*, մատրիցների նորմալ՝ *Ժորդանյան ձև*, *Ժորդանյան կոր* և այլ հասկացությունները:



Լագրանժ Ժոզեֆ Լուի  
(1736-1813)

Lagrange Joseph Louis

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և մեխանիկ: Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1772): 1859-ից՝ Բեռլինի ԳԱ անդամ (1766-1787-ին՝ ակադեմիայի արեզիդենտ): Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1776): Փարիզի ԳԱ մրցանակակիր (1764-ին՝ Լուսնի լիբրացիայի տեսության համար, 1766-ին՝ Յուպիտերի արբանյակների շարժման տեսության համար):

Ծնվել է Թուրինում (Իտալիա), աղքատացած պետական ծառայողի ընտանիքում: Սովորել է Թուրինի համալսարանում, ուսանել է լատինական գրականություն, այնուհետև՝ երկրաչափություն: 1753-ից սկսել է դասավանդել Թուրինի հրետանային դպրոցում (1754-ից՝ պրոֆեսոր): 1787-ին տեղափոխվել է Ֆրանսիա: 1795-ից՝ Բարձրագույն նորմալ դպրոցի, իսկ 1797-ից՝ Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր:

Առավել կարևոր աշխատանքները վերաբերում են վարիացիոն հաշվին, անալիտիկ և տեսական մեխանիկային: Հիմնվելով Լ. Էյլերի արդյունքների վրա՝ մշակել է վարիացիոն հաշվի հիմնական հասկացությունները, առաջարկել է վարիացիոն խնդիրների լուծման ընդհանուր անալիտիկ մեթոդ: Լագրանժին են պատկանում մեծարժեք արդյունքներ մաթեմատիկական անալիզում (Թեյլորի շարքի մնացորդային անդամի բանաձևը, միջին արժեքի թեորեմը և այլն), պայմանական էքստրեմումների տեսությունում (*Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդը*) և ֆունկցիաների մոտարկման տեսության մեջ (*Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը*):



Լայբնից Գոթֆրիդ Վիլհելմ  
(1646-1716)

Leibniz Gottfried Wilhelm

Գերմանացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, փիլիսոփա, հանրագիտակ և հասարակական գործիչ: Բեռլինի ԳԱ հիմնադիրն է և առաջին արեզիդենտը (1700): Եղել է Փարիզի ԳԱ (1700) և Լոնդոնի թագավորական ընկերության (1673) անդամ:

Ծնվել է Լայպցիգում: Ուսումնասիրել է փիլիսոփայություն և իրավունք Լայպցիգի համալսարանում (1661-1666), մաթեմատիկա Ենայի համալսարանում (1663): 1672-1676-ին դիվանագիտական հանձնարարություններով եղել է Փարիզում և Լոնդոնում, ուր միաժամանակ զբաղվել է գիտական աշխատանքով և դասավանդմամբ: 1676-1716-ին ծառայել է Հաննովերի դուքսի մոտ՝ նախ որպես գրադարանավար, պատմագիր, ապա նաև արտաքին գործերով քաղաքական խորհրդական: Նպաստել է Լայպցիգի, Վիեննայի և Պետերբուրգի ակադեմիաների ստեղծմանը:

Հիմնական մաթեմատիկական աշխատանքները նվիրված են դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ստեղծմանը: Մասնակի և անջատ մեթոդները Լայբնիցը միաբերել է մաթեմատիկական անալիզի հասկացությունների փոխկապակցված միասնական համակարգի: Տվել է *դիֆերենցիալի* և *ինտեգրալի* սահմանումները, ներմուծել է դիֆերենցիալի (*d*) և ինտեգրալի (*∫*) նշանակումները, արտածել է գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի, աստիճանի, բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման օրենքները: Բացահայտել է անալիզի հիմնական հասկացությունների՝ դիֆերենցման և ինտեգրման փոխհակադարձ բնույթը: Առաջարկել է համընդհանուր օգտագործում ստացած տերմինները՝ *ֆունկցիա*, *դիֆերենցիալ հավասարում*, *ալգորիթմ*, *աբսոլյուտ*, *օրդինատ* և այլն: Նյուտոնից անկախ ստեղծել է մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները: Հետագայում նրանց միջև երկարատև վիճաբանություն է ծավալվել առաջնության հարցի շուրջը: Ջբաղվել է տեխնիկական հարցերով՝ առաջարկել է գլանի և միտքի գաղափարը, կատարելագործել Պասկալի հաշվիչ մեքենան և այլն: Փիլիսոփայության մեջ Լայբնիցը ձգտել է կեցության էությունը բացահայտել սուբստանցիայի մասին ուսմունքի ձևով: Ի տարբերություն XVII դ. մեխանիստական պատկերացումների, փորձում էր բնության բազմազանությունը մեկնաբանել դինամիկ հիմքերով: Լեզվաբանության բնագավառում հանդես է եկել լեզուների ծագման վերաբերյալ աստվածաշնչյան առասպելի դեմ, նշել մի շարք լեզուների պատմական ընդհանրությունը: Հետաքրքրվել է հայոց լեզվի հետ այլ լեզուների ունեցած փոխհարաբերության հարցով, խրախուսել հայագիտական աշխատանքները: Կապեր է ունեցել Ամստերդամում գործող հայ տպագրիչների հետ (Գուկաս Վանանդեցի և ուրիշներ): Լայբնիցի այլ աշխատանքներ վերաբերում են իրավունքին, կենսաբանությանը, քաղաքականությանը, մանկավարժությանը և այլն:



Լապլաս Պիեռ Սիմոն  
(1749-1827)

Laplace Pierre Simon

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, աստղագետ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ (1783) և Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի (1795) անդամ: Պետերբուրգի ԳԱ անդամ (1802):

Ծնվել է Բոմոն-ան-Օժում (Նորմանդիա), գյուղացու ընտանիքում: Ստացել է աստվածաբանական կրթություն՝ ավարտելով բենեդիկտյան վանականի թի միաբանության դպրոցը: Ուներ հիանալի հիշողություն, ինչի շնորհիվ արագ տիրապետել է մի քանի լեզուների: Գրսեղրել է մեծ ընդունակություններ մաթեմատիկայի, աստղագիտության, գրականության

և արվեստի ուսումնասիրման մեջ: 1766-ին տեղափոխվել է Փարիզ, որտեղ ստացել է Թագավորական հրետանային դպրոցի պրոֆեսորի պաշտոնը: Ֆրանսիական Մեծ հեղափոխությունից հետո մասնակցել է Ֆրանսիայի կրթության վերակազմակերպման, ինչպես նաև Բարձրագույն նորմալ և Պոլիտեխնիկական դպրոցների ստեղծման աշխատանքներին: 1790-ին դարձել է Փարիզի Չափերի և Կշիռների հանձնաժողովի նախագահ: Ղեկավարել է նոր մետրական համակարգի ներդրման աշխատանքը: 1795-ին եղել է Երկայնությունների բյուրոյի ղեկավարության կազմում: Քաղաքական ըմբռնումներով անկայուն էր: Յուրաքանչյուր քաղաքական հեղաշրջման դեպքում նա անցնում էր հաղթողների կողմը՝ նախ հանրապետական էր, Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության օրոք՝ ներքին գործերի նախարար, ապա սենատի անդամ և փոխնախագահ, կայսրության դուքս: Այնուհետև միացել է Նապոլեոնի հակառակորդներին, ստորագրելով նրա աքսորման դեկրետը: Բուրբոնների իշխանության վերականգնումից հետո ստացել է մարկիզի տիտղոս:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկային, երկնային մեխանիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հավանականությունների տեսության ստեղծողներից մեկն է: Համակարգել և կատարելագործել է իրենից առաջ գոյություն ունեցող մեթոդները և տեսությունները: Ապացուցել է հավանականությունների բաշխման երկանդամային օրենքը: Իր ստեղծած տեսությունում կիրառել է ինտեգրալ ձևափոխություն, որը հայտնի է որպես *Լապլասի ձևափոխություն*: Հանրահաշվում ապացուցել է որոշիչը լրացուցիչ միևնույնի արտադրյալների գումարի տեսքով ներկայացման մասին թեորեմը (*Լապլասի թեորեմ*): Չարգացրել է սխալանքների տեսությունը և փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Լապլասի կարևորագույն գիտական աշխատանքը նրա հինգհատորյա «*Երկնային մեխանիկա*»-ն է (1798-1825), որում ավարտված է երկնային մեխանիկայի ստեղծումը՝ հիմնված Նյուտոնի տիեզերական ձգողության օրենքի հիման վրա: Այդ հիմնավոր մենագրության մեջ Լապլասը շարադրել է ոչ միայն սեփական արդյունքները, այլև հանրագումարի է բերել իր նախորդների՝ Նյուտոնի, Գ.Վալմերի, Էյլերի, Լագրանժի և ուրիշների հետազոտությունները:



Լեժանդր Ադրիեն Մարի  
(1752-1833)

Legendre Adrien Marie

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1783), Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի անդամ (1797):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Փարիզի Մագարինի Կոլեժը (1774): 1775-1780-ին՝ Փարիզի գինվորական դպրոցի պրոֆեսոր, 1816-ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր: 1813-1833-ին՝ Երկայնությունների բյուրոյի անդամ:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական անալիզին, թվերի տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, երկնային մեխանիկային: Մաթեմատիկական անալիզի բնագավառում ներմուծել է բազմաթիվ կիրառություններ ունեցող *Լեժանդրի բազմանդամները*: Իր աշխատանքներով նպաստել է թվերի տեսության զարգացմանը: Չնակերպվել է պարզ թվերի



բաշխման օրենքը, տվել է իր ժամանակի թվերի տեսության ամբողջական շարադրանքը: Վարիացիոն հաշվում ձևակերպել է էքստրեմումի գոյության հայտանիշը: Հիմնավորել և զարգացրել է գեոդեզիական չափումների տեսությունը, Կ. Գաուսից անկախ մշակել է *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը*: Աստղագետներ Ժ. Գ. Կասինի և Պ. Ֆ. Մեշենի հետ միասին գտել է Փարիզի և Գրինվիչի աստղադիտարանների երկայնությունների տարբերությունը (1787): Մետրը որպես երկարության միավոր սահմանելու համար կատարել է Բարսելոնի (Իսպանիա) և Դյունկերքի (Ֆրանսիա) միջև միջօրեականի աղեղի երկարության բոլոր հաշվարկների ստուգումը:



Լիպշից Ռուդոլֆ Օտտո Սիգիզմունդ  
(1832-1903)

Lipschitz Rudolf Otto Sigismund

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1872), մի շարք ակադեմիաների և գիտական ընկերությունների անդամ:

Ծնվել է Բյունիգսբերգում: 1853-ին ավարտել է Բեռլինի համալսարանը: Բրեսլաուի (այժմ Վրոցլավ, Լեհաստան) համալսարանի պրոֆեսոր (1862): 1864-ից՝ Բոննի համալսարանի պրոֆեսոր, 1874-1875-ին՝ այդ համալսարանի ռեկտոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին, թվերի տեսությանը, քառակուսային ձևերի տեսությանը: Աշխատել է նաև հանրահաշվի, հիդրոդինամիկայի և վերլուծական մեխանիկայի բնագավառներում: Նրան է պատկանում դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության պայմանների վերաբերյալ թեորեմի ձևակերպումը՝ *Կոշի-Լիպշիցի թեորեմը*:



Լոտկա Ալֆրեդ Ջեյմս  
(1880-1949)

Lotka Alfred James

Ամերիկացի քիմիկոս, կենսաբան, դեմոգրաֆ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Լեմբերգում (այժմ Լվով, Ուկրաինա): 1902-ին արտագաղթել է ԱՄՆ:

Հայտնի է որպես գոհ-գիշատիչ մաթեմատիկական մոդելի հեղինակ, որը նա առաջարկել է 1925-ին Վոլտերայից անկախ (*Լոտկա-Վոլտերայի մոդելը*): Այս մոդելը հիմք էր դարձել բոլոր հետագա պոպուլյացիաների դինամիկան նկարագրող մոդելների համար: Հետագայում Լոտկան թողել է ակադեմիական գիտությունը և աշխատել է ապահովագրական ընկերակցությունում:



Խոլեսկի Անդրե Լուի  
(1875-1918)

Cholesky Andre Louis

Ֆրանսիացի սպա և գեոդեզիստ:

Ծնվել է Շարանտ դեպարտամենտում (Ֆրանսիա) ենթադրաբար լեհ (ռո՞ւս) վտարանդների ընտանիքում: 1895-ին ընդունվել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը: Այն ավարտելուց հետո անցել է հրետանու զինվորական ծառայության: Աշխատել է Ֆրանսիական Աշխարհագրական ծառայության գեոդեզիայի բաժնում: 1906-ից մինչև Առաջին համաշխարհային պատերազմի սկիզբը մասնակցել է գեոդեզիական և տոպոգրաֆիական աշխատանքների, սկզբից Կրետե կղզում, իսկ հետո Հյուսիսային Աֆրիկայում (Ալժիր, Թունիս, Մարոկկո): 1918-ին զոհվել է ռազմաճակատում որպես մարտկոցի հրամանատար:

Չնայած գեոդեզիական ծառայությանը՝ Խոլեսկին դրսևորում էր աննախադեպ մաթեմատիկական ընդունակություններ՝ առաջարկելով յուրօրինակ գաղափարներ և լուծումներ: Նա մշակել է փոքրագույն քառակուսիների մեթոդում ստացվող նորմալ հավասարումների համակարգի լուծման մեթոդ, որը հետագայում անվանվեց նրա անունով (*Խոլեսկու մեթոդը*): Այս աշխատանքը հետմահու տպագրվեց «Գեոդեզիայի բյուլետենում» (1924) իր սպա ընկերոջ միջոցով:



Կեպլեր Յոհան  
(1571-1630)

Kepler Johann

Գերմանացի աստղագետ, մաթեմատիկոս և մեխանիկ:

Ծնվել է Վալդ-դեր-Շտատում (Վյուրտեմբերգ): Ավարտել է Տյուբինգենի համալսարանը (1593): 1594-1600-ին դասավանդել է Գրացում (Ավստրիա): Բողոքականների նկատմամբ կաթոլիկական եկեղեցու հետապնդումները Կեպլերին ստիպել են 1600-ին բողոքել Գրացը և տեղափոխվել Պրահա: 1600-ից պալատական մաթեմատիկոս Տիխո Բրահեի օգնականն էր, որի մահից հետո, 1602-ից զբաղեցրել է այդ պաշտոնը: 1626-ին, դարձյալ կրոնական հետապնդումների պատճառով, տեղափոխվել է Ուլմ (Գերմանիա): 1628-1600-ին կայսերական գեներալխիսնոս Ա. Վալենշտայնի աստղագուշակն էր:

Կեպլերի գիտական հետաքրքրությունների շրջանակը շատ լայն էր: Նա զբաղվել է աստղագիտությամբ, մաթեմատիկայով, մեխանիկայով, բյուրեղագիտությամբ: Տիխո Բրագեյի քառասունամյա դիտումների արդյունքների տեսական հիմնավորման ընթացքում հանգել է մոլորակների շարժման օրենքներին (*Կեպլերի օրենքներ*), դրանով իսկ սկիզբ է դրել երկնային մեխանիկային: 1602-ից զարգացրել է փոփոխական մեծությունների մաթեմատիկայի

մեթոդները՝ կապված աստղագիտության և երկրաչափության խնդիրների հետ: Ստացել է մի շարք պտտման մարմինների ծավալները, մասնավորապես՝ տորի և «խնձորի»: Գինու տակառների ծավալների չափմանը նվիրված աշխատությունում (1615) կիրառել է անվերջ փոքր մեծությունների միագումարման մեթոդը:



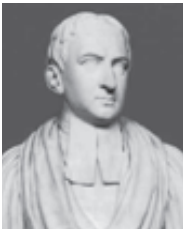
Կոշի Օգյուստեն Լուի  
(1789-1857)

Cauchy Augustin Louis

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1816), Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1831):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը (1807) և Կամուրջների ու ճանապարհների դպրոցը (1810): 1810-1813-ին որպես ճարտարագետ մասնակցել է Շերբուրի ռազմական նավահանգստի կառուցմանը: 1816-ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր, 1816-1830-ին՝ Սորբոնի, իսկ 1848-1857-ին՝ Կոլեժ դը Ֆրանսի պրոֆեսոր: Քաղաքական համոզմունքներով ծայրահեղ ժոյալիստ էր, Բուրբոնների կողմնակից:

Կոշիի աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական ֆիզիկայի տարբեր բնագավառներին: Մաթեմատիկական անալիզի նրա դասընթացները, հիմնված սահմանի հասկացության համակարգված օգտագործման վրա, բարձրակարգ դասավանդման օրինակ են ծառայել այլ դասախոսների համար: Դրանցում Կոշին տվել է ֆունկցիայի անընդհատության գաղափարի սահմանումը, զուգամետ շարքերի տեսության հստակ կառուցումը, ինտեգրալի սահմանումը որպես գումարների սահման և այլն: Չարգացրել է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությունը, տվել անալիտիկ ֆունկցիայի ինտեգրալային տեսքը (*Կոշիի ինտեգրալ*): Մշակել է մնացքների տեսությունը: Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության բնագավառում նրան են պատկանում իր անունը կրող *Կոշիի խնդրի* ձևակերպումը, առաջին կարգի մասնական ածանցյալներով հավասարումների ինտեգրման մեթոդը և լուծման գոյության հիմնական թեորեմները: Աշխատանքներ ունի նաև առաձգականության տեսության, օպտիկայի, երկրաչափության, թվերի տեսության և հանրահաշվի վերաբերյալ:



Կոտս Ռոջեր  
(1682-1716)

Cotes Roger

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1711):

Ծնվել է Բեքբեյջում: Սովորել է Լոնդոնում, այնուհետև՝ Քեմբրիջի համալսարանի Տրինիտի քոլեջում (1702): Ի. Նյուտոնի աշակերտն էր: 1706-ից՝ Քեմբրիջի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են սխալանքների տեսությանը, որը հետագայում օգտագործել է Պ. Լասպլասը հավանականությունների տեսության և ֆունկցիաների տեսության գաղափարների զարգացման ընթացքում: Ջրադվել է նաև ռացիոնալ հանրահաշվական ֆունկցիաների ինտեգրման հարցերով: Նրան են պատկանում  $x^n - 1 = 0$  տեսքի հավասարման արմատների վերաբերյալ թեորեմը, առնչություններ եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների միջև, դիֆերենցիալ երկրաչափության որոշ բանաձևեր:



Կռանկ Ջոն  
(1916-2006)

Crank John

Անգլիացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Հինդլիում: 1934-1938-ին սովորել է Մանչեստրի համալսարանում: Երկրորդ համաշխարհային պատերազմի տարիներին զբաղվել է հետազոտություններով բալիստիկայի բնագավառում: 1945-1957-ին աշխատել է գիտահետազոտական լաբորատորիայում: 1957-1981-ին՝ Բրյուսելի համալսարանի մաթեմատիկայի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների, մասնավորապես՝ ջերմահաղորդականության հավասարման թվային լուծման մեթոդներին: Նրա աշխատանքները նպաստել են պարաբոլական հավասարումների լուծման տարբերական մեթոդների զարգացմանը: Իր գիտական գործունեությունում Ջ. Կռանկը սերտորեն համագործակցել է ֆ. Նիկոլսոնի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեթոդը՝ *Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման*, պարաբոլական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:



Կրամեր Գաբրիել  
(1704-1752)

Cramer Gabriel

Շվեյցարացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել և ստացել է կրթություն Ժնևում: 1724-ից դասավանդել է մաթեմատիկա Ժնևի կալվինիստական ակադեմիայում (1734-ից՝ մաթեմատիկայի, իսկ 1750-ից՝ փիլիսոփայության պրոֆեսոր):

Հետազոտությունների հիմնական ուղղություններն են՝ երկրաչափություն և հավանականությունների տեսություն: Ստացել է գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման բանաձևերը (*Կրամերի կանոնը*): Հիմք է դրել որոշիչների տեսությանը:



Կրոնեկեր Լեոպոլդ  
(1823-1891)

Kronecker Leopold

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1861), Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1872):

Ծնվել է Լեզնիցում (Լեհաստան): Ավարտել է Բեռլինի համալսարանը (1845): 1861-ից դասավանդել է Բեռլինի համալսարանում (1883-ից՝ պրոֆեսոր):

Աշխատանքները վերաբերում են թվերի տեսությանը, քառակուսային ձևերին, խմբերի տեսությանը, էլիպտական ֆունկցիաներին: Կատարելագործել է համրանքի տեխնիկան, այդ նպատակով ներմուծել է մի շարք սիմվոլներ, մասնավորապես՝ *δ<sub>ij</sub>* *Կրոնեկերի սիմվոլը*: Կրոնեկերը մաթեմատիկայի թվաբանացման կողմնակիցն էր. նա համարում էր, որ մաթեմատիկան կարելի է հանգեցնել ամբողջ թվերի թվաբանությանը:



Կուտա Մարտին Վիլհելմ  
(1867-1944)

Kutta Martin Wilhelm

Գերմանացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վերին Սիլեզիայում (այժմ Լեհաստանի կազմում է): 1885-1890-ին սովորել է Բրեսլաու քաղաքում (այժմ Վրոցլավ, Լեհաստան): Շարունակել է ուսումը Մյունխենի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցում (1891-1894): Դասավանդել է Ենայում և Աախենում: 1911-1935-ին՝ Շտուտգարտի Բարձրագույն տեխնոլոգիական դպրոցի պրոֆեսոր:

Մաթեմատիկայում կատարելագործել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների Կոշիի խնդրի թվային լուծման Կ. Ռունգեի մեթոդը (*Ռունգե-Կուտայի մեթոդ*):



Հալլեյ Էդմունդ  
(1656-1742)

Halley Edmund

Անգլիացի աստղագետ, գեոֆիզիկոս և մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1678):

Ծնվել է Լոնդոնում, հարուստ արդյունաբերողի ընտանիքում: Սովորել է Օքսֆորդի համալսարանում, 1703 -ից՝ այդ համալսարանի պրոֆեսոր: 1720 -ին նշանակվել է Գրինվիչի աստղադիտարանի տնօրեն:

1676-1678 -ին, գտնվելով Սբ. Հեղինեյի կղզում՝ կազմել է հարավային կիսագնդի 341 աստղերի առաջին համացուցակը: 1682 -ին հայտնաբերել է առաջին պարբերական գիսաստղը (*Հալլեյի գիսաստղ*), նախագուշակել է նրա նոր հայտնվելը 1758 -ին և հետագայում՝ 76 տարի պարբերությամբ: Ի. Նյուտոնի մտերիմ բարեկամ էր, սեփական միջոցներով հրատարակել է նրա «*Բնագիտականության մաթեմատիկական սկզբունքները*»: Հիմնական մաթեմատիկական հետազոտությունները նվիրված են հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը:



Հերմիտ Շառլ  
(1822-1901)

Hermite Charles

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի Գ-Ա անդամ (1856):

Ծնվել է Դեեզեում (Լոթարինգիա): 1845 -ին ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը: 1848-1869 -ին՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի դասուսույց, իսկ 1869-1876 -ին՝ պրոֆեսոր: 1869-1897 -ին՝ Փարիզյան գիտությունների ֆակուլտետի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, էլիպտական ֆունկցիաների տեսությանը և նրա կիրառումներին, հանրահաշվին և թվերի տեսությանը: Հետազոտել է օրթոգոնալ բազմանդամների իր անունը կրող դասը (*Հերմիտի բազմանդամներ*) և շատ փոփոխականների բազմանդամների համանման դասը: Մշակել է հանրահաշվական ձևերի և նրանց ինվարիանտների տեսությունը, ներմուծել է հատուկ երկգծային ձևեր (*Հերմիտի ձևեր*): Ապացուցել է  $e$  թվի տրանսցենդենտությունը:



Հերոն Ալեքսանդրիացի  
( I դ.)

Heron of Alexandria

Հին հույն մեխանիկ և ճարտարագետ: Ապրել և աշխատել է Ալեքսանդրիայում:

Համակարգված շարադրել է անտիկ աշխարհի մեխանիկայի և մաթեմատիկայի նվաճումները: Հայտնագործել է մի շարք մեխանիզմներ և սարքավորումներ: Տվել է տարբեր երկրաչափական պատկերների ճշգրիտ և մոտավոր հաշվարկման կանոնները, օրինակ, եռանկյան մակերեսը իր երեք կողմով հաշվելու՝ այսպես կոչված *Հերոնի բանաձևը*:

Հետագոտել է նաև քառակուսի հավասարման լուծման հարցը, քառակուսի և խորանարդ արմատներ հանելու խնդիրը:



Հիլբերտ Դավիդ  
(1862-1943)

Hilbert David

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ թղթակից անդամ (1913), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1934, թղթակից անդամ 1922 -ից):

Ծնվել է Վեսլաու քաղաքում (Քյոնիգսբերգի մոտ): 1884 -ին ավարտել է Քյոնիգսբերգի համալսարանը: 1893-1895 -ին՝ Քյոնիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր: Այնուհետև 1895-1943 -ին՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկայի հիմունքներին, մաթեմատիկական տրամաբանությանը, թվերի տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումներին, մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հիլբերտի «*Երկրաչափության հիմունքներ*» (1899) մենագրությունը մեծապես խթանեց երկրաչափության արսիտմատիկ կառուցման հետագա աշխատանքները: Նրա անունն է կրում է վկլիդյան տարածության ընդհանրացումը անվերջ չափանի դեպքի համար (*հիլբերտյան տարածություն*): 1910-1922 -ին հիմնականում զբաղվել է մաթեմատիկական ֆիզիկայի մեթոդների մշակմամբ: Ռ. Կուրանտի հետ համահեղինակությամբ հրատարակել է «*Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*» (1924) մենագրությունը: Ստացել է կարևոր արդյունքներ մաթեմատիկայի հիմունքների բնագավառում: Ի. Բեռնայսի հետ համատեղ գրել է «*Մաթեմատիկայի հիմունքներ*» (1934) աշխատանքը: Հիլբերտի հետազոտությունները նպաստել են մաթեմատիկայի բազմաթիվ բաժինների զարգացմանը: Գյոթինգենում նա հիմնել է խոշոր մաթեմատիկական կենտրոն: Մի քանի տարի "Mathematische Annalen" ամսագրի խմբագիրն էր: Երկրորդ Միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում, որը կայացել է Փարիզում 1900 -ին, իր զեկուցման մեջ ձևակերպել է 22 կարևորագույն խնդիրներ (*Հիլբերտի պրոբլեմներ*), որոնք կանխորոշեցին 20 -րդ դարի մաթեմատիկայի զարգացման հիմնական ուղղությունները:



Հյոլդեր Լյուդվիգ Օտտո  
(1859-1937)

Hölder Ludwig Otto

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Մաքսնիսի ԳԱ անդամ:

Ծնվել է Շտուտգարտում: Մովորել է Շտուտգարտի, Բեռլինի և Տյուբինգենի համալսարաններում: 1882 -ին ավարտել է Տյուբինգենի համալսարանը: 1896 -ից եղել է Քյոնիգսբերգի,

այնուհետև՝ Լայպցիգի համալսարանների պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատանքները նվիրված են խմբերի տեսությանը, անալիտիկ ֆունկցիաներին և Ֆուրիեի շարքերին: Լավ հայտնի է *Հյուրերի անհավասարությունը*:



Հոյն Կարլ Լյուդվիգ Վիլհելմ  
(1859-1929)

Heun Karl

Գերմանացի մեխանիկ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վիսբադենում: Սովորել է Գյոթինգենի (1878-1880), Հալլեի (1880-1881) և Բեռլինի (1881-1882) համալսարաններում: 1886-1902-ին աշխատում էր Մյունխենի համալսարանում: 1902-1921-ին՝ Կարլսրուեի Պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր, 1921-ից՝ Բեռլին-Շառլոտենբերգի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի ճարտարագետ-դոկտոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին, ֆունկցիաների տեսությանը, տեսական կինեմատիկային: Մի շարք աշխատանքներ նվիրված են Լամեի ֆունկցիաների տեսությանը և վեկտորական հաշվին:



Յակոբի Կարլ Գուստավ Յակոբ  
(1804-1851)

Jacobi Carl Gustav Jacob

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ (1836) անդամ, Փարիզի ԳԱ թղթակից անդամ (1830), Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1833, 1830-ից՝ թղթակից անդամ): Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1832): Փարիզի ԳԱ մրցանակակիրն է՝ էլիպտիկական ֆունկցիաների տեսության ստեղծման համար (1830, համատեղ Ն.Հ. Աբելի հետ):

Ծնվել է Պոտսդամում: Ավարտելով Բեռլինի համալսարանը, 1825-1829-ին աշխատել է նույն համալսարանում: 1829-1835-ին՝ Բյունիզբերգի համալսարանի պրոֆեսոր: 1836-ից ապրել է Բեռլինում, զբաղվել է գիտական աշխատանքով:

Հետազոտությունները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, թվերի տեսությանը, գծային հանրահաշվին, դիֆերենցիալ հավասարումներին և մեխանիկային: Մշակել է դինամիկայի դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրման ընդհանուր տեսությունը: Օգտագործելով այդ տեսությունը լուծել է անալիտիկ և երկնային մեխանիկայի մի շարք խնդիրներ: Սահմանել է ֆունկցիոնալ որոշիչի գաղափարը (*յակոբիան*): Ներմուծել և ուսումնասիրել է օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը (*Յակոբիի բազմանդամներ*):





Նեյման Ջոն (Յանոշ) ֆոն  
(1903-1957)

Neumann John (Janos) von

Ամերիկացի մաթեմատիկոս, ազգությամբ հունգար: ԱՄՆ-ի ազգային ԳԱ անդամ (1937): Ամերիկյան մաթեմատիկական ընկերության պրեզիդենտ (1951-1952): Ա. Էյնշտեյնի անվ. (1956) և Է. Ֆերմիի անվ. (1957) մրցանակների դափնեկիր:

Ծնվել է Բուդապեշտում (Հունգարիա): 1921-1923-ին սովորել է Բեռլինի համալսարանում, 1923-1925-ին՝ Յյուրիխի բարձրագույն պոլիտեխնիկական դպրոցում (Շվեյցարիա): 1926-ին ավարտել է Բուդապեշտի համալսարանը, ստանալով դոկտորի կոչում: Գասավանդել է Բեռլինի (1926-1929), Համբուրգի (1929-1930) և Պրինստոնի (ԱՄՆ) (1930-1933) համալսարաններում: 1933-ից՝ Պրինստոնի հեռակարային հետազոտությունների ինստիտուտի պրոֆեսոր, 1940-ից՝ բանակային և ծովային տարբեր հաստատությունների խորհրդական: Մասնակցել է առաջին առումային ռումբի ստեղծման աշխատանքներին: 1955-ից եղել է ԱՄՆ-ի ատոմային էներգիայի հանձնաժողովի անդամ: Մեծ ավանդ ունի առաջին ԷՀՄ-երի ստեղծման և օգտագործման գործում: 1945-1955-ին՝ ԷՀՄ-երի նախագծման բյուրոյի անդամ:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիական խմբերի տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը, հաշվողական մաթեմատիկային և տնտեսագիտության մաթեմատիկական մեթոդներին: Տարբերական սխեմաների տեսության մեջ ներմուծել է *կայունության* հասկացողությունը: Վերջին տարիներին զբաղվել է հիմնականում խաղերի տեսության և ավտոմատների տեսության հարցերով:



Նիկոլսոն Ֆիլիս  
(1917-1968)

Nickolson Philis

Անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Մաքսֆիլդում (օրիորդական ազգանունը՝ Լոկետ): 1934-1939-ին սովորել է Մանչեստրի համալսարանում, որտեղ 1946-ին ստացել է փիլիսոփայության դոկտորի գիտական աստիճանը: 1940-1945-ին Մանչեստրի համալսարանի գիտահետազոտական խմբի կազմում աշխատել է ռազմական խնդիրների վրա, զբաղվելով մագնետրոնների տեսությունով: 1945-1949-ին կատարել է գիտական հետազոտություններ Քեմբրիջում:

Ֆ. Նիկոլսոնը քաջ հայտնի է իր համատեղ գիտական աշխատանքներով Ջ. Կոանլի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեթոդը՝ *Կոանկ-Նիկոլսոնի սխեման*, պարաբոլական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:



Նյուտոն Իսահակ  
(1643-1727)

Newton Isaac

Անգլիացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, մեխանիկ և աստղագետ, ժամանակակից մեխանիկայի հիմնադիրը: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1672), 1703-ից՝ պրեզիդենտ: Փարիզի ԳԱ անդամ (1699):

Ծնվել է Վուլսթորպում: Ավարտել է Քեմբրիջի համալսարանը (1665): 1669-1701-ին դասավանդել է Քեմբրիջի համալսարանում: 1695-1698-ին՝ Լոնդոնի Գրամատատարանի տեսուչ, իսկ 1699-ից՝ տնօրեն: 1705-ին Նյուտոնին շնորհվել է ազնվականի տիտղոսը: Անգլիական խորհրդարանի անդամ: Թաղվել է անգլիական ազգային պանթեոնում՝ Վեստմինստերային աբբայությունում:

Նյուտոնը ստեղծել է մեխանիկայի և աստղագիտության տեսական հիմունքները, մշակել է (Գ. Լայբնիցից անկախ) դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը, կարևորագույն տեսական և փորձարարական աշխատանքներ կատարել օպտիկայի բնագավառում, պատրաստել է հայելային հեռադիտակը: Նյուտոնի գիտական գործունեության գագաթնակետը «*Քննափիլիսոփայության մաթեմատիկական հիմունքները*» (1687) մենագրությունն է, որտեղ նա ընդհանրացրել է իր նախորդների (Գ. Գալիլեյ, Յ. Կեպլեր, Ռ. Գեկարտ, Բ. Հյուգենս և ուրիշներ) ու իր սեփական հետազոտությունները: Նա ստեղծել է երկրային և երկնային մեխանիկայի միասնական համակարգ, որն ընկած է ամբողջ դասական ֆիզիկայի հիմքում: Այստեղ Նյուտոնը ձևակերպել է մեխանիկայի երեք հիմնական օրենքները (*Նյուտոնի օրենքներ*): Իր *տիեզերական ձգողության օրենքի* հիման վրա բացատրել է Լուսնի շարժման առանձնահատկությունները, Յուպիտերի պրեցեսիան ու սեղմումը, մակընթացությունների և տեղատվությունների երևույթները: Հետագոտել է հոծ միջավայրում մարմինների շարժումը, առաձգական միջավայրում ձայնի տարածման արագությունը, գտել տաք մարմնի հովացման օրենքը: Մեծ նշանակություն են ունեցել նաև Նյուտոնի աշխատանքները հանրահաշվի և երկրաչափության վերաբերյալ: Նրան է պատկանում հանրահաշվական հավասարումների թվային լուծման մեթոդը (*Նյուտոնի մեթոդ*):



Շմիդտ Էրհարդ  
(1876-1959)

Schmidt Erhard

Գերմանացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Դերպտում (այժմ Տարտու, Էստոնիա): Սովորել է Բեռլինի և Գյոթինգենի համալսարաններում (1901-1905): Գ. Շվարցի և Գ. Հիլբերտի աշակերտն էր: 1906-1916-ին դասա-

վանդել է Յյուրիխի, Էռլանգենի և Բրեսլաուի համալսարաններում: 1917-ից՝ Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր: 1946-1958-ին՝ ԳԳՀ-ի ԳԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի տնօրեն:

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, ինտեգրալ հավասարումներին, ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիային: Շարունակել և զարգացրել է Գ. Հիլբերտի հետազոտությունները ինտեգրալ հավասարումների բնագավառում: Էվկլիդեսի երկրաչափության լրիվ համանմանությամբ հետազոտել է հիլբերտյան տարածությունը: Հայտնի են *Հիլբերտ-Շմիդտի օպերատորը* և *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմը*:



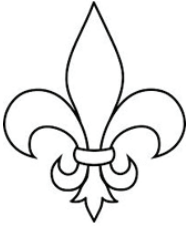
Չեբիշև Պաֆնուտի Լվովիչ  
(1821-1894)

Chebyshev Pafnuty Lvovich  
Чебышев Пафнутий Львович

Ռուս մաթեմատիկոս և մեխանիկ, Պետերբուրգի մաթեմատիկական դպրոցի հիմնադիր: Պետերբուրգի ԳԱ ակադեմիկոս (1856), Փարիզի ԳԱ արտասահմանյան անդամ (1874, 1860-ից՝ թղթակից անդամ): Բեռլինի ԳԱ (1871), Բոլոնիայի ԳԱ (1873), Լոնդոնի Թագավորական ընկերության (1877), Շվեդական ԳԱ (1893) անդամ: Մի շարք գիտական ընկերությունների և համալսարանների պատվավոր անդամ:

Ծնվել է Օկատովո գյուղում (Կալուգայի մարզ): Ավարտել է Մոսկվայի համալսարանը (1841): 1847-1882-ին դասավանդել է Պետերբուրգի համալսարանում (1850-ից՝ պրոֆեսոր):

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, հավանականությունների տեսությանը, թվերի տեսությանը, մեքենաների և մեխանիզմների տեսությանը ու այլ հարակից բնագավառներին: Մաթեմատիկական անալիզի բնագավառում հետազոտել է հանրահաշվական ֆունկցիաների ինտեգրման հարցերը, կառուցել է օրթոգոնալ բազմանդամների ընդհանուր տեսությունը, ստացել մոտավոր ինտեգրման բանաձևեր: Չեբիշևը ֆունկցիաների կոնստրուկտիվ տեսության հիմնադիրներից է. կառուցել է հանրահաշվական և եռանկյունաչափական բազմանդամներով լավագույն հավասարաչափ և քառակուսային մոտարկումների տեսությունը: *Չեբիշևի բազմանդամները* ունեն բազմաթիվ կիրառություններ մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում: Հավանականությունների տեսության մեջ Չեբիշևի հիմնական վաստակը՝ պատահական մեծությունների համակարգված ուսումնասիրումն է: Նա ապացուցել է կենտրոնական սահմանային թեորեմը և առաջարկել է մեծ թվերի օրենքի ընդհանուր ապացույցը: Մեքենաների և մեխանիզմների տեսության մեջ Չեբիշևի աշխատանքները վերաբերում են հոդակապային մեխանիզմների սինթեզին: Չեբիշևի աշխատանքները դեռևս նրա կենդանության օրոք լայն ճանաչում են ստացել Ռուսաստանում և այլ երկրներում: 1944-ին ՍՍՀՄ ԳԱ սահմանել է Չեբիշևի անվան մեդալ ու մրցանակ՝ լավագույն հետազոտությունների համար մաթեմատիկայի բնագավառում և մրցանակ՝ լավագույն հետազոտությունների համար մեքենաների և մեխանիզմների տեսության մեջ:



Պարսևալ Մարկ Անտուան  
(1755-1836)

Parseval Marc Antoine

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Ռոզիեր-ո-Սալինում հարուստ ազնվականի ընտանիքում: Իր քաղաքական համոզմունքներով միապետական էր: 1792-1793 -ին, որպես Լյուդովիկոս XVI-ի կողմնակից, գտնվում էր բանտում: Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության հասնելուց հետո (1804), իր քաղաքական բանաստեղծությունների համար, հետապնդումների ենթարկվեց և ստիպված էր հեռանալ Ֆրանսիայից: Հետագայում վերադարձել է Փարիզ: Չնայած հինգ անգամ առաջադրվել է Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1796, 1799, 1802, 1813 և 1828), բայց ոչ մի անգամ չի ընտրվել:

Գիտական աշխատությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությանը, որտեղ հայտնի է Ֆուրիեի շարքերի կոնտեքստում դիտարկվող *Պարսևալի հավասարությունը*:



Պիկար Շառլ Էմիլ  
(1856-1941)

Picard Charles Emile

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1889), նրա պրեզիդենտը 1910 -ին: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1909), Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1924): Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1895), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1925):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Բարձրագույն նորմալ դպրոցը (1877): 1878-1879 -ին դասավանդել է Փարիզի, իսկ 1879-1881 -ին՝ Թուլուզի համալսարաններում: Այնուհետև 1881-1941 -ին դասավանդել է Սորբոնում (1886 -ից՝ պրոֆեսոր), 1893 -ից՝ արվեստների և արհեստների կենտրոնական դպրոցում: 1917 -ից՝ Փարիզի ԳԱ մաթեմատիկական գիտությունների բաժնի մշտական քարտուղար:

Հիմնական գիտական աշխատանքները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, դիֆերենցիալ հավասարումներին, անվերջ խմբերի տեսությանը: Կառուցել է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը՝ համամասն հանրահաշվական հավասարումների Գալուայի տեսությանը: Չարգացրել է հաջորդական մոտարկումների մեթոդը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար (*Պիկարի մեթոդ*): Զբաղվել է նաև պատմությամբ և մաթեմատիկայի փիլիսոփայությամբ:



Պուասոն Սիմոն Դենի  
(1781-1840)

Poisson Simeon Denis

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1812): Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1826):

Ծնվել է Պիտիվիե քաղաքում: 1798 -ին ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը և 1802 -ից դասավանդել այդ դպրոցում (1806 -ից՝ պրոֆեսոր): 1809 -ից՝ Փարիզի համալսարանի պրոֆեսոր: 1812 ից՝ Ֆրանսիայի քուլեջներում մաթեմատիկայի դասավանդման դիտորդ:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, մաթեմատիկական ֆիզիկային, տեսական և երկնային մեխանիկային, հավանականությունների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին: Հիդրոմեխանիկայում ընդհանրացրել է Նավիե-Ստոքսի հավասարումը սեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման համար՝ ջերմափոխանցման հաշվառումով: Լուծել է առաձգականության տեսության մի շարք խնդիրներ, ընդհանրացրել է այդ տեսության հավասարումները անիզոտրոպ մարմինների համար: Պոտենցիալի տեսության մեջ ներմուծել է *Պուասոնի հավասարումը* և կիրառել այն գրավիտացիայի և էլեկտրաստատիկայի խնդիրների լուծման համար: Երկնային մեխանիկայի բնագավառում ուսումնասիրել է Արեգակնային համակարգի մոլորակների շարժման կայունությունը, գրավել մոլորակային ուղեծրերի խտորումների և ծանրության կենտրոնի շուրջը Երկրի շարժման խնդիրների լուծմամբ: Հավանականությունների տեսության մեջ ապացուցել է մեծ թվերի օրենքի մասնավոր դեպքը և սահմանային թեորեմներից մեկը: Չևակերպել է պատահական մեծությունների բաշխման օրենքը (*Պուասոնի օրենք*):



Ռաֆսոն Ժոզեֆ  
(1648-1715)

Raphson Joseph

Անգլիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Սիդսեքսում: Ավարտել է Քեմբրիջի Հիսուսի քոլեջը: 1692 -ին ստացել է մագիստրոսի աստիճան: Իր "Analysis Aequationurn Universalis" (1690) գրքի համար ընտրվել է Լոնդոնի թագավորական ընկերության անդամ (1691): Այդ գրքում առաջարկեց հավասարումների արմատները գտնելու մեթոդ: Ավելի վաղ այդ մեթոդը մշակել է (թեև չէր հրատարակել) Ի.Նյուտոնը, ինչը հայտնի չէր Ռաֆսոնին: Այժմ այդ մեթոդը հաճախ անվանում են *Նյուտոն-Ռաֆսոնի մեթոդ*: Ավելի ուշ Ռաֆսոնը համագործակցեց Նյուտոնի հետ, լատիներենից անգլերենի թարգմանեց նրա մի քանի աշխատանքները: Քջերից էր, ում հետ Նյուտոնը պահպանում էր նամակագրական կապ: Նա հնարել էր իր սեփական մաթեմատիկական

բառարանը: Ռ-աֆտոնի փիլիսոփայական հայացքները հիմնված էին կաբալիստիկական գաղափարների վրա (*կաբալա*՝ միջնադարյան կրոնա-միստիկական ուսմունք հուդաիզմում, որը բոլոր իրերի և երևույթների հիմքը տեսնում էր հրեական այբուբենի տառերի և թվերի մեջ):



Ռեյլեյ Ջոն Ուիլյամ, լորդ Սթրեթ  
(1842-1919)

Rayleigh John William, lord Strutt

Անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1873, 1905-1908-ին՝ պրեզիդենտ): Նոբելյան մրցանակակիր (1904):

Ծնվել է Լենգֆորդ Գ-րովեում: Սովորել է Քեմբրիջի համալսարանում: Ջ. Ստոքսի աշակերտն էր: Ավարտել է համալսարանը 1865-ին: 1879-ից՝ Քեմբրիջի համալսարանի պրոֆեսոր և Կավենդիշի լաբորատորիայի տնօրեն: 1887-ից՝ Բրիտանական Թագավորական ինստիտուտի պրոֆեսոր: 1885-1896-ին՝ Լոնդոնի Թագավորական ընկերության մշտական քարտուղար:

Աշխատանքները վերաբերում են ձայնագիտությանը, տատանումների տեսությանը, էլեկտրականությանը, օպտիկային և այլն: Ձևակերպել է տատանումների գծային տեսության մի շարք հիմնարար թեորեմներ: Ջբաղվել է ալիքների դիֆրակցիայի, ցրման և կլանման հարցերով: Տատանումների տեսության վերաբերյալ աշխատանքները ամփոփել է «*Ձայնի տեսություն*» հիմնարար աշխատանքում: Ռեյլեյի անունով են կոչվել ֆիզիկական շատ հասկացություններ, օրենքներ, սարքեր (*Ռեյլեյի սկավառակ, Ռեյլեյի տիպի ալիք, Ռեյլեյի մագնիսացման օրենք, Ռեյլեյի ինտերֆերոմետր* և այլն):



Ռիչարդսոն Լյուիս Ֆրայ  
(1881-1953)

Richardson Lewis Fray

Անգլիացի գեոֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Նյուքասլում քվակերների ընտանիքում: 1903-ին հաջողությամբ ավարտել է Քեմբրիջի թագավորական քոլեջը: Աշխատել է բազմաթիվ հիմնարկություններում՝ Ֆիզիկայի ազգային լաբորատորիայում (1903-1904, 1907-1909), Տորֆի ազգային ընկերակցությունում (1906-1907), Օդերևութաբանական ծառայությունում (1913-1916): Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին, իր կրոնական համոզմունքներով լինելով պացիֆիստ, հրաժարվել է ծառայությունից գործող բանակում և աշխատել է դաշտային հոսպիտալում (1916-1919): 1920-1929-ին ղեկավարել է Վեստմինստերի մանկավարժական քոլեջի ֆիզիկայի դեպարտամենտը: 1929-1940-ին՝ Պեյսլի տեխնոլոգիական քոլեջի և Շոտլանդիայի արվեստի դպրոցի ղեկավար: 1940-ին պաշտոնաթող է եղել՝ իրեն նվիրելով հետազոտական աշխատանքի:

Մաթեմատիկայում հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկական ֆիզիկային և հաշվողական մաթեմատիկային: Կիրառել է վերջավոր տարբերությունների մեթոդը տորֆում հեղուկի հոսանքը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար: Այդ մեթոդը հետագա զարգացում ստացավ մթնոլորտի դինամիկային նվիրված նրա աշխատանքներում: Նրա հետազոտությունները ընկած են եղանակի նախագուշակման ժամանակակից մաթեմատիկական մեթոդների հիմքում: Մշակել է մոտավոր հաշվումների ճշտությունը լավացնող մեթոդ (*էքստրապոլացիա ըստ Ռիչարդսոնի*): Համակված հակապատերազմական գաղափարախոսությամբ 1919-ից սկսած մշակել է պատերազմների իր մաթեմատիկական տեսությունը:



Ռոլլ Միշել  
(1652-1719)

Rolle Michel

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Ամբերում: Մաթեմատիկան ուսումնասիրել է ինքնուրույն: Ֆրանսիական Գ-Ա անդամ (1685):

Գիտական աշխատություններում հիմնականում զարգացրել է հանրահաշվական հավասարումների իրական արմատների առանձնացման մեթոդները, որոնք հենվում են իր անունը կրող *Ռոլլի թեորեմի* մասնավոր դեպքի վրա: Ուսումնասիրել է երկու անհայտով առաջին կարգի հավասարումների ամբողջ արժեքանի լուծումները:



Ռունգե Կարլ Դավիդ  
(1856-1927)

Runge Karl David

Գերմանացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Բրեմենում: Սովորել է Մյունխենի (1876-1877) և Բեռլինի (1878-1880) համալսարաններում: 1886-1904-ին՝ Հաննովերի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի, իսկ 1904-1925-ին՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր: Կիրառական մաթեմատիկայի առաջին պրոֆեսորն էր Գերմանիայում:

Հետազոտությունների հիմնական ուղղությունները եղել են կիրառական մաթեմատիկան և սպեկտրոսկոպիան: Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման թվային մեթոդների հեղինակն է: Լայնորեն հայտնի է *Ռունգե-Կուտայի մեթոդը*: Առաջարկել է դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման երկրաչափական մեթոդը: Զբաղվել է նաև անալիտիկ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումներով:



Միլվեստր Ջեյմս Ջոզեֆ  
(1814-1897)

Sylvester James Joseph

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1839), Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան անդամ (1872):

Ծնվել է Լոնդոնում: Ավարտել է Քեմբրիջի համալսարանը (1837): 1839-ից աշխատել է Լոնդոնի Թագավորական քոլեջում: 1840-ից՝ Վիրջինիայի (ԱՄՆ) համալսարանի պրոֆեսոր: 1844-1854-ին աշխատել է Լոնդոնի ապահովագրական ընկերություններից մեկում: 1854-1870-ին՝ Վուլվիչի ռազմական ակադեմիայի, 1877-1883-ին՝ Ջ. Հոպքինսի համալսարանի (ԱՄՆ), 1883-1893-ին՝ Օքսֆորդի համալսարանի պրոֆեսոր:

Աշխատանքները վերաբերում են հանրահաշվին, ինվարիանտների տեսությանը, մատրիցների տեսությանը, մաթեմատիկական ֆիզիկային, տեսական և կիրառական կինեմատիկային: Զարգացրել է ինվարիանտների տեսությունը, առաջարկել է այդ տեսության տերմինաբանությունը՝ *ինվարիանտ*, *կովարիանտ*, *դիսկրիմինանտ* և այլն: Զբաղվել է կանոնական ձևերի տեսությամբ: Մեծ ներդրում է կատարել ԱՄՆ-ում մաթեմատիկայի բնագավառում հետազոտական աշխատանքի կազմակերպման գործում: Ամերիկյան առաջին մաթեմատիկական հանդեսի (1878, The American Journal of Mathematics) հիմնադիրն է ու խմբագիրը:



Սիմպսոն Թոմաս  
(1710-1761)

Simpson Thomas

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1746):

Ծնվել է Մարկետ-Վոտտոթոմ: Մաթեմատիկական ուսումնասիրել է ինքնուրույն: Վարում էր մաթեմատիկայի մասնավոր դասեր, միաժամանակ զբաղվում էր մետաքսյա գործվածքների արտադրությամբ: 1743-ից՝ Վուլվիչի ռազմական ակադեմիայի պրոֆեսոր:

Աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին: 1737-ին հրատարակել է «*Ֆլյուքսիաների մասին նոր տրակտատ*» աշխատությունը, որտեղ կիրառել է մաթեմատիկական անալիզի մեթոդները մեխանիկայի խնդիրների լուծման համար: Արտածել է մոտավոր ինտեգրման բանաձևը (*Սիմպսոնի բանաձև*): Մխալանքների տեսության հիմնադիրներից է: Բացահայտել է գնդային եռանկյունաչափության մի շարք բանաձևեր: Զբաղվել է նաև շարքերի տեսությամբ:





Վայերշտրաս Կարլ Թեոդոր Վիլհելմ  
(1815-1897)

Weierstrass Karl Teodor Wilhelm

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Մյունխենի ԳԱ (1836), Բեռլինի ԳԱ (1856) և Փարիզի ԳԱ (1868) անդամ: Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1895, 1864-ից՝ թղթակից անդամ):

Ծնվել է Օստենֆելդում: Ուսանել է իրավագիտություն Բոննի համալսարանում (1834-1838), այնուհետև մաթեմատիկա՝ Էյոնիգսբերգի համալսարանում: 1856-ից՝ Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ երկրաչափությանը և գծային հանրահաշվին: Ստեղծել է իրական թվերի տեսություններից մեկը և դրա հիման վրա կառուցել է մաթեմատիկական անալիզի տրամաբանական հիմնավորման համակարգ: Նրան են պատկանում մաթեմատիկական անալիզի մի շարք հիմնարար թեորեմներ թվային բազմությունների ճշգրիտ եզրերի, սահմանային կետերի, միջակայքում անընդհատ ֆունկցիաների վերաբերյալ: Բացահայտել է ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշները: Կառուցել է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսություններից մեկը՝ հիմնված շարքերի վրա: Վարիացիոն հաշվում ստացել է ինտեգրալի էքստրեմումի բավարար պայմանները, կառուցել է վարիացիոն հաշիվը պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիաների դեպքում: Գծային հանրահաշվում ստեղծել է տարրական բաժանարարների տեսությունը:



Վանդերմոնդ Ալեքսանդր Թեոֆիլ  
(1735-1796)

Vandermonde Alexandre Theophil

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և քաղաքական գործիչ: Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1771):

Ծնվել է Փարիզում: 1782-ից՝ արվեստների և արհեստների Կոնսերվատորիայի տնօրեն: 1795-ին դասավանդել էր Բարձրագույն նորմալ դպրոցում (Փարիզ): Ֆրանսիական Մեծ հեղափոխության ակտիվ մասնակից: Յակոբինյան էր (1790-ից):

Հիմնական գիտական աշխատությունները նվիրված են հանրահաշվին: Որոշիչների տեսության հիմնադիրներից է:



Վոլտերա Վիտո  
(1860-1940)

Volterra Vito

Իտալացի մաթեմատիկոս: Հռոմի դեի Լինչեի ազգային ակադեմիայի անդամ (1899), նրա պրեզիդենտը (1921-1926): Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1908), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1926):

Ծնվել է Անկոնայում, աղքատ ընտանիքում: Ավարտել է Պիզայի համալսարանը (1880): 1883-1892-ին՝ Պիզայի, 1893-1899-ին՝ Թուրինի, 1900-1931-ին՝ Հռոմի համալսարանների պրոֆեսոր: Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին ճարտարագիտական գործերի սպա էր: Հրաժարվելով Իտալիայի ֆաշիստական կառավարության հետ համագործակցությունից, 1931-ին ստիպված էր թողնել Հռոմի համալսարանը: Հաջորդող տարիները ապրել է հիմնականում արտասահմանում՝ ֆրանսիայում, Իսպանիայում և այլ երկրներում:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, ֆունկցիոնալ անալիզին և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Մշակել է մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրման մեթոդներ: Չարգացրել է ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը (*Վոլտերայի հավասարումները*): 1900-ին Հռոմի համալսարանում կատարած զեկուլյցում նշել է կենսաբանությունում և սոցիալական հետազոտություններում մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման անհրաժեշտությունը: Մշակել է գոյության համար պայքարի և ժողովրդագրական դինամիկայի մաթեմատիկական տեսությունը (*Լոտկա-Վոլտերայի մոդելը*): Ստացել է կարևոր արդյունքներ կրկնակի բեկումով միջավայրերի օպտիկայում և պինդ մարմինների շարժման տեսության մեջ:



Ուիլկինսոն Ջեյմս Հարդի  
(1919-1986)

Wilkinson James Hardy

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1969):

Ծնվել է Ստրոութում (Քենտ): Սովորել է Մանչեսթրի Ջ. Ուիլյամսոնի անվան մաթեմատիկական դպրոցում, հետագայում՝ Քենթրիջի համալսարանի Թրինիթի քոլեջում: Եղել է Հ. Հարդիի և Ջ. Լիթլվուդի աշակերտը: 1940-ից մասնակցել է ռազմական բալիստիկայի ոլորտի աշխատանքներին, զբաղվելով մաթեմատիկական ուսումնասիրություններով և թվային հաշվարկներով: 1946-ին աշխատել է Լոնդոնի ֆիզիկայի Ազգային լաբորատորիայում, եղել է Ա. Թյուրինգի աշակերտը: 1970-ին սկսեց աշխատել Հաշվողական Ալգորիթմների Խմբում (Numerical Algorithms Group): Արժանացել է բազմաթիվ գիտական մրցանակների, այդ թվում՝ Հաշվողական Մեքենաների Ասոցիացիայի Ա. Թյուրինգի անվան մրցանակին (1970),

Ինդոստրիալ և Կիրառական Մաթեմատիկայի Ընկերության (SIAM) Ջ. ֆոն Նեյմանի անվան մրցանակին:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են թվային անալիզին, մասնավորապես՝ հաշվողական գծային հանրահաշվին, որտեղ նա մշակեց կլորացման սխալանքների գումարային ազդեցության մեթոդ, որը ստացավ *սխալանքների հակադարձ անալիզ* անվանումը: Բազմաթիվ գիտական աշխատանքների հեղինակ է, որոնց թվում հատուկ տեղ է զբաղեցնում *«Մեխական արժեքների հանրահաշվական պրոբլեմը»* հիմնարար աշխատությունը (1965): Մեծ ներդրում ունի գծային հանրահաշվի ստանդարտ ծրագրերի գրադարանի ստեղծման գործում:



Ֆրոբենիուս Ֆերդինանդ Գեորգ  
(1849-1917)

Frobenius Ferdinand Georg

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1893):

Ծնվել է Բեռլինում: Ավարտել է Բեռլինի համալսարանը (1870): Կ. Վալերշտրասի և Լ. Կրոնեկերի աշակերտն է: 1875-1892 -ին՝ Յյուրիխի (Շվեյցարիա) պոլիտեխնիկումի, իսկ 1892 -ից՝ Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են հանրահաշվին: Քառակուսային ձևերի և մատրիցային հաշվի բնագավառներում հիմնարար աշխատությունների հեղինակ է: Նշանակալից ներդրում կատարեց խմբերի տեսության մեջ (*վերջավոր խմբերի մասին Ֆրոբենիուսի թեորեմները*):



Ֆուրիե Ժան Բապտիստ Ժոզեֆ  
(1768-1830)

Fourier Jean Baptiste Joseph

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1817, 1822 -ից՝ մաթեմատիկայի բաժանմունքի մշտական քարտուղար): Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1826): Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1829), Լոնդոնի թագավորական ընկերության արտասահմանյան անդամ:

Ծնվել է Օսերում, աղքատ դերձակի ընտանիքում: Որբացել է ութամյա հասակում: Ավարտել է Օսերի ռազմական դպրոցը, որտեղ և անցել է դասախոսական աշխատանքի (1784-1793 -ին դասավանդել է հռետորություն, պատմություն և փիլիսոփայություն): 1795 -ին սովորելու է ուղարկվել Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոց, որտեղ շուտով դարձել է դասախոս, այնուհետև՝ պրոֆեսոր: Մասնակցել է Նապոլեոնի Եգիպտական արշավանքին (1798-1801): 1798 -ից՝ Եգիպտական ինստիտուտի մշտական քարտուղար: 1799 -ին գլխավորում էր գիտական արշավ Վերին Նեղոսի հովտում: Կատարել է ֆրանսիական իշխանությունների

դիվանագիտական հանձնարարությունները: 1801 -ից աշխատել է Ֆրանսիայի ժողովրդական լուսավորության գերատեսչությունում: 1802 -ից՝ Իզեր դեպարտամենտի պրեֆեկտ: 1827 -ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի կատարելագործման խորհրդի նախագահ: Ֆուրիեի ընտրությունը Փարիզի ԳԱ մաթեմատիկայի բաժանմունքում (1816) քաղաքի կողմից չի հաստատվել: Երկրորդ անգամ նա ընտրվել է ընդհանուր ֆիզիկայի բաժանմունքում (1817):

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկական ֆիզիկային, մասնավորապես՝ պինդ մարմնում ջերմության տարածման տեսությանը, որտեղ նրա արդյունքները մեծ դեր են խաղացել մաթեմատիկայի հետագա զարգացման գործում: Ֆունկցիաները եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացնելու տեսության հիմնադիրներից է (*Ֆուրիեի շարքեր*): Վաղ աշխատանքներում արտածել է, որոշ սահմանափակումների դեպքում, հանրահաշվական հավասարումների իրական արմատների քանակի մասին թեորեմը: Հրատարակել է մի շարք աշխատանքներ հավանականության տեսությունից և մաթեմատիկական վիճակագրությունից: Մեծ ներդրում է կատարել եզիպտագիտության մեջ:

## Գրականություն

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972.
- [2] Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1975.
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ: Лаборатория Знаний, 2004.
- [4] Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. - М.: Высшая школа, 2000.
- [5] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1,2. - М.: Физматгиз, 1962.
- [6] Боголюбов А.Н. Математики, механики (биографический справочник). - Киев: Наукова думка, 1983.
- [7] Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления. - М.: Мир, 1985.
- [8] Вержбицкий В.М. Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Высшая школа, 2001.
- [9] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002.
- [10] Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
- [11] Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1987.
- [12] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984.
- [13] Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1982.
- [14] Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. - М.: Наука, 1967.
- [15] Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. - М.: Наука, 1971.
- [16] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.
- [17] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977.
- [18] Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. - М.: ГИТТЛ, 1954.
- [19] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970.

- [20] Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы. - М.: Наука, 1967.
- [21] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977.
- [22] Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. - М.: Наука, 1980.
- [23] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980.
- [24] Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. - М.: Наука, 1995.
- [25] Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
- [26] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
- [27] Квасов Б.И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами. - М.: Физматлит, 2006.
- [28] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. - М.: ИЛ, 1971.
- [29] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989.
- [30] Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Физматгиз, 1959.
- [31] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы, т.1,2. - М.: Наука, 1976,1977.
- [32] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1971.
- [33] Ланкастер П. Теория матриц. - М.: Наука, 1978.
- [34] Малаховский В.С. Избранные главы истории математики. - Калининград: ФГУИПП "Янтарный сказ", 2002.
- [35] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989.
- [36] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Высшая школа, 1963.
- [37] Мысовских И.М. Лекции по методам вычислений. - М.: Физматгиз, 1962.
- [38] Мэтьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы: Использование MATLAB. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.
- [39] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969.
- [40] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974.

- [41] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1986.
- [42] Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. - М.: Мир, 1991.
- [43] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.
- [44] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. - М.: Наука, 1984.
- [45] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1964.
- [46] Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др. Математический практикум. - М.: Физматгиз, 1960.
- [47] Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М.: Мир, 1984.
- [48] Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977.
- [49] Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987.
- [50] Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. - М.: КомКнига, 2007.
- [51] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1986.
- [52] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978.
- [53] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959.
- [54] Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. - М.: Наука, 1984.
- [55] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
- [56] Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. - М.: Мир, 1985.
- [57] Турчак Л.И. Основы численных методов. - М.: Наука, 1987.
- [58] Тыртышников Е.Е. Краткий курс численного анализа. - М.: ВИНТИ, 1994.
- [59] Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. - М.: Наука, 1970.
- [60] Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. - М.: БИНОМ: Лаборатория Знаний, 2006.
- [61] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: ФМ, 1960.

- [62] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т.1,2. - М.: Наука, 1968.
- [63] Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969.
- [64] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980.
- [65] Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. - М.: Мир, 1986.
- [66] Хемминг Р.В. Численные методы. - М.: Наука, 1972.
- [67] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989.
- [68] Արարքյան Բ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Շահրադյան Ռ.Լ. Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ: - Երևան, ԵՊՀ հրատ., 1988.
- [69] Բոնդարենկո Վ.Ս., Դադայան Յու.Գ., Հակոբյան Յու.Ռ. Հաշվման մեթոդներ, մաս 1 և 2: - Երևան, ԵՊՀ հրատ., 1982 և 1984.
- [70] Թունիս Ա.Գ., Սովսիսյան Յու.Ս. Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ (տնտեսագիտության և գործարարության հանգումակներ): - Երևան, «Ասողիկ», 2002.
- [71] Հակոբյան Յու.Ռ. Թվային մեթոդներ, մաս 1: - Երևան, «Արմենիկա», 2003.
- [72] Հակոբյան Յու.Ռ. Թվային մեթոդներ, մաս 2: - Երևան, «ՎՄՎ-Պրինտ», 2007.
- [73] Հայկական Սովետական Հանրագիտարան, հ. 1-12: - Երևան, 1974-1986.
- [74] Դազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: - Երևան, «Զանգակ - 97», 2002.
- [75] Axelsson O. Iterative Solution Methods. - Cambridge University Press, 1994.
- [76] Golub G.H. and C. van Loan. Matrix Computations. - The Johns Hopkins University Press Dover Publications, 1996.
- [77] Kincaid D. and W. Cheney. Numerical Analysis. - Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1991.
- [78] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and B.P. Flannery. Numerical Recipes in C. - Cambridge University Press, 1992.
- [79] Quarteroni A., Sacco R. and F. Saleri. Numerical Mathematics. - Springer, 2007.
- [80] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. - SIAM Publications, 2003.



# Առարկայական ցանկ

## ալգորիթմ

- ադապտիվ 299
- խնայողական 10
- Կռաուտի 116

## անհամաձայնության վեկտոր 113

## անհավասարություն

- Բեսելի 247
- Կոշի-Բունյակովսկու 76

## անորոշության միջակայք 39

## արմատ

- պատիկ 56
- պարզ 54

## բազմանդամ

- բնութագրիչ 80
- Լեժանդրի 260, 295
- Հերմիտի 261
- Չեբիշևի 202
- առաջին սեռի 260
- երկրորդ սեռի 260

## բազմանդամներ

- օրթոգոնալ 256

## բաժանված տարբերություն 207

## բանաձև

- Կրամերի 106
- Հերոնի 58
- Նյուտոն-Լայբնիցի 271
- քառակուսացման 271

## բառարանագրական կարգավորում 414

## Գերշգորինի

- թեորեմ 186
- շրջան 188
- տիրույթ 188

## գիշատիչ-գոի մոդել 307

## գնահատական

- ապոստերիորի 113

- ապրիորի 113

Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացում 248

## եղանակ

- ըստ պարամետրի շարունակման 69
- կիսման 36

գուգամիտության արագացում 46, 48

գուգամիտություն

- գերզոնային 47
- գծային 46
- $\alpha$  կարգի 47

## Էյտկենի

- $\Delta^2$ -ընթացք 50
- ինտերպոլացիոն սխեմա 198

## թեորեմ

- Բոլցանո-Կոշիի 34
- Գերշգորինի 186

## թիվ

- նորմալացված 21
- պայմանավորվածության 27, 108

## թվանշան

- իմաստալից 14
- ստույգ 14

## թվերի ներկայացում

- սահող կետով 21
- ֆիքսած կետով 19

## Ժորդանյան

- կանոնական տեսք 96
- վանդակ 96

ինտերպոլացիա 195

ինտերպոլացիայի

- խնդիր 195
- հանգույց 195
- ինտերպոլացիոն
  - բազմանդամ 196
  - ֆունկցիա 195
- ինտերպոլացիոն բանաձև
  - Լագրանժի 197
  - Նյուտոնի 208
    - - աջակողմյան 212
    - - ձախակողմյան 212
- իտերացիա 40
- լավագույն մոտարկման
  - տարր 225
  - բազմանդամ 232, 255
- խնդիր
  - Դիրիխլեի 410
  - եզրային 353, 358
  - Կոշիի 309
- կայունություն
  - ըստ սկզբնական տվյալների 389
- կշիռ 253, 261
- կշռային ֆունկցիա 253
- կոռեկտոր 328
- հակադարձ տեղադրում 119, 135
- համակարգ
  - երեքանկյունագծային 134
  - լավ պայմանավորված 110
  - նորմալ 244, 263
  - վատ պայմանավորված 110
  - օրթոնորմալ 246
- համարժեք նորմեր 95
- հավասարման
  - արմատ 33
    - - մեկուսացված 33
    - - պատիկ 56
    - - պարզ 54
- հավասարման արմատի
  - տեղայնացում 33
  - ճշգրտում 33
- հավասարություն
  - Պարսևալի 247
- հավասարում
  - բնութագրիչ 171
  - Լապլասի 371
  - լարի տատանման 369, 402
  - Կեպլերի 33
  - կոշտ 352
  - Պուասոնի 371
  - ջերմահաղորդականության 370, 393
  - տեղափոխման 371, 384
- հավասարումներ
  - Լոտկա-Վոլտերայի 308
- հիպերհարթություն 87
- ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի 337
- ճշտության կորուստ 16
- մատրից
  - անկյունագծային 107
  - արտացոլման 89
  - Գ-րամի 244
  - դրական կիսատրոշյալ 84
  - դրական որոշյալ 84
  - երեքանկյունագծային 134
  - լավ պայմանավորված 110
  - հարթ պտույտի 87
  - Հիլբերտի 246
  - Յակոբիի 68
  - շեղսիմետրիկ 101
  - պարզ կառուցվածքի 172, 192
  - պտտման 86
  - սիմետրիկ 82
  - ստորին եռանկյուն 107
  - վանդակային 78
  - վատ պայմանավորված 110
  - վերին եռանկյուն 107
  - տեղափոխության 85
    - - տարրական 86
  - օրթոգոնալ 84
- մատրիցի
  - անկյունագծային գերիշխում
    - - ըստ տողերի 120
    - - ըստ սյունակների 169

- հետք 78
- մինոր 78
  - - անկյունային 78
  - - գլխավոր 78
- նորմ 91
  - - համաձայնեցված 92
  - - ստորադրված 91
  - - օպերատորային 91
  - - Ֆրոբենիուսի 91
  - -  $l_\infty$  92
  - -  $l_1$  93
  - -  $l_2$  94
- պայմանավորվածության թիվ 108
- սեփական արժեք 80
- սեփական վեկտոր 80
- սպեկտր 81
- սպեկտրալ շառավիղ 81
- մատրիցներ
  - համաձև 78
  - նման 89
- մեթոդ
  - Ադամսի 338
  - Ադամս-Բաշֆորթի 338
  - Ադամս-Մոուլթոնի 342
  - անորոշ գործակիցների 292
  - աստիճանային 172
    - - հակադարձ 177
  - Գաուս-Չեյդելի 145
  - Գաուսի 117
    - - գլխավոր տարրի 126
  - իտերացիոն 106, 138
    - - երկբայլ 64
  - Էյլերի 320
  - Էյլերի վերահաշվման 326
  - Խոլլեսկու 129
  - Հալլեյի 62
  - հատողների 63
  - Հոյնի 329
  - միջին կետի 329
  - Յակոբիի 141
  - Նյուտոնի 52
    - - համակարգերի համար 67
  - - հաստատուն ածանցյալով 58
  - Նյուտոն-Ռաֆսոնի 52
  - շոշափողների 53
  - պարզ իտերացիայի 40
  - Պիկարի 310
  - պտտման 177
  - պրեդիկտոր-կոռեկտոր 345
  - ռելաքսացիայի 154
    - - հաջորդական վերին 157
    - - ստորին 157
  - Ռիչարդսոնի 157
  - Ռունգե-Կուտայի 331
  - վերլուծական 308
  - վերջավոր տարբերությունների 308, 357, 372
  - տարբերական 308
  - ուղիղ 106
  - փոքրագույն քառակուսիների 261
  - LU 114
  - SOR 157
- մեթենայական
  - անվերջություն 21
  - գրո 21
  - Էպսիլոն 22
- միավոր սֆերա 90
- միջին քառակուսային շեղում 254
- մոտարկում
  - հավասարաչափ 230
  - միջին քառակուսային 254
- յակոբիան 68
- Նեյմանի
  - կայունության պայման 390
  - շարք 96
- նորմավորված տարր 242
- շաբլոն 376
- որոշիչ
  - բնութագրիչ 80
  - Գրամի 244
  - Վանդերմոնդի 196

- Չեբիշևի բազմանդամ 202  
չեբիշևյան ալտերնանս 233
- պայմանավորվածության թիվ 27  
պայմանավորվածություն 25  
պրեդիկտոր 328  
պրեդիկտոր-կոռեկտոր 328
- Ռ-ելեի հարաբերություն 83  
Ռ-ունգեի կանոն 289, 335
- սեփական արժեքների  
- լրիվ խնդիր 172  
- խտտորում 190  
- մասնակի խնդիր 172
- Միլվեստրի չափանիշ 84  
սխալանք  
- անվերացների 11  
- բացարձակ 13  
- հաշվողական 11  
- հարաբերական 13  
- մեթոդի 11
- սկալյար արտադրյալ 75, 241  
սալլայն 214  
- ինտերպոլացիոն 214  
- գծային 215  
- խորանարդային 217  
- - բնական 217  
- քառակուսային 215
- վեկտոր  
- նորմալ 87  
- նորմավորված 76
- վեկտորի  
- արտացոլում 88  
- նորմ 92  
- - Հյուդերի  $l_p$  90  
- -  $l_\infty$  90  
- -  $l_1$  90  
- -  $l_2$  90
- վեկտորներ  
- օրթոգոնալ 76
- վեկտորների  
- համակարգ  
- - օրթոգոնալ 76  
- - օրթոնորմալ 76  
- սկալյար արտադրյալ 75  
վերլուծություն  
- Խոլեսկո 131  
- LU 114  
- QR 251  
վերջավոր տարբերություն 211  
տարածություն  
- Էվկլիդյան 241  
- խիստ նորմավորված 229  
- հիլբերտյան 242  
- նորմավորված 225  
- սեպարաբել 247  
- ունիտար 242  
տարբերական ածանցյալ  
- աջակողմյան 314  
- կենտրոնական 314  
- ձախակողմյան 314  
տարբերական մեթոդ  
- անբացահայտ 319  
- բազմաբայլ 318  
- բացահայտ 319  
- միաբայլ 318  
տարբերական սխեմա 358, 372, 378  
- անբացահայտ 396  
- բացահայտ 394  
- կշիռներով 402  
- Կռանկ-Նիկոլսոնի 400  
տարբերական սխեմայի  
- զուգամիտություն 364, 382  
- կայունություն 362, 383  
- մոտարկում 362, 383  
տարբերական օպերատոր 361, 376  
- Լապլասի 411  
ցանց 318, 358, 372  
- անհավասարաչափ 374  
- հավասարաչափ 319, 373  
ցանցային ֆունկցիա 318, 375  
ցանցային հավասարումներ 358

ցանցի

- հանգույց 318, 372
- - եզրային 374
- - խիստ ներքին 380
- - ներքին 374
- - սահմանամերձ 380
- քայլ 319, 374

ուղիղ արտաքսում 119, 135

քառակուսացման բանաձև 271

- Գաուսի 293
- ինտերպոլացիոն 290
- - բաց տիպի 291
- - փակ տիպի 291
- Նյուտոն-Կոտսի 292
- սեղանների 280
- Սիմպսոնի 285
- ուղղանկյունների 274
- - աջ 274
- - համակցված 280
- - ձախ 274
- - միջին 274

օպերատոր

- անցման 390
- Լապլասի 371

օրթոգոնալ տարրեր 242

ֆունկցիա

- կտոր առ կտոր գծային 215
- ցանցային 318, 379, 382

ֆունկցիայի գրո 33

Ֆուրիեի

- արագ ձևափոխություն 406
- գործակից 247, 405
- դիսկրետ ձևափոխություն 406
- շարք 247
- վերջավոր գումար 405

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՅՈՒՐԻ ՌՈՒԲԵՆԻ ՀԱԿՈՐՅԱՆ

**ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ**

ԴԱՍԱԳԻՐՔ

Մասնագետ խմբագիր՝ Ս.Լ. Սահակյան  
Խմբագիր՝ Լ.Գ. Մանուկյան  
Համակարգչային ձևավորումը՝ Յու.Ռ. Հակոբյանի  
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Նրայր» ՍՊԸ-ում:  
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 11.12.2017  
Չափսը՝ 70x100<sub>1/16</sub>: Տպ. մամուլը՝ 28,875:  
Տպաքանակը՝ 150

ԵՊՀ հրատարակչություն  
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1  
[www.publishing.am](http://www.publishing.am)



ԵՐԵՎԱՆԻ ՎԵՐԱԳՐՈՒԹՅԱՆ  
ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ ԻՐԱՎԱԿԱՆ  
ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ ԻՐԱՎԱԿԱՆ  
[publishing.ysu.am](http://publishing.ysu.am)